SERIAK

1.- Estudiatu ondorengo seriearen izaera eta kalkulatu bere batura konbergentea den kasuetan:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{L}a)^n\textbf{,}\quad a>0\quad \textbf{izanik.}$$

Serie geometrikoa da, $r=\mathrm{L}a$ arrazoikoa. Hortaz:

Konbergentea da (absolutuki) $\Leftrightarrow$ $|r|=|\mathrm{L}a|<1 \quad\Leftrightarrow\quad -1<\mathrm{L}a<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{e}<a<e$

($\forall a\geq e$ eta $\forall a\leq\frac{1}{e}$ ez da konbergentea).

Bere batura:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{L}a)^n=\frac{\mathrm{L}a}{1-\mathrm{L}a}\qquad \forall a\in\left(\frac{1}{e},e\right)$$

2.- Adierazi, arrazoituz, hurrengo baieztapenak egiazkoak edo gezurrezkoak diren:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea da** $\Leftrightarrow$ **absolutuki konbergentea da**

b) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad (a_n\geq 0)$ **konbergentea da** $\Leftrightarrow$ **absolutuki konbergentea da**

c) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea bada** $\Rightarrow$ **absolutuki konbergentea da**

d) Baldin $\{a_n\}$ **konbergentea bada** $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea da**

e) Baldin $\{a_n\}$ **dibergentea bada** $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **dibergentea da**

f) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea bada** $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ **konbergentea da**

g) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **dibergentea bada** $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ **dibergentea da**

a) Gezurrezkoa da.

Izan ere, baieztapen hori zuzena litzateke $\Leftrightarrow$ $a_n\geq 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$. Kontradibidea: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ez da absolutuki konbergentea, bai ordea baldintzaz konbergentea.

b) Egiazkoa da.

Izan ere, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ absolutuki konbergentea da $\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\overset{(a_n\geq 0)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da.

c) Gezurrezkoa da.

a) ataleko kontradibideak balio du.

d) Gezurrezkoa da.

Kontradibidea: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ konbergentea da, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R}$ baita. Baina $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da.

e) Egiazkoa da.

$\{a_n\}$ dibergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow$ Ez da betetzen serieen konbergentziarako baldintza beharrezkoa ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

f) Egiazkoa da.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea bada $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \{a_n\}$ konbergentea da.

g) Gezurrezkoa da.

d) ataleko kontradibideak balio du.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a\cdot n\cdot x^2}}{n^2}$ seriea emanik, estudiatu bere konbergentzia *a* eta *x* parametroen balio errealen arabera.

$a_n = \frac{2^{a\cdot n\cdot x^2}}{n^2} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. D´Alembert-en irizpidea aplikatzen bazaio:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{a\cdot(n+1)\cdot x^2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^{a\cdot n\cdot x^2}} = 2^{a\cdot x^2}$. Orduan:

$$2^{a\cdot x^2} < 1 \Leftrightarrow ax^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

$$2^{a\cdot x^2} > 1 \Leftrightarrow ax^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

$$2^{a\cdot x^2} = 1 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{edo} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ kobergentea da.}$$

4.- Determinatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+a^n}$ seriearen izaera, $a \geq 0$ parametroaren balioen arabera.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \frac{n^a}{1+a^n} \geq 0 \quad \forall n$

Baldin $a = 0 \Rightarrow a_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $0 < a < 1 \Rightarrow a_n \sim n^a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $a = 1 \Rightarrow a_n = \dfrac{n}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

Baldin $a > 1$ D`Alembert aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a \cdot (1+a^n)}{(1+a^{n+1}) \cdot n^a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{1+a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.}$$

5.- Aztertu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)}{(3n-3)\cdot 3^n \cdot n!}$ seriearen izaera.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ non $a_n = \dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)}{(3n-3)\cdot 3^n \cdot n!} \geq 0 \quad \forall n$.

