ADIERAZPIDE GRAFIKOA

1.- $f(x) = \dfrac{\mathrm{L}|x|}{x^2}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu *f*-ren asintotak.
b) Estudiatu funtzioaren gorakortasuna, beherakortasuna eta mutur erlatiboak.
c) Aztertu *f*-ren ahurtasuna, konbexutasuna eta kalkulatu inflexio-puntuak.
d) Egin funtzioaren irudikapen grafiko hurbildua.

a) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ eta $f(x) = \dfrac{\mathrm{L}|x|}{x^2} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}(x)}{x^2} & \forall x > 0 \\ \dfrac{\mathrm{L}(-x)}{x^2} & \forall x < 0 \end{cases}$.

$f(-x) = f(x)$, beraz OY ardatzarekiko simetrikoa da.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad x = 0$ asintota bertikala da.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ asintota horizontala da. Eta ez dago asintota zeiharrik.

b) Funtzioa simetrikoa dela eta, ikasketa $(0, \infty)$ tartean besterik ez dugu egingo.

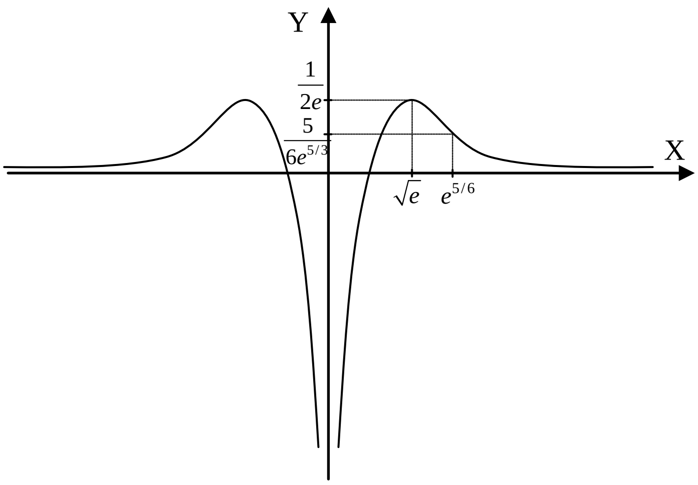
$\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{1 - 2 \cdot \mathrm{L}x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = e^{1/2}$ $\quad \begin{cases} \forall x \in \left(0, e^{1/2}\right) & f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ gorakorra da} \\ \forall x \in \left(e^{1/2}, \infty\right) & f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ beherakorra da} \end{cases}$

Beraz, $\left(e^{1/2}, \dfrac{1}{2e}\right)$ maximo erlatiboa da.

c) $\forall x > 0 \quad f''(x) = \dfrac{-5 + 6 \cdot \mathrm{L}x}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = e^{5/6}$ $\quad \begin{cases} \forall x \in \left(0, e^{5/6}\right) & f''(x) > 0 \Rightarrow f \ \cup \\ \forall x \in \left(e^{5/6}, \infty\right) & f''(x) < 0 \Rightarrow f \ \cap \end{cases}$

Beraz, $\left(e^{5/6}, \dfrac{5}{6e^{5/3}}\right)$ inflexio-puntua da.

d)



2.- $y = f(x)$ **kurbak** $y = \frac{1}{2}x + 1$ **asintota zeiharra dauka (** $x > 0$ **). Kalkulatu** $y = \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right]^x$ **(** $x > 0$ **) kurbaren asintota horizontala.**

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ asintota zeiharra } \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} & (1) \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = 1 & (2) \end{cases} \text{. Orduan:}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right]^x \overset{(1)}{=} 1^\infty = A \Leftrightarrow \mathrm{L}A = \lim_{x\to\infty} x \cdot \mathrm{L}\left[\frac{2 \cdot f(x)}{x}\right] \sim \lim_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{2 \cdot f(x)}{x} - 1\right] = \lim_{x\to\infty} \left[2 \cdot f(x) - x\right]$$

$$= 2 \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \frac{x}{2} \right] \overset{(2)}{=} 2 \Leftrightarrow A = e^2 \Rightarrow y = e^2 \text{ asintota horizontala da.}$$

3.- $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ **funtzioa emanik.**

a) Kalkulatu bere definizio-eremua eta asintotak. Estudiatu bere simetria, gorapena eta irudikatu gutxi gorabehera.
b) Planteatu beharrezkoa den integrala, funtzio horrek adierazitako kurbak, bere asintotek eta OX ardatzak mugatzen duten eskualdearen azalera lortzeko. Ondorioztatu, integrala kalkulatu barik, azalera hori finitua izango ote den.

