FUNTZIO INPLIZITUAK

1.- a) Estudiatu $x^2+x^y+z+\sin z-2=0$ ekuazioak $P(x,y,z)=(1,1,0)$ puntuaren ingurune batean $z=z(x,y)$ funtzioa definitzen ote duen.

b) Aurkitu $z=z(x,y)$ funtzio horren deribatu direkzionala (1,1) puntuan $\vec{u}=(2,2)$ bektorearen norabidean.

a) $F(x,y,z)=x^2+x^y+z+\sin z-2=0$ ekuazioari funtzio inplizituaren teorema aplikatzen zaio:

i) $F(P)=1+1+0+0-2=0$

ii) F-ren deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira P puntuaren ingurune batean non $x>0$:

$F'_x=2x+y\cdot x^{y-1}\qquad F'_y=x^y\cdot \mathrm{L}x\qquad F'_z=1+\cos z$

iii) $F'_z(P)=1+\cos 0=2\neq 0$

Orduan, P puntuaren ingurune batean non $x>0$, $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(1,1)=0$.

b) $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}\overset{(*)}{=}z'_x(1,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+z'_y(1,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(*) $\vec{u}=(2,2)$ unitario bihurtu beharra dago: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Hasierako ekuazioan x-rekiko eta y-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$3+2\cdot z'_x(1,1)=0\quad\Leftrightarrow\quad z'_x(1,1)=-\dfrac{3}{2}$

$2\cdot z'_y(1,1)=0\quad\Leftrightarrow\quad z'_y(1,1)=0$

Beraz, $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2.- $\begin{cases}F(x,y,u,v)=ux^3+vy^3-1=0\\ G(x,y,u,v)=ye^x-2uv^3-1=0\end{cases}$ **sistema eta $P(0,1,A,B)$ puntua emanik, honako hau eskatzen da:**

a) Aurkitu *A* eta *B* konstanteen balioak, aurreko sistemak *x* eta *y* aldagaiko *u* eta *v* funtzio inplizituak defini ditzan *P* puntuaren ingurune batean, $u=u(x,y)$ eta $v=v(x,y)$ alegia.

b) Kalkulatu (0,1) puntuan, *u* eta *v* funtzioen aldakuntza maximoaren norabideek osaturiko angeluak OX^+ ardatzarekin. Puntu horretan zeinek izan du aldakuntza handiagoa, *u* edo *v* funtzioak?

a) i) $\begin{cases}F(0,1,A,B)=B-1=0\Leftrightarrow B=1\\ G(0,1,A,B)=1-2AB^3-1=0\Leftrightarrow A\cdot B=0\end{cases}\Rightarrow A=0$

ii)

$\begin{matrix}F'_x=3ux^2 & F'_y=3vy^2 & F'_u=x^3 & F'_v=y^3\\ G'_x=ye^x & G'_y=e^x & G'_u=-2v^3 & G'_v=-6uv^2\end{matrix}$ jarraituak $\mathbb{R}^4$ osoan.

iii) $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Beraz, $\exists \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak (0,1) puntuaren ingurunean eta $\begin{cases} u(0,1) = 0 \\ v(0,1) = 1 \end{cases}$ izanik.

b) Kalkulatu behar ditugu u eta v funtzioen gradienteek osaturiko angeluak OX^+ ardatzarekin (α). Horretarako, emandako sisteman x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 3ux^2 + x^3 \cdot u'_x + y^3 \cdot v'_x = 0 \\ ye^x - 2v^3 \cdot u'_x - 6uv^2 \cdot v'_x = 0 \end{cases}$$

eta P(0,1,01) puntuan ordezkatuz:^

$$\begin{cases} v'_x(0,1) = 0 \\ 1 - 2 \cdot u'_x(0,1) = 0 \Leftrightarrow u'_x(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Era berean, y aldagaiarekin:

$$\begin{cases} 3vy^2 + x^3 \cdot u'_y + y^3 \cdot v'_y = 0 \\ e^x - 2v^3 \cdot u'_y - 6uv^2 \cdot v'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + v'_y(0,1) = 0 \\ 1 - 2 \cdot u'_y(0,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v'_y(0,1) = -3 \\ u'_y(0,1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Beraz,

$$\overrightarrow{\nabla u}(0,1) = \frac{1}{2} \cdot \vec{i} + \frac{1}{2} \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \qquad \text{eta} \qquad \overrightarrow{\nabla v}(0,1) = -3 \cdot \vec{j} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

Funtzio hauen aldakuntza, berriz, euren gradienteen moduluek adierazten digute:

$$\left|\overrightarrow{\nabla u}(0,1)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left|\overrightarrow{\nabla v}(0,1)\right| = 3$$

Hortaz, v-ren aldakuntza u-rena baino handiagoa izan da.