D`Alembert erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)\cdot(3n+6)}{3n\cdot 3^{n+1}\cdot (n+1)!} \cdot \frac{(3n-3)\cdot 3^n \cdot n!}{3\cdot 6\cdot 9\cdot \ldots \cdot (3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+6)(3n-3)}{3n\cdot 3(n+1)} = 1 \Rightarrow$$

Raabe-Duhamel aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(3n+6)(3n-3)}{3n\cdot 3(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} n \frac{n^2+n-n^2-n+2}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.}$$

6.- Azaldu hurrengo baieztapenak zuzenak diren ala ez:

a) $a>0$ **suposatuz,** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ **konbergentea da** $\Leftrightarrow a>1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **eta** $\sum_{n=1}^{\infty}5a_n$ **serieek izaera bera dute.**

c) $a_n\geq 0$ **izanik, baldin** $\{a_n\}$ **segida dibergentea bada** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **dibergentea da.**

d) Baldin $\{a_n\}$ **segida konbergentea bada** $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **konbergentea da**

e) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ **berredura seriearen konbergentzi arloa** $(-1,2)$ **tartea izan daiteke.**

a) Zuzena da:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n}$ serie geometrikoa da, $r=\frac{1}{a}>0$ arrazoia delarik. Beraz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n} \text{ konbergentea da } \Leftrightarrow r=\frac{1}{a}<1\Leftrightarrow a>1$$

b) Zuzena da:

Serie baten izaera ez da aldatzen gai guztiak konstante ez-nuluaz biderkatuz gero.

c) Zuzena da:

$\{a_n\}$ dibergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\infty\neq 0\Rightarrow$ Konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da betetzen $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ezin da konbergentea izan eta $a_n\geq 0$ denez $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

d) Ez da zuzena:

$\{a_n\}$ konbergentea da $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea denik.

Adibideak:

1) $a_n=\frac{2n+1}{3n-5}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ konbergentea da. Baina $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ezin da konbergentea izan.

2) $a_n=\frac{1}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ konbergentea da. Baina $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da.

e) Ez da zuzena:

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ berredura seriearen konbergentzi arloak jatorriarekiko tarte simetrikoa izan behar du.

7.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}}{c^n \cdot n!}$ **seriearen izaera *a*, *b* eta *c* parametro errealen balioen arabera,** $c > 0$ **izanik.**

$a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}}{c^n \cdot n!} \geq 0 \quad \forall n$. D´Alembert-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^a} \cdot (n+1)^{b\cdot(n+1)}}{c^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{c^n \cdot n!}{\sqrt{n^a} \cdot n^{b \cdot n}} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^a}}{\sqrt{n^a}} \cdot \frac{(n+1)^{b\cdot(n+1)} \cdot n!}{n^{b\cdot n} \cdot (n+1) \cdot n!} =$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{b\cdot(n+1)}}{n^{b\cdot n} \cdot (n+1)} = \frac{1}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{b\cdot n} \cdot \frac{(n+1)^b}{(n+1)} = \frac{e^b}{c} \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1)^{b-1} =$$

$$\begin{cases} \frac{e^b}{c} \cdot \infty = \infty > 1 \quad \forall b > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \frac{e^b}{c} \cdot 0 = 0 < 1 \quad \forall b < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \frac{e}{c} \qquad \text{baldin } b = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{Baldin } c > e \Rightarrow \frac{e}{c} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \text{Baldin } c < e \Rightarrow \frac{e}{c} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \text{Baldin } c = e \Rightarrow \frac{e}{c} = 1 \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot n!} \quad \Rightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot n!} \overset{(*)}{\sim} \frac{\sqrt{n^a} \cdot n^n}{e^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n^{(1-a)/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Baldin } \frac{1-a}{2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ \text{Baldin } \frac{1-a}{2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \end{cases}$$

(*) Stirling-en formula aplikatuz.