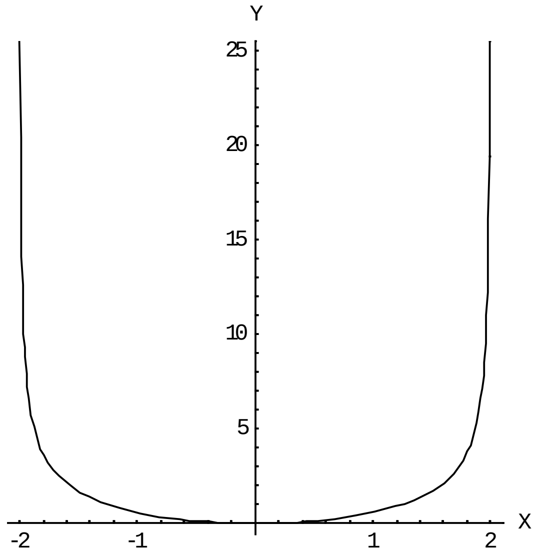
a) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,4-x^2>0\right\}=(-2,2)$.
Asintotak:
Ezin dira egon asintota horizontalik zein zeiharrik $D=(-2,2)$ tarte finitua baita.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty \Rightarrow x=2$ asintota bertikala da.
$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\infty \Rightarrow x=-2$ asintota bertikala da.
Simetriak:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=f(x) \;\Rightarrow\; \text{OY ardatzarekiko simetrikoa da.}$$

Gorapena:

$$f'(x)=\frac{x\left(8-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{2}\notin D \end{cases}$$

$\forall x\in(-2,0)\quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow f$ beherakorra da.
$\forall x\in(0,2)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow f$ gorakorra da
Beraz (0,0) puntuan minimoa dago.
Adierazpide grafikoa:



b) Azalera simetrikoa da OY ardatzarekiko, beraz,:

$$\text{Azalera}=2\int_0^2 f(x)dx=2\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Integral inpropioa dugu, $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in\left[0,2\right)$, $x=2$ puntu singularra delarik.

Konparaziozko irizpidean erabiliko dugun integral eredua:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^m} \left\langle \begin{array}{l} \text{konbergentea } \forall m<1 \\ \text{dibergentea } \forall m \geq 1 \end{array} \right.$$

Orduan:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(2-x)^m}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2\cdot(2-x)^m}{\sqrt{4-x^2}} = 4\lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^m}{\sqrt{(2-x)(2+x)}} = 2\lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)^m}{\sqrt{2-x}} \underset{\left(m=\frac{1}{2}<1\right)}{=} 2 \in (0,\infty)$$

Beraz, integral inpropio konbergentea dugu eta, hortaz, bere balioa (azalera hain zuzen) finitua izango da.

4.- $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu bere asintotak.
c) Zehaztu ebaki-puntuak koordenatu-ardatzekin.
d) Estudiatu bere gorakortasuna-beherakortasuna.
e) Aztertu bere ahurtasuna-ganbiltasuna.
f) Aurreko ataletan lortutako informazioa erabiliz, irudikatu, gutxi gorabehera, funtzioaren grafikoa.

a) $D=\mathbb{R}-\{-1\}$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=e^{\frac{-1}{0^-}}=e^{\infty}=\infty \Rightarrow x=1$ asintota bertikala da (ezkerretik)

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=e^{\frac{-1}{0^+}}=e^{-\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=e^1=e \Rightarrow y=e$ asintota horizontala da $\Rightarrow$ Ez dago asintota zehiarrik.

c) $f(x)=e^{\frac{x}{x+1}}>0 \quad \forall x\in D \Rightarrow$ Ez du OX ardatza ebakitzen.