3.- a) Estudiatu ea $F(x,y,z) = 2z + xyz^2 - xy - x^2 - y^2 + 2 = 0$ ekuazioak $z = z(x,y)$ funtzioa definitzen duen $P(x,y,z) = (0,0,-1)$ puntuaren ingurune batean.
b) Aztertu $z = z(x,y)$ funtzioak muturrik ote duen $Q(x,y) = (0,0)$ puntuan eta baiezko kasuan sailkatu.

a) i) $F(P) = -2 + 2 = 0$

ii) $F'_x = yz^2 - y - 2x$

$F'_y = xz^2 - x - 2y$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$

$F'_z = 2 + 2xyz$

iii) $F'_z(P) = 2 \neq 0$

Orduan, $\exists z = z(x,y)$ diferentziagarria $P(x,y,z) = (0,0,-1)$ puntuaren ingurune batean eta $z(0,0) = 1$.

b) $Q(x,y) = (0,0)$ puntuan muturra izateko baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} z'_x(0,0)=0 & \Leftrightarrow \quad F'_x(P)=0 \\ z'_y(0,0)=0 & \Leftrightarrow \quad F'_y(P)=0 \end{cases} \quad \text{Egiaztatzen da.}$$

Muturra sailkatzeko bigarren diferentzialaren zeinua aztertuko dugu:

$$d^2z(0,0)=-\frac{1}{F'_z(P)}\cdot\left(F''_{x^2}(P)(dx)^2+F''_{xy}(P)dxdy+F''_{y^2}(P)(dy)^2\right)$$

$$F''_{x^2}=-2\,,\quad F''_{xy}=z^2-1\Rightarrow F''_{xy}(P)=0\,,\quad F''_{y^2}=-2$$

$$\Rightarrow\quad d^2z(0,0)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-2(dx)^2-2(dy)^2\right)>0\quad\Rightarrow\ \text{minimoa da.}$$

4.- Honako ekuazio-sistema hau emanik

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v)=x-u-v=0 \\ G(x,y,z,u,v)=y-u^2-v^2=0 \\ H(x,y,z,u,v)=z-u^3-v^3=0 \end{cases}$$

aurkitu $p(x_0,y_0,z_0,u_0,v_0)\in\mathbb{R}^5$ **puntua non hurrengoa egiaztatzen den:**

- **i)** ***P* puntuaren ingurune batean sistema horrek 3 funtzio diferentziagarri inplizituki definitzen ditu,** $z=z(x,y)\quad u=u(x,y)\quad v=v(x,y)$ **.**
- **ii)** ***z*-ren deribatua** (x_0,y_0) **puntuan maximoa da (1,0) bektorearen norabidean eta bere balioa 3 da.**

i) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuuz:

$$\begin{cases} x_0-u_0-v_0=0 \\ y_0-u_0^2-v_0^2=0 \\ z_0-u_0^3-v_0^3=0 \end{cases}$$

F, *G* eta *H* funtzioen lehenengo deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^5$ osoan

$$\left.\frac{D(F,G,H)}{D(z,u,v)}\right|_P=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2u_0 & -2v_0 \\ 1 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix}=2v_0-2u_0\neq 0\Leftrightarrow u_0\neq v_0$$

ii) $\vec{\nabla}z(x_0,y_0)=3\vec{i}\Rightarrow z'_x(x_0,y_0)=3$ eta $z'_x(x_0,y_0)=3$

Hasierako sisteman *x*-rekiko deribatuz eta *P* puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1-u'_x-v'_x=0 \\ -2u_0\cdot u'_x-2v_0\cdot v'_x=0 \\ z'_x-3u_0^2\cdot u'_x-3v_0^2\cdot v'_x=0 \end{cases}\quad\Rightarrow z'_x(x_0,y_0)=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2u_0 & -2v_0 \\ 0 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix}}{2v_0-2u_0}=-3u_0\cdot v_0=3\Leftrightarrow u_0\cdot v_0=-1$$

Era berean, *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} -u'_y - v'_y = 0 \\ 1 - 2u_0 \cdot u'_y - 2v_0 \cdot v'_y = 0 \\ z'_y - 3u_0^2 \cdot u'_y - 3v_0^2 \cdot v'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow z'_y(x_0, y_0) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2u_0 & -2v_0 \\ 0 & -3u_0^2 & -3v_0^2 \end{vmatrix}}{2v_0 - 2u_0} = \frac{3}{2}(u_0 + v_0) = 0 \Leftrightarrow u_0 + v_0 = 0$$

Guztira, ebatzi behar dugun sistemak 5 ekuazio eta 5 ezezagun ditu:

$$\begin{cases} x_0 - u_0 - v_0 = 0 & \Rightarrow x_0 = 0 \\ y_0 - u_0^2 - v_0^2 = 0 & \Rightarrow y_0 = 2 \\ z_0 - u_0^3 - v_0^3 = 0 & \Rightarrow z_0 = 0 \\ u_0 \cdot v_0 = -1 \Rightarrow v_0 = \frac{-1}{u_0} & \Rightarrow v_0 = \mp 1 \\ u_0 + v_0 = 0 \quad \Rightarrow u_0 - \frac{1}{u_0} = 0 \Rightarrow u_0 = \pm 1 & \end{cases}$$

Beraz, bi puntu atera zaizkigu: (0,2,0,1,-1) eta (0,2,0,-1,1).