8.- Estudiatu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{a^{n}}\right)$ **seriearen izaera** $\forall a>0$ eta $\forall\alpha>0$ **.**

$$a_n=n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\geq 0 \quad \text{eta} \quad b_n=\frac{1}{a^n}\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergenteak dira .

$$\forall\alpha>0 \quad a_n=n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\sim n\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}=\frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n\begin{cases}\text{konb. } \forall\alpha>2\ (\Leftrightarrow \alpha-1>1)\\ \text{dib. } \forall\alpha\leq 2\ (\Leftrightarrow \alpha-1\leq 1)\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{a^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ serie geometrikoa da, } r=\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \begin{cases}\text{konb. } \forall a>1\ (\Leftrightarrow \frac{1}{a}<1)\\ \text{dib. } \forall a\leq 1\ (\Leftrightarrow \frac{1}{a}\geq 1)\end{cases}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+\frac{1}{a^{n}}\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow$ $\alpha>2$ eta $a>1$. Eta gainerako kasuetan dibergentea da.

9.- Determinatu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{bn}\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$ **seriearen izaera,** $a>0$ **eta** $b\in\mathbb{R}$ **parametroen balioen arabera.**

$a_n=\frac{n!}{e^{bn}\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. D\`Alambert aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{e^{b(n+1)}\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)\cdot(a+n+1)}\frac{e^{bn}\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}{n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^b\cdot(a+n+1)}=\frac{1}{e^b}$$

Orduan, $\frac{1}{e^b}<1\Leftrightarrow e^b>1\Leftrightarrow b>0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da.

$\frac{1}{e^b}>1\Leftrightarrow e^b<1\Leftrightarrow b<0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

$\frac{1}{e^b}=1\Leftrightarrow e^b=1\Leftrightarrow b=0 \Rightarrow a_n=\frac{n!}{(a+1)\cdot(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$

$\Rightarrow b=0$ kasuan Raabe-Duhamel aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{n+1}{a+n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{a+n+1-n-1}{a+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{a+n+1}=a$$

Beraz, baldin $a<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

baldin $a>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da.

baldin $a=1 \Rightarrow a_n = \frac{n!}{2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

10.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{a^n}$ seriearen izaera, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ parametroaren balioen arabera.

$a_n = \frac{2n}{a^n}$ positiboa edo negatiboa izan daiteke $\forall a<0$, beraz balio absolutuen seriea aztertuko dugu. D`Alambert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{|a|^{n+1}} \cdot \frac{|a|^n}{2n} = \frac{1}{|a|}$. Orduan:

$\frac{1}{|a|} < 1 \Leftrightarrow |a| > 1 \Leftrightarrow a \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutuki konbergentea da.

$$\frac{1}{|a|} > 1 \Leftrightarrow |a| < 1 \Leftrightarrow a \in (-1,1) \begin{cases} \Rightarrow \forall a \in (0,1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \Rightarrow \forall a \in (-1,0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da absolutuki konbergentea} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da konbergentea} \end{cases}$$

$$\frac{1}{|a|} = 1 \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \begin{cases} \text{Baldin } a=1 \Rightarrow a_n = 2n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ \text{Baldin } a=-1 \Rightarrow a_n = (-1)^n \cdot 2n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ez da konbergentea} \end{cases}$$

<u>Beste modu batera.</u> Baldintza beharrezkoa aztertzen hasten bagara:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{|a|^n} = \begin{cases} \infty \quad \forall |a| \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ezin da konbergentea izan } \forall a \in [-1,1] - \{0\} \\ 0 \quad \forall |a| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea izan daiteke } \forall a \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}$$

Eta orain D`Alambert aplikatzen zaio $|a|>1$ denean:

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{|a|^{n+1}} \cdot \frac{|a|^n}{2n} = \frac{1}{|a|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutuki konbergetea da $\forall a \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

11.- a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gai ez-negatiboen serie konbergentea bada, zein da $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ seriearen izaera?

b) Baldin $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen batura.

c) Baldin $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{7n+\mathrm{L}n}{n}$, determinatu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearen izaera eta kalkulatu bere batura.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berretura-seriea konbergentea izan daiteke $\forall x > 0$ eta dibergentea $\forall x \leq 0$?

(2 puntu)

a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) = \mathrm{L}1 - \mathrm{L}(1+a_n) = -\mathrm{L}(1+a_n) \sim -a_n$

Orduan $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ konbergentea da.

