ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN LIMITEAK

1.- Adierazi arrazoituz honako baieztapenak egiazkoak edo gezurrak diren, $\alpha > 0$ eta $b > 1$ direla kontuan hartuta:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^\alpha} = \infty$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}x}{x^\alpha} = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b^{1/x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \infty$

a) $x^\alpha \ll b^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{b^x}{x^\alpha} = \infty \quad \Rightarrow$ Zuzena da.

b) $\dfrac{1}{x} = t \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{b^{1/x}}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{b^t}{t^\alpha} = \infty \quad \Rightarrow$ Zuzena da.

c) $\mathrm{L}x \ll x^\alpha \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}x}{x^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$ Ez da zuzena

d) $\dfrac{1}{x} = t \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{L}t}{t^\alpha} = 0 \quad \Rightarrow$ Ez da zuzena.

2.- Kalkulatu $b \in \mathbb{R}$ hurrengo berdintza egia izan dadin:

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}}$$

Limite biak kalkulatuko ditugu:

- $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \overset{(1)}{=} 1^{\pm\infty} = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \cdot \mathrm{L}x \sim \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} \cdot (x-1) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad A = e^{-1}$

- Baldin $b = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^0 = 1$

  $\forall b \neq 0 \quad \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{b}{x^2}} \overset{(2)}{=} 1^{\pm\infty} = B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x^2} \cdot \mathrm{L}(\cos x) \sim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x^2} \cdot (\cos x - 1) \sim$

  $\sim \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b}{x^2} \cdot \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = -\dfrac{b}{2} \quad \Leftrightarrow \quad B = e^{-\frac{b}{2}}$

Beraz, $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{b}{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad b=2$

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{-\infty}$ eta $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^{\infty}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{b}{x^2}} = \begin{cases} 1^{\infty} & \forall b>0 \\ 1^{-\infty} & \forall b<0 \end{cases}$

3.- a) Kalkulatu hurrengo segidaren limitea:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2}$$

b) Kalkulatu hurrengo funtzioen limiteak:

b.1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}$

b.2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

a) 1. Metodoa:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2} \underset{\substack{\uparrow \\ Stolz}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{[4+9+14+...+(5n-6)+(5n-1)]-[4+9+14+...+(5n-6)]}{n^2-(n-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n-1} = \frac{5}{2}$$

2. Metodoa: zenbakitzailea progresio aritmetikoaren lehenengo n gaien batura da:

$$4+9+14+\ldots+(5n-1) = S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{4+(5n-1)}{2}\cdot n = \frac{5n^2+3n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{4+9+14+\ldots+(5n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{2n^2} = \frac{5}{2}$$

b.1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}} = 1^{\infty} = l \Leftrightarrow \mathrm{L}l = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{\sin^2 x}\cdot \mathrm{L}(1-x) \sim \lim\limits_{x\to 0}\frac{-3x}{x^2} = -3\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \pm\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{\sin^2 x}}$$

b.2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = -\infty$

4.- Kalkulatu hurrengo limiteak:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}$, $a>0$ izanik

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=1^{\infty}=l\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}l=\lim_{x\to\infty}x\cdot\mathrm{L}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\sim\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)-1}{1/x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1\Leftrightarrow l=e^1=e$$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}=\left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}$

Kontuan izanik: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\sim\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{2ax}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}}{2a}=\frac{1}{a}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2a\sin x}\right)^{1/x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\infty}=\begin{cases}\infty & \text{baldin } a<1\\ 0 & \text{baldin } a>1\\ 1^{\infty} & \text{baldin } a=1\end{cases}$$

Beraz, baldin $a=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}\right)^{1/x}=l\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{L}l=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\mathrm{L}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}\right)\sim\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin x}-1\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{2\sin x}\right)\sim$$

$$\sim\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{2x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{4x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l=e^0=1$$