5.- Izan bedi $F(x, y, z) = xy + z - f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - 1$, non $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ jarraitua deribatu partzial jarraituekin den, bera eta bere deribatu partzialak nuluak direlarik (0,0) puntuan.

a) Aztertu ea $F(x, y, z) = 0$ ekuazioak $z = z(x, y)$ funtzioa definitzen ote duen $P(x, y, z) = (0,0,1)$ puntuaren ingurune batean.

b) Kalkulatu $z'_x(0,0)$ eta $z'_y(0,0)$.

a) i) $F(P) = 1 - 1 = 0$

ii) $F'_x = y - \frac{1}{z} \cdot f'_u \quad$ non $u = \frac{x}{z}$

$F'_y = x - \frac{1}{z} \cdot f'_v \quad$ non $v = \frac{y}{z}$ jarraituak P-ren ingurunean non $z \neq 0$

$F'_z = 1 + \frac{x}{z^2} \cdot f'_u + \frac{y}{z^2} \cdot f'_v$

iii) $F'_z(P) = 1 \neq 0$

Orduan $\exists z = z(x, y)$ deribatu partzial jarraituekin (0,0) puntuaren ingurune batean, eta $z(0,0) = 1$

b) $z'_x(0,0) = -\frac{F'_x(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)} = 0$ eta $z'_y(0,0) = -\frac{F'_y(0,0,1)}{F'_z(0,0,1)} = 0$

6.- $x\cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{y}\right)-y\cdot z^2+1=0$ **ekuazioa emanik:**

a) **Egiaztatu** x **eta** y **aldagaiko** z **funtzio inplizitua,** $z=z(x,y)$**, definitzen duela** $P(x,y,z)=P(1,2,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) **Demagun** $z=z(x,y)$ **funtzioaren adierazpide grafikoak mendi baten gainazala adierazten duela, non** $z>0$**. Aurkitu,** ***P*** **puntuan, bide baten altueraren aldakuntzaren abiadura, bide horren proiekzioaren ekuazioa** $y=x^2+1$ **izanik.**

a) Izan bedi $F(x,y,z)=x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{y}\right)-y\cdot z^2+1=0$ ekuazioa.

i) $F(P)=0$

ii) $F'_x=\sin\left(\dfrac{\pi}{y}\right)$

$F'_y=-\dfrac{x\pi}{y^2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{y}\right)-z^2$, jarraituak dira P puntuaren ingurunean non $y\neq 0$.

$F'_z=-2yz$

iii) $F'_z(P)=-4\neq 0$

Beraz, $(1,2)$ puntuaren ingurune batean $\exists!\, z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(1,2)=1$.

b) Kalkulatu behar dugu $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_P=z'_x(P)\cdot h_1+z'_y(P)\cdot h_2$, non $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioak bidearen norabidea adierazten digun.

$y=x^2+1$ parabolaren malda: $y'=2x \quad\Rightarrow\quad y'(1)=2$

Beraz, bidearen norabide bektorea (bektore ukitzailea, alegia) $(1,2)$ izan daiteke eta unitario bihurtuz:

$$\vec{u}=(h_1,h_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Orduan, $F(x,y,z(x,y))=0$ ekuazioan *x*-rekiko deribatuz:

$$\sin\left(\frac{\pi}{y}\right)-2yz\cdot z'_x=0 \quad\to\quad z'_x(P)=\frac{1}{4}$$

Era berean, *y*-rekiko deribatuz:

$$-\frac{x\pi}{y^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{y}\right)-z^2-2yz\cdot z'_y=0 \quad\to\quad z'_y(P)=\frac{-1}{4}$$

Beraz, $\left.\dfrac{dz}{d\vec{u}}\right|_P=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$

7.- Izan bedi $F(x,y,z)=\int_0^{x+2y^2+z}\frac{z^2}{1+t^4}dt$ **diferentziagarria.**

a) Estudiatu ea $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua definitzen duen** $P(-1,0,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Egiaztatu ea $z=z(x,y)$ **funtzioak mutur erlatiboa duen (-1,0) puntuan.**

a) Froga dezagun $F(x,y,z)=0$ ekuazioak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duela:

i. $F(P)=\int_0^0\frac{dt}{1+t^4}=0$

ii. $F'_x(x,y,z)=\frac{z^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$

$F'_y(x,y,z)=\frac{4yz^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$, jarraituak *P*-ren ingurunean.