<u>Oharra</u>: $a_n \geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{1+a_n} \leq 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) \leq 0$. Beraz, konparaziozko lehenengo irizpidea aplikatzen badugu, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seriearekin konparatzeko, $\sum_{n=1}^{\infty} -\mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ jarri beharko genuke. Hau da, $\mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right) \leq a_n$ (egia bada ere) ezin da erabili justifikatzeko $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)$ konbergentea dela. (Adibidez: $\frac{-1}{n} \leq \frac{1}{n^2} \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ konbergentea **).**

b) Baldin $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie geometrikoa da, bere arrazoia $r=\frac{1}{2}<1$ dena. Orduan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 2a_1$.

c) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+\mathrm{L}n}{n} = 7 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da eta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 7$.

d) Ezinezkoa da, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berretura-seriearen konbergentzi arloa jatorriarekiko tarte simetrikoa baita.

12.-Izan bedi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ **seriea.**

a) Konbergentea da? Arrazoitu erantzuna.
b) Absolutuki konbergentea da? Arrazoitu erantzuna.

$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ non $a_n=\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}=\frac{(-1)^n}{2\cdot \mathrm{L}n}\quad \forall n\geq 2 \quad \Rightarrow$ Serie alternatua da.

Balio absolutuen seriea aztertzen hasten bagara:

$$\left.\begin{array}{l}|a_n|=\frac{1}{2\cdot \mathrm{L}n}>\frac{1}{2n}\quad \forall n\geq 2\\ \text{Eta } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ dibergentea da}\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \text{ dibergentea da} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}a_n \text{ ez da absolutuki konbergentea.}$$

Alternatua denez, Leibniz-en teorema aplikatuko diogu orain:

$$\left.\begin{array}{ll} i) & \lim_{n\to\infty}|a_n|=0\\ ii) & |a_n|>|a_{n+1}|\quad \forall n\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}a_n \text{ konbergentea da}$$

Beraz:

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ ez da absolutuki konbergentea

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{2\cdot \mathrm{L}n}$ konbergentea da. Hau da, baldintzaz konbergentea da.

13.- Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\lambda^n\cdot n!}\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^+$**.**

a) λ **-ren zein baliotarako betetzen da konbergentzi baldintza beharrezkoa?**
b) Aztertu seriearen izaera.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ non $a_n=\frac{n^n}{\lambda^n\cdot n!}\geq 0\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^+$

Baldintza beharrezkoa: $\lim_{n\to\infty}a_n=0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\lambda^n \cdot n!} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{e}{\lambda}\right)^n}{\sqrt{2\pi n}} = \begin{cases} \infty \text{ baldin } \frac{e}{\lambda} > 1 \\ 0 \text{ baldin } \frac{e}{\lambda} \le 1 \end{cases}$$

Beraz, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \forall \lambda \ge e$.

b) $\forall \lambda < e \quad \lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\forall \lambda \ge e \quad a_n \sim \dfrac{e^n}{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$

- Baldin $\lambda = e \Rightarrow a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{1}{n^{1/2}}$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ serie harmonikoarekin konparatuz, $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da

- Baldin $\lambda > e \Rightarrow$ D´Alambert aplikatuko dugu:

  $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \sim \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{n+1}}{\lambda^{n+1} \cdot \sqrt{2\pi(n+1)}} \cdot \dfrac{\lambda^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{e^n} = \dfrac{e}{\lambda} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da $\forall \lambda > e$ eta dibergentea da $\forall \lambda \le e$.