Baldin $x=0 \Rightarrow f(0)=e^0=1 \Rightarrow$ OY ardatza (0,1) puntuan ebakitzen du.

d) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{x}{x+1}}>0 \quad \forall x\in D \Rightarrow f$ gorakorra da $\forall x\in D$

e) $f''(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^3}e^{\frac{x}{x+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}=\dfrac{1}{(x+1)^3}e^{\frac{x}{x+1}}\cdot\left[-2+\dfrac{1}{x+1}\right]=-\dfrac{(2x+1)}{(x+1)^4}e^{\frac{x}{x+1}}=0 \Leftrightarrow$

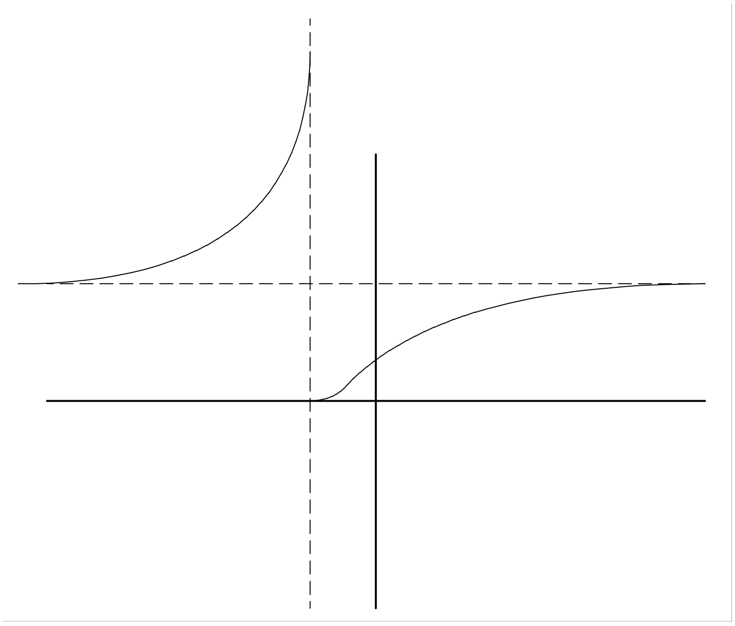
$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

$\forall x\in(-\infty,-1) \quad f''(x)>0 \Rightarrow f$ ahurra da (gorantz ahurra)

$\forall x \in (-1, -1/2)$ $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ahurra da (gorantz ahurra)

$\forall x \in (-1/2, \infty)$ $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ganbila da (beherantz ahurra)

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{e} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{e}\right)$ inflexio-puntua da.



5.- $f(x)=\dfrac{e^x}{2x}$ **funtzioa emanik:**

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu asintotak.
c) Aztertu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

a) $D=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ asintota bertikala da $x\to\pm\infty$ jotzean.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ eta $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$ asintota horizontala da $x\to-\infty$ jotzean.

Beraz, ezin da asintota zeiharra egon $x\to-\infty$ jotzean, baina egon daiteke $x\to\infty$ doanean: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty \quad \Rightarrow \quad \nexists$asintota zeiharra .

c) $\forall x\neq 0, \quad f'(x)=\dfrac{2x\cdot e^x-2\cdot e^x}{4x^2}=\dfrac{(x-1)\cdot e^x}{2x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

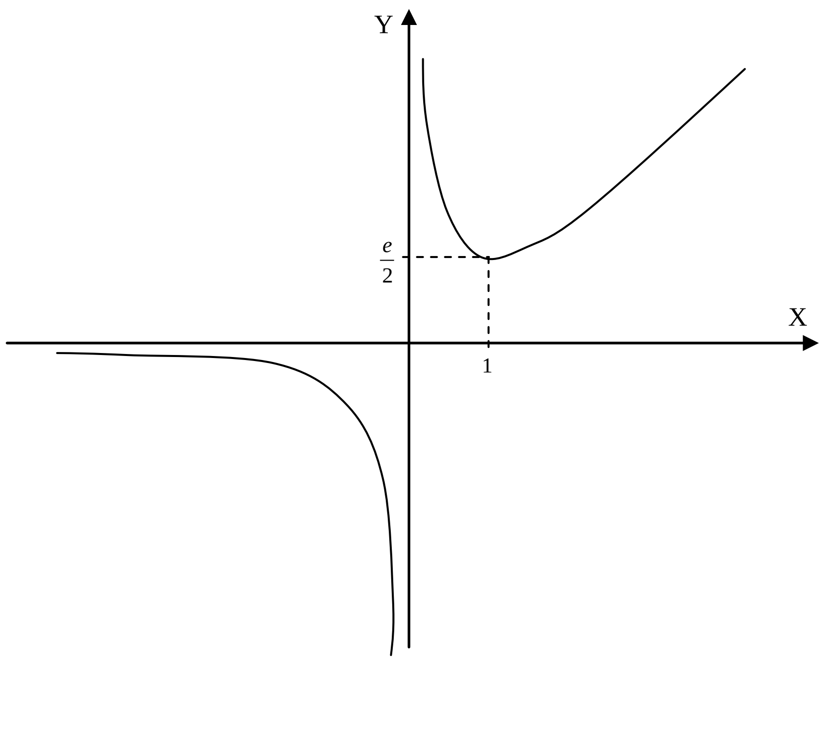
$\forall x\in(-\infty,0), \quad f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ beherakorra da