$F'_z(x,y,z)=\int_0^{x+2y^2+z}\frac{2z}{1+t^4}dt+\frac{z^2}{1+(x+2y^2+z)^4}$

iii. $F'_z(P)=\int_0^0\frac{2}{1+t^4}dt+\frac{1}{1+0}=1\neq 0$

Beraz, *P*-ren ingurunean $\exists! z=z(x,y)$ diferentziagarria non $z(-1,0)=1$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioak mutur erlatiboa edukitzeko (-1,0) puntuan baldintza beharrezkoa bete behar du:

$$\begin{cases} z'_x(-1,0)=-\dfrac{F'_x(P)}{F'_z(P)}=0 \\ z'_y(-1,0)=-\dfrac{F'_y(P)}{F'_z(P)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(P)=0 \\ F'_y(P)=0 \end{cases}$$

Eta $F'_x(P)=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$

Beraz, (-1,0) puntuan ez dago mutur erlatiborik.

8.- $\begin{cases} x^2 + \operatorname{tg} y + z^2 + \sin t = 2 \\ xt^2 + y^2 + \mathrm{L}\left(z^2\right) = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik,**

a) Estudiatu ea aurreko sistemak $z = z(x, y)$ eta $t = t(x, y)$ funtzio inplizituak definitzen dituen $P(x, y, z, t) = (1, 0, 1, 0)$ puntuaren ingurune batean.

b) Egiaztatu ea $z = z(x, y)$ funtzioak mutur erlatiboa duen (1,0) puntuan (ez sailkatu).

a) $\begin{cases} F(x, y, z, t) = x^2 + \operatorname{tg} y + z^2 + \sin t - 2 = 0 \\ G(x, y, z, t) = xt^2 + y^2 + \mathrm{L}\left(z^2\right) = 0 \end{cases}$ eta $P(x, y, z, t) = (1, 0, 1, 0)$ emanik:

i. $\begin{cases} F(P) = 1 + 1 - 2 = 0 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

ii. $\left.\begin{array}{llll} F'_x = 2x & F'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y} & F'_z = 2z & F'_t = \cos t \\ G'_x = t^2 & G'_y = 2y & G'_z = \dfrac{2}{z} & G'_t = 2xt \end{array}\right\}$ jarraituak P puntuaren ingurunean.

iii. $\left|\dfrac{D(F, G)}{D(z, t)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 2z & \cos t \\ \dfrac{2}{z} & 2xt \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurunean $z = z(x, y)$ eta $t = t(x, y)$ funtzio diferentziagarriak existitzen dira, non $z(1, 0) = 1$ eta $t(1, 0) = 0$.

b) $z = z(x, y)$ funtzioak mutur erlatiboa ote duen (1,0) puntuan aztertzeko, baldintza nahikoarekin hasiko gara. Horretarako, emandako sisteman x-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 2x + 2z \cdot z'_x + \cos t \cdot t'_x = 0 \\ t^2 + \dfrac{2}{z} \cdot z'_x + 2xt \cdot t'_x = 0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan ordezkatuz}} \begin{cases} 2 \cdot z'_x(1, 0) + t'_x(1, 0) = -2 \\ 2 \cdot z'_x(1, 0) = 0 \iff \boxed{z'_x(1, 0) = 0} \end{cases}$$

Era berean, y-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 y} + 2z \cdot z'_y + \cos t \cdot t'_y = 0 \\ 2y + \dfrac{2}{z} \cdot z'_y + 2xt \cdot t'_y = 0 \end{cases} \xRightarrow{P \text{ puntuan ordezkatuz}} \begin{cases} 2 \cdot z'_y(1, 0) + t'_y(1, 0) = -1 \\ 2 \cdot z'_y(1, 0) = 0 \iff \boxed{z'_y(1, 0) = 0} \end{cases}$$

Beraz, baldintza beharrezkoa egiaztatzen da. (1,0) puntuan mutur erlatiboa egon daiteke.

9.- $\begin{cases} 2x-y-u-v=0 \\ xu+yv-3=0 \end{cases}$ **sistema emanik,**

a) Eztabaidatu ea $P_0\left(x=1, y=0, u=3, v=-1\right)$ **puntuan sistema honek *x* eta *y* aldagaiko *u* eta *v* funtzio inplizituak definitzen dituen, hau da** $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$**.**

b) Aurkitu $u=u(x,y)$ **funtzioaren puntu kritikoak.**

a) $\begin{cases} F(x,y,u,v)=2x-y-u-v=0 \\ G(x,y,u,v)=xu+yv-3=0 \end{cases}$ eta $P_0\left(x=1, y=0, u=3, v=-1\right)$ emanik:

I. $\begin{cases} F(P)=2-3+1=0 \\ G(P)=3-3=0 \end{cases}$

II. Deribatu partzialak jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$\begin{array}{llll} F'_x=2 & F'_y=-1 & F'_u=-1 & F'_v=-1 \\ G'_x=u & G'_y=v & G'_u=x & G'_v=y \end{array}$$

III. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Beraz, $\exists! \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ non *u* eta *v* diferentziagarriak diren eta $u(1,0)=3$ eta $v(1,0)=-1$.

b) $u=u(x,y)$ funtzioaren puntu kritikoak kalkulatu behar ditugu, hau da, $\begin{cases} u'_x=0 \\ u'_y=0 \end{cases}$ sistemaren soluzioak:

Horretarako, $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$ sisteman *x*-rekiko eta *y*-rekiko deribatuko dugu.

x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} 2-u'_x-v'_x=0 \\ u+x\cdot u'_x+yv'_x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x+v'_x=2 \\ x\cdot u'_x+yv'_x=-u \end{cases} \Rightarrow u'_x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}} = \frac{2y+u}{y-x}$$

Eta *y*-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} -1-u'_y-v'_y=0 \\ v+x\cdot u'_y+yv'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y+v'_y=-1 \\ x\cdot u'_y+yv'_y=-v \end{cases} \Rightarrow u'_y\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -v & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}}=\frac{-y+v}{y-x}$$

Beraz, $\begin{cases} u'_x=0 \\ u'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+u=0 \\ -y+v=0 \end{cases}$ $(x+y\neq 0$ izanik$)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u=-2y \\ v=y \end{cases}$

Erlazio hauek hasierako sisteman ordezkatuz:

$$\left.\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))=2x-y+2y-y=2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=-2xy+y^2-3=0 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow y^2-3=0 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{3}$$

$u=u(x,y)$ funtzioaren puntu kritikoak $A=(0,\sqrt{3})$ eta $B=(0,-\sqrt{3})$ izango dira.

10.- $\begin{cases} F(x,y,t)=t^3+e^{x+t}+ay=0 \\ G(x,y,t)=t-bx-\sin(yt)=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik:**

a) **Estudiatu ea aurreko sistemak $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ funtzio inplizituak definitzen dituen $(x,y,t)=(0,-1,0)$ puntuaren ingurune batean.**

b) **Aztertu ea $h(t)=x(t)+y(t)+t$ funtzioak puntu kritikoa daukan $t=0$ puntuan.**

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,t)=t^3+e^{x+t}+ay=0 \\ G(x,y,t)=t-bx-\sin(yt)=0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,t)=(0,-1,0)$ puntuan:

i. $\begin{cases} F(P)=1-a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=1 \\ G(P)=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x=e^{x+t} & F'_y=a=1 & F'_t=3t^2+e^{x+t} \\ G'_x=-b & G'_y=-t\cos(yt) & G'_t=1-y\cos(yt) \end{cases}$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(x,y)}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_x(P) & F'_y(P) \\ G'_x(P) & G'_y(P) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a \\ -b & 0 \end{vmatrix}=ab=b\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\neq 0$

Beraz, baldin $a=1$ eta $b\neq 0$, $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ diferentziagarriak existitzen dira, non $x(0)=0$ eta $y(0)=-1$.

b) $h(t)=x(t)+y(t)+t$ funtzioak puntu kritikoa dauka $t=0$ puntuan $\Leftrightarrow h'(0)=x'(0)+y'(0)+1=0$.

Sisteman x-rekiko deribatuz eta $P(x,y,t)=(0,-1,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 3t^2+\left(x'+1\right)e^{x+t}+y'=0 \\ 1-bx'-\left(y'\cdot t+y\right)\cos(yt)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(0)+1+y'(0)=0 \\ 1-bx'(0)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x'(0)=\dfrac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow \quad y'(0)=-1-\frac{2}{b}$$

Orduan $h'(0)=x'(0)+y'(0)+1=\dfrac{2}{b}-1-\dfrac{2}{b}+1=0$

11.- $\begin{cases} x-y+5t-6=0 \\ 2t+x-2=0 \end{cases}$ **sistema emanik**

a) Azter ezazu funtzio inplizituaren teoremako baldintzak betetzen ote diren $P(x,y,t)=(2,-4,0)$ puntan, $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ funtzioak definitzeko.

b) Izan bedi $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ kurba. Kalkulatu kurba honen arku-luzera $A(x,y)=(2,-4)$ puntutik $B(x,y)=(0,-1)$ puntura.