14.- Zehaztu $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+1)^n \cdot a^n}$ seriearen izaera $\forall a > 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)^n \cdot a^n} \ge 0 \quad \forall n$. D´Alembert-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1} \cdot a^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n \cdot a^n}{n!} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+2)\cdot(n+2)^n} = \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

Eta $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n = 1^{\infty} = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{L}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) \sim \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\dfrac{n+1}{n+2} - 1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{n+1-n-2}{n+2} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Orduan: } \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{a\cdot e}\begin{cases} <1 \Leftrightarrow a>\dfrac{1}{e} \Rightarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ konbergentea da.} \\ >1 \Leftrightarrow a<\dfrac{1}{e} \Rightarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ dibergentea da.} \\ =1 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{e} \Rightarrow & \text{Kasu zalantzakoa da.} \end{cases}$$

$$\text{Baldin, } a=\frac{1}{e} \quad\Rightarrow\quad a_n=\frac{n!\cdot e^n}{(n+1)^n}\overset{(1)}{\sim}\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^n}{(n+1)^n}=\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{(n+1)^n}\overset{(2)}{\sim}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e}\to\infty\neq 0$$

Beraz, ez da baldintza beharrezkoa egiaztatzen, orduan $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

(1) Stirling.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$

15.- Izan bedi $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\cdot a_n \quad \forall n\geq 1\end{cases}$

a) Kalkulatu $\lim_{n\to\infty}a_n$

b) Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **seriearen izaera**

(2 puntu)

a)

$$\forall n\geq 1 \quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdot a_n \quad\Rightarrow\begin{cases} a_2=\dfrac{1}{2}\cdot a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_3=\dfrac{2}{3}\cdot a_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3} \\ a_4=\dfrac{3}{4}\cdot a_3=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4} \\ \quad\vdots \\ a_n=\dfrac{1}{n}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ dibergentea da.

16.- Arrazoitu ea hurrengo baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:

a) Baldin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ edonolako gai errealen seriea bada eta $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, orduan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

b) Edonolako gaien serie bat konbergentea baina ez absolutuki konbergentea izan daiteke.

c) Serie baten gaiak berrordenatzen badira bere batura ez da aldatzen.

d) Baldin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jarraitua bada $x = x_0$ puntuan, orduan f deribagarria da puntu horretan.

e) Izan bedi $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funtzio diferentziagarria (a,b) puntuan. Orduan f konstante mantenduko da puntu horretatik igarotzen den maila-kurbaren ukitzailearen norabidean.

f) Funtzio deribagarriak diferentzagarriak dira

a) Faltsua. Baldin $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ez da konbergentea izango, baina edonolako gai errealen seriea denez, oszilatzailea izan daiteke. Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

b) Egiazkoa. Serie hauei baldintzaz konbergenteak direla esaten zaie. Adibidea: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

c) Faltsua. Baldin gai ez-negatiboen seriea balitz egiazkoa litzateke. Baina edonolako gai errealen seriea badugu eta baldintzaz konbergentea bada (konbergentea baina ez absolutuki) orduan gaiak berrordenatzean batura aldatuko da.

d) Faltsua. Adibidea: $f(x) = |x|$ jarraitua da $x = 0$ puntuan baina ez da deribagarria puntu horretan.

e) Egiazkoa. Baldin f diferentziagarria bada eta maila-kurbaren norabidea jarraituz mugitzen bada, orduan bere deribatu direkzionala nulua da, hau da, f ez da aldatzen.

f) Faltsua. Baldin f aldagai bateko funtzioa bada, orduan f deribagarria da $\Leftrightarrow$ f diferentziagarria da. Baina f bi aldagaikoa balitz, f diferentziagarria bada $\Rightarrow$ f deribagarria da, baina elkarrekikoa ez da egiazkoa: f deribagarria $\not\Rightarrow$ f diferentziagarria.

17.- Izan bedi $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]$**.**

a) Arrazoitu ea serie alternatua den.
b) Estudiatu seriearen izaera.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]=\frac{2}{1^2+1}+\frac{0}{2^2-1}+\frac{2}{3^2+1}+\frac{0}{4^2-1}+\frac{2}{5^2+1}+\frac{0}{6^2-1}+\ldots=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Eta $a_n=\frac{2}{(2n-1)^2+1}>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Beraz ez da serie alternatua, gai ez-negatiboen seriea baizik.

b) Konparaziozko irizpidea erabiliz:

$$a_n=\frac{2}{(2n-1)^2+1}\sim\frac{2}{(2n-1)^2}\sim\frac{2}{(2n)^2}=\frac{1}{4n^2}$$

Eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konbergentea da. Orduan $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2+(-1)^{n+1}}\right]$ konbergentea da.