$\forall x\in(0,1), \quad f'(x)<0 \quad \Rightarrow \quad f$ beherakorra da

$\forall x\in(1,\infty), \quad f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad f$ gorakorra da

Orduan, $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$ puntuan minimo erlatiboa dago.

d)



6.- $f(x)=\dfrac{x}{|\mathrm{L}x|}$ **funtzioa emanik,**

a) Aurkitu bere definizio-eremua.
b) Kalkulatu bere asintotak.
c) Aztertu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

a) $D=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0, x\neq 1\}=(0,1)\bigcup(1,\infty)$. $f(x)=\dfrac{x}{|\mathrm{L}x|}=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{L}x} & \forall x\in(1,\infty)\\ -\dfrac{x}{\mathrm{L}x} & \forall x\in(0,1)\end{cases}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{0}{\infty}=0 \quad\Rightarrow$ Eten gaindigarria dago. Beraz, $x=0$ ez da asintota bertikala.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1$ asintota bertikala da.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}\overset{(\mathrm{L}x\ll x)}{=}\infty \quad\Rightarrow$ ez dago asintota horizontalik.

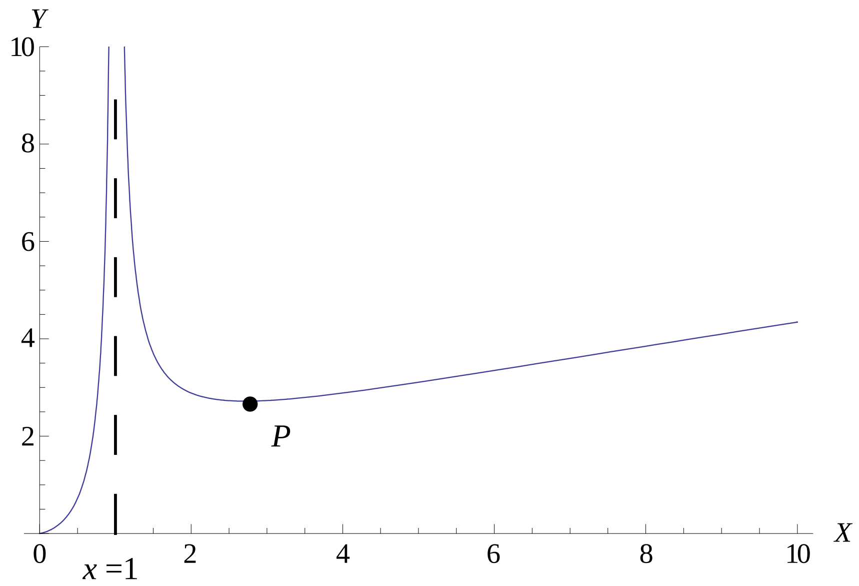
$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\mathrm{L}x}=\dfrac{1}{\infty}=0 \quad\Rightarrow$ ez dago asintota zeiharrik.

c) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{L}x-1}{(\mathrm{L}x)^2} & \forall x\in(1,\infty)\\ \dfrac{1-\mathrm{L}x}{(\mathrm{L}x)^2} & \forall x\in(0,1)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{L}x=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=e$

$\forall x\in(0,1) \quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f$ gorakorra da

$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(1,e) \quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ beherakorra da}\\ \forall x\in(e,\infty) \quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ gorakorra da}\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad P=(e,e)$ minimo erlatiboa da.

d)



7.- $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ **funtzioa emanik, honako hau eskatzen da:**

a) Aurkitu definizio-eremua.
b) Kalkulatu asintotak.
c) Estudiatu gorakortasuna-beherakortasuna.
d) Irudikatu gutxi gorabehera.

a) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x-1\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\left\{0\right\}$

b) Asintota bertikalak:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=0 \text{ asintota bertikala da.}$$

Asintota horizontalak:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\Rightarrow y=1 \text{ asintota horizontala da.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1}=\frac{2}{-1}=-2\Rightarrow y=-2 \text{ asintota horizontala da.}$$

Eta ez dago asintota zeiharrik.

c) $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-3e^x}{(e^x-1)^2}<0 \quad \forall x\in D \Leftrightarrow f$ beherakorra da $\forall x\in D$

d)