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,t)=x-y+5t-6=0 \\ G(x,y,t)=2t+x-2=0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen:

iv. $\begin{cases} F(P)=2+4-6=0 \\ G(P)=2-2=0 \end{cases}$

v. $\begin{cases} F'_x=1 & F'_y=-1 & F'_t=5 \\ G'_x=1 & G'_y=0 & G'_t=2 \end{cases}$ jarraituak dira $\mathbb{R}^3$ osoan.

vi. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(x,y}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_x(P) & F'_y(P) \\ G'_x(P) & G'_y(P) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Beraz, $x=x(t)$ eta $y=y(t)$ diferentziagarriak existitzen dira, non $x(0)=2$ eta $y(0)=-4$

b) $A(x,y)=(2,-4) \quad\Leftrightarrow\quad t=0$ (emandako P puntuaren koordenatuak dira). Eta, era berean, $B(x,y)=(0,-1)$ puntua sisteman ordezkatuz, $B(x,y)=(0,-1) \quad\Leftrightarrow\quad t=1$.

Honela, $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ kurbaren arku-luzera $A(x,y) = (2,-4)$ puntutik $B(x,y) = (0,-1)$ puntura lerro-intergral honek ematen digu:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

Orain, sisteman t-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) + 5 = 0 \\ 2 + x'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'(t) = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad y'(t) = 3 \quad \Rightarrow \quad L = \int_0^1 \sqrt{13}dt = \sqrt{13}$$

12.- $F(x,y,z) = y^2 z + x(\mathrm{L}z - 1) - ex = 0$ **ekuazioa emanik,**

a) Frogatu *P*(1,-1,*e*) puntuaren ingurune batean aurreko ekuazioak *x* eta *y* aldagaiko *z* funtzio inplizitua definitzen duela.
b) Aurkitu (1,-1) puntuan norabidea zeinetan *z*-ren aldakuntza maximoa den.
c) Aurkitu (1,-1) puntuan norabidea zeinetan *z*-ren aldakuntza nulua den.
d) Aurkitu (1,-1) puntuan, puntu horretatik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa.

a) i) $F(P) = e + \mathrm{L}e - 1 - e = 0$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = \mathrm{L}z - 1 - e \\ \\ F'_y = 2yz \\ \\ F'_z = y^2 + \dfrac{x}{z} \end{array}\right\}$$ jarraituak dira P puntuaren ingurunean non $z > 0$.

iii) $F'_z(P) = 1 + \dfrac{1}{e} \neq 0$

Orduan $\exists z = z(x,y)$ diferentziagarria eta $z(1,-1) = e$ delarik.

b) z-ren aldakuntza maximoa da bere gradientearen norabidean. Hau da:

$$\vec{\nabla} z(1,-1) = \left(z'_x(1,-1), z'_y(1,-1)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} \quad \Rightarrow \quad z'_x(1,-1) = -\dfrac{-e}{1 + \frac{1}{e}} = \dfrac{e^2}{e+1} \\ \\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z} \quad \Rightarrow \quad z'_y(1,-1) = -\dfrac{-2e}{1 + \frac{1}{e}} = \dfrac{2e^2}{e+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\nabla} z(1,-1) = \left(\dfrac{e^2}{e+1}, \dfrac{2e^2}{e+1}\right).$$

Beraz, aldakuntza maximoa (1,2) norabidean izaten da.

c) z-ren aldakuntza minimoa da gradientearekiko norabide elkartzutan, hots, (2,-1).

d) Gradientea eta maila-kurba elkartzutak direnez, aurreko atalean lortutako norabidea izango da maila-kurbarena (bere zuzen ukitzailearena alegia):

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \\ z = e \end{cases} \equiv \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}(x+1) \\ z = e \end{cases}$$

13.- $\begin{cases} F(x,y,z,t) = x \cdot e^{z+t} + 2zt - 1 = 0 \\ G(x,y,z,t) = y \cdot e^{z-t} - \dfrac{z}{1+t} - 2x = 0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik,**

a) Frogatu aurreko sistemak $z = z(x,y)$ **eta** $t = t(x,y)$ **funtzio diferentziagarriak definitzen dituela, non** $z(1,2) = 0$ **eta** $t(1,2) = 0$**.**

b) (1,2) puntuan $x + y = 2$ **zuzenaren norabidean, zein da handiagoa, balio absolututan,** ***z*** **funtzioaren aldakuntza edo** ***t*** **funtzioarena?**

a) $P(x,y,z,t) = P(1,2,0,0)$ puntuan funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen dela frogatu behar dugu:

i) $\begin{cases} F(P) = 1 + 0 - 1 = 0 \\ G(P) = 2 - 0 - 2 = 0 \end{cases}$

ii) F eta G funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira P puntuaren ingurunean non $t \neq -1$:

$$F'_x = e^{z+t} \quad F'_y = 0 \quad F'_z = x \cdot e^{z+t} + 2t \quad F'_t = x \cdot e^{z+t} + 2z$$

$$G'_x = -2 \quad G'_y = e^{z-t} \quad G'_z = y \cdot e^{z-t} - \frac{1}{1+t} \quad G'_t = -y \cdot e^{z-t} + \frac{z}{(1+t)^2}$$

iii) $\left.\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P = \left|\begin{matrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{matrix}\right|_P = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Beraz, $P(x,y,z,t) = P(1,2,0,0)$ puntuaren ingurunean $z = z(x,y)$ eta $t = t(x,y)$ funtzio diferentziagarriak existitzen dira non $z(1,2) = 0$ eta $t(1,2) = 0$.