18.- Ikasle batek dio $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots$ **seriea konbergentea dela, bere gaiak txikiak eta zerora azkar hurbiltzen baitira. Arrazoia du mutilak? Arrazoibidea azaldu.**

Mutilak ez du arrazoia eta azalpena bi eratan eman daiteke:

a) $\frac{1}{10000}+\frac{1}{10001}+\frac{1}{10002}+\ldots+\frac{1}{10000+n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ non $a_n=\frac{1}{10000+n}\geq 0 \quad \forall n$.

$a_n=\frac{1}{10000+n}\sim\frac{1}{n}$ eta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da, beraz $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

b) $\dfrac{1}{10000}+\dfrac{1}{10001}+\dfrac{1}{10002}+\ldots+\dfrac{1}{10000+n}+\ldots=\sum_{n=10000}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Hau da, emandako seriea serie harmonikotik lehenengo 9999 gaiak (batugai kopuru finitua alegia) kentzean sortutakoa da. Beraz, bere izaera ez da aldatzen. Hortaz, dibergentea da.

19.- a) Kalkulatu $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\quad \forall a>0$**.**

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ **seriearen izaera,** $\forall a>0$, $a\neq\dfrac{1}{e}$

a) $$\lim_{n\to\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=a^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}=a^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}\overset{(*)}{=}a^{\infty}=\begin{cases}\infty & \forall a>1\\ 1 & \text{baldin } a=1\\ 0 & \forall a/\ 0<a<1\end{cases}$$

(*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ dibergentea da $\Rightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=\infty$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ non $a_n=a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}>0\quad\forall n.$

$\boxed{\forall a\geq 1}$, aurreko atalean ikusi dugunez, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$. Hau da, konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da egiaztatzen, beraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

$\boxed{\forall a<1}$, D´Alembert-en irizpidea aplikatuko dugu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n+1}}=a^0=1\quad\Rightarrow\quad\text{kasu zalantzakoa.}$$

Raabe-Duhamel-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-a^{\frac{1}{n+1}}\right)\sim-\lim_{n\to\infty}n\cdot\mathrm{L}\left(a^{\frac{1}{n+1}}\right)=-\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n+1}\mathrm{L}a=-\mathrm{L}a=\mathrm{L}\left(\frac{1}{a}\right)$$

Beraz:

$$
\mathrm{L}\left(\frac{1}{a}\right)\begin{cases} >1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > e \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{e} \Rightarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da.} \\ <1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < e \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{e} \Rightarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da.} \\ =1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = e \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{e} \Rightarrow & \text{Kasu zalantzakoa. Enuntziatuaren arabera,} \\ & \text{kasu hau ez dugu aztertu behar.} \end{cases}
$$

20.- a) Aztertu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^n$ **seriearen izaera** $\forall a>0$**.**

b) Kalkulatu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ **non** $a>0$**.**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n=\left(\dfrac{an+1}{n}\right)^n \geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ eta $\forall a>0$.

Cauchy-ren irizpidea erabiliz:

$$
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{n}=a\begin{cases} <1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konbergentea da} \\ >1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ =1 \Rightarrow \text{kasu zalantzakoa} \Rightarrow a_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow \end{cases}
$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0 \Rightarrow$ Baldintza beharrezkoa ez da betetzen $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

b)
$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}\overset{(*)}{=}\begin{cases}\dfrac{S\in\mathbb{R}^+}{\infty}=0 & \forall a<1 \\ \dfrac{\infty}{\infty} & \forall a\geq 1 \overset{(**)}{\Rightarrow}\end{cases}
$$

$$
\overset{(**)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a+1}{1}+\left(\frac{2a+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{an+1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}=\begin{cases}\dfrac{a^{\infty}}{0}=\dfrac{\infty}{0}=\infty & \forall a>1 \\ \dfrac{e}{0}=\infty & \text{baldin } a=1\end{cases}
$$

(*) a) atalean frogatu dugunez:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^{n}\begin{cases}\text{konbergente da } \forall a<1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^{n}=S\in\mathbb{R}\\ \text{dibergente da } \forall a\geq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an+1}{n}\right)^{n}=\infty\end{cases}$$

(**) $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$ hertsiki gorakorra eta dibergentea da beraz, Stolz erabil daiteke.

21.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n}}-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^{2}}\right)\right]$ seriearen izaera.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n}}-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^{2}}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n-b_n\right]$$

non $a_n=\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n}}\geq 0$ eta $b_n=\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^{2}}\right)\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{21}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \Rightarrow$ serie geometrikoa da.

  Arrazoia $r=\frac{2}{3}<1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konbergentea da.

- $b_n=\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^{2}}\right)\sim\frac{1}{7n^{2}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergentea da.

Orduan:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{n-1}}{3^{n}}-\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{7n^{2}}\right)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n-b_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n \text{ konbergentea da.}$$

22.- Estudiatu hurrengo zenbaki-seriearen izaera:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n\cdot(2n-1)\cdot n!}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ non $a_n=\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n(2n-1)n!}>0\quad\forall n\in\mathbb{N}$. D'Alembert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2^{n+1}(2n+1)(n+1)!}}{\dfrac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n(2n-1)n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n-1)}{2(2n+1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n-3}{4n^2+6n+2}=1$$

Kasu zalantzakoa. Orain Raabe-Duhamel-en irizpidea aplikatuz:

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{4n^2+4n-3}{4n^2+6n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{2}<1$$

Beraz, serie dibergentea dugu.

23.- $\{a_n\}$ gai ez-negatiboen segida dela eta $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$ jakinda:

a) Kalkulatu hurrengo segidaren limitea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{a_n}$$

b) Aztertu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ zenbaki-seriearen izaera.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}{2}\overset{(1)}{=}\frac{\infty}{2}=\infty$$

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ dibergentea da.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2\neq0\Rightarrow$ Konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da egiaztatzen, eta $a_n\geq0\ \ \forall n\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ dibergentea da.

24.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}$ zenbaki-seriearen izaera.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n > 0 \ \ \forall n \Rightarrow$ D´Alembert erabil daiteke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1)!}{(n+2)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = 1^{\infty} = l \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ll = \lim_{n\to\infty} (n+1) \mathrm{L} \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \sim \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(\frac{n+1}{n+2} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{n+1-n-2}{n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-(n+1)}{n+2} = -1 \Leftrightarrow l = e^{-1} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} \text{ konbergentea da.}$$

25.- Izan bedi $a_n = n^a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$ gai orokorra duen seriea, non $a \in \mathbb{R}$.

a) *a* parametroaren zein baliotarako egiaztatzen da konbergentzi baldintza beharrezkoa?

b) *a* parametroaren zein baliotarako aurreko seriea konbergentea da?

c) $a = \frac{1}{2}$ baliorako, aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ seriearen izaera.

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1-a}} = \begin{cases} 0 & \text{baldin } a < 1 \\ 1 & \text{baldin } a = 1 \\ \infty & \text{baldin } a > 1 \end{cases}$$

Beraz, konbergentzi baldintza beharrezkoa betetzen da $\Leftrightarrow a < 1$

b) $\forall a \geq 1$ konbergentzi baldintza beharrezkoa ez da betetzen eta $a_n \geq 0 \quad \forall n \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da.

$\forall a < 1$ konparaziozko irizpidea aplikatuko dugu:

$$a_n \sim \frac{1}{n^{1-a}} \quad \text{eta} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-a}} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea da } 1-a > 1 \Leftrightarrow a < 0 \\ \text{dibergentea da } 1-a \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 0 \end{array} \right.$$

Beraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konbergentea da $\Leftrightarrow a < 0$

c) Baldin $a = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ ez da absolutuki konbergentea.

Hala ere, alternatua denez, Leibniz-en irizpidea aplikatuko diogu:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eta ii) $a_n = \frac{1}{n^{1/2}} > a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1/2}} \quad \forall n$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ baldintzaz konbergentea da.