b) $x + y = 2$ zuzenaren norabidea (-1,1) bektoreak adierazten digu, $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ bektore unitarioak hain zuzen ere. Norabide horretan z eta t funtzioen aldakuntzak kalkulatzeko euren deribatu direkzionalak lortu behar ditugu:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P = z'_x(1,2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + z'_y(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_P = t'_x(1,2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + t'_y(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hasierako sisteman x-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1+z'_x(1,2)+t'_x(1,2)=0 \\ -2+z'_x(1,2)-2t'_x(1,2)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3+3\cdot t'_x(1,2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t'_x(1,2)=-1 \quad \Rightarrow \quad z'_x(1,2)=0$$

Eta gauza bera *y*-rekiko errepikatuz:

$$\begin{cases} z'_y(1,2)+t'_y(1,2)=0 \\ 1+z'_y(1,2)-2t'_y(1,2)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad -1+3\cdot t'_y(1,2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t'_y(1,2)=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad z'_y(1,2)=-\frac{1}{3}$$

Orduan:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_P=-\frac{1}{3\sqrt{2}} \qquad \text{eta} \qquad \left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_P=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Beraz, balio absolututan, *t* funtzioaren aldakuntza *z* funtzioarena baino handiagoa da.

14.- Izan bedi $\begin{cases} u=f(x)+y \\ v=7\cdot g(y^2)+2x \\ w=u+2v^2 \end{cases}$ **sistema, non *f* eta *g* deribagarriak diren, deribatu jarraituarekin,** $f(0)=0$**,** $g(0)=0$ **eta** $f'(0)=2$**.**

a) Frogatu aurreko sistemak $u=u(x,y)$**,** $v=v(x,y)$ **eta** $w=w(x,y)$ **funtzioak definitzen dituela** $(x,y)=(0,0)$ **puntuan, puntu horretan *u*, *v* eta *w* aldagaien balioak determinatuz.**

b) Kalkulatu $w'_x(0,0)$ **eta** $w'_y(0,0)$

a) $\begin{cases} u=f(x)+y \\ v=7\cdot g(y^2)+2x \\ w=u+2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y,u,v,w)=f(x)+y-u=0 \\ G(x,y,u,v,w)=7\cdot g(y^2)+2x-v=0 \\ G(x,y,u,v,w)=u+2v^2-w=0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} F(0,0,u,v,w)=f(0)+0-u=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=0 \\ G(0,0,u,v,w)=7\cdot g(0)+0-v=0 \quad \Leftrightarrow \quad v=0 \\ G(0,0,u,v,w)=0+0-w=0 \quad \Leftrightarrow \quad w=0 \end{cases}$

ii)

$$\begin{array}{lllll} F'_x=f'(x) & F'_y=1 & F'_u=-1 & F'_v=0 & F'_w=0 \\ G'_x=2 & G'_y=14y\cdot g'(y^2) & G'_u=0 & G'_v=-1 & G'_w=0 \\ H'_x=0 & H'_y=0 & H'_u=1 & H'_v=4v & H'_w=-1 \end{array}$$

jarraituak dira $\mathbb{R}^5$ osoan.

iii) $\left|\frac{D(F,G,H)}{D(u,v,w)}\right|_P=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Orduan, $\exists\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \\ w = w(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak $P(x,y,u,v,w) = (0,0,0,0,0)$ puntuaren ingurune batean eta $\begin{cases} u(0,0) = 0 \\ v(0,0) = 0 \\ w(0,0) = 0 \end{cases}$.

b) Hasierako sisteman x-rekiko deribatuz eta $P(x,y,u,v,w) = (0,0,0,0,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} f'(0) - u'_x(0,0) = 0 \\ 2 - v'_x(0,0) = 0 \\ u'_x(0,0) - w'_x(0,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x(0,0) = f'(0) = 2 \\ v'_x(0,0) = 2 \\ w'_x(0,0) = u'_x(0,0) = 2 \end{cases}$$

Era berean, y-rekiko deribatuz eta $P(x,y,u,v,w) = (0,0,0,0,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 - u'_y(0,0) = 0 \\ -v'_y(0,0) = 0 \\ u'_y(0,0) - w'_y(0,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'_y(0,0) = 1 \\ v'_y(0,0) = 0 \\ w'_y(0,0) = u'_y(0,0) = 1 \end{cases}$$

15.- $\begin{cases} F(x,y,z) = g\left(x, yz^2\right) - xze^x - 1 = 0 \\ G(x,y,z) = h\left(x^2 \cdot e^{y+x^2}\right) - z = 0 \end{cases}$ **sistemak, *g* eta *h* jarraituak deribatu partzial jarraituekin direlarik,** $y = y(x)$ **eta** $z = z(x)$ **funtzioak definitzen ditu** $P(x,y,z) = (0,0,1)$ **puntuaren ingurune batean.**

a) Kalkulatu $g(0,0)$ **eta** $h(0)$**.**

b) $\vec{\nabla} g(0,0) = (-1,1)$ **dela ezagutuz, kalkulatu** $y'(0)$ **eta** $z'(0)$**.**

a) Funtzio inplizituaren teoremaren lehenengo baldintzaren arabera:

$$\begin{cases} F(0,0,1) = g\left(0,0\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\left(0,0\right) = 1 \\ G(0,0,1) = h\left(0\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h\left(0\right) = 1 \end{cases}$$

b) $\vec{\nabla} g(0,0) = (-1,1) \quad \Rightarrow \quad g'_x(0,0) = -1$ eta $g'_u(0,0) = 1$ non $u = yz^2$

Emandako sisteman x-rekiko deribatuz:

$$\begin{cases} g'_x + g'_u \cdot \left(y' \cdot z^2 + 2yz \cdot z'\right) - ze^x - xz' \cdot e^x - xze^x = 0 \\ h' \cdot \left(2x \cdot e^{y+x^2} + x^2 \cdot (y' + 2x) \cdot e^{y+x^2}\right) - z' = 0 \end{cases}$$

Eta $P(x,y,z)=(0,0,1)$ puntuan ordeztatuz:

$$\begin{cases} g'_x(0,0)+g'_u(0,0)\cdot y'(0)-1=0 \quad \Rightarrow \quad -1+y'(0)-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(0)=2 \\ z'(0)=0 \end{cases}$$

16.- $\begin{cases} x-3xy+2z-t=0 \\ y-t=0 \\ z+2t=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanik:**

a) Estudiatu ea *x* aldagaiko *y, z* eta *t* funtzio inplizituak ($y=y(x)$**,** $z=z(x)$**,** $t=t(x)$ **alegia) definitzen dituen** $P(x,y,z,t)=(-2,2,-4,2)$ **puntuaren ingurune batean.**

b) Aurkitu $z=z(x)$ **funtzioak adierazten duen kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa** $x=-2$ **puntuan.**

a) Ikus dezagun ea $\begin{cases} F(x,y,z,t)=x-3xy+2z-t=0 \\ G(x,y,z,t)=y-t=0 \\ H(x,y,z,t)=z+2t=0 \end{cases}$ sistemak funtzio inplizituaren teorema egiaztatzen duen $P(x,y,z,t)=(-2,2,-4,2)$ puntuaren ingurune batean:

I. $\begin{cases} F(P)=-2+12-8-2=0 \\ G(P)=2-2=0 \\ H(P)=-4+4=0 \end{cases}$

II. *F*, *G* eta *H* funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$\begin{array}{llll} F'_x=1-3y & F'_y=-3x & F'_z=2 & F'_t=-1 \\ G'_x=0 & G'_y=1 & G'_z=0 & G'_t=-1 \\ H'_x=0 & H'_y=0 & H'_z=1 & H'_t=2 \end{array}$$

III. $$\left|\frac{D(F,G,H)}{D(y,z,t)}\right|_P = \begin{vmatrix} -3x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1+6-4=1\neq 0$$

Beraz, $\exists \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \\ t=t(x) \end{cases}$ diferentziagarriak, eta $\begin{cases} y(-2)=2 \\ z(-2)=-4 \\ t(-2)=2 \end{cases}$

b) $z=z(x)$ kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa $x=-2$ puntuan:

$$z-z(-2)=z'(-2)\cdot(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad z+4=z'(-2)\cdot(x+2)$$

Beraz, malda lortzeko, emandako sisteman *x*-rekiko deribatuko dugu:

$$\begin{cases} 1-3y-3x\cdot y'+2z'-t'=0 \\ y'-t'=0 \\ z'+2t'=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} 6y'(-2)+2z'(-2)-t'(-2)=5 \\ y'(-2)-t'(-2)=0 \iff y'(-2)=t'(-2) \\ z'(-2)+2t'(-2)=0 \iff z'(-2)=-2t'(-2) \end{cases} \overset{1.ekuazioan}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad 6t'(-2)-4t'(-2)-t'(-2)=5 \iff t'(-2)=5 \Rightarrow z'(-2)=-10$$

Orduan, zuzen ukitzailea: $z+4=-10\cdot(x+2) \iff z=-10x-24$

17.- $\begin{cases} F(x,y,z,t)=x+2y-3xz+t-1=0 \\ G(x,y,z,t)=x-2yt-z=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema eta** $P(1,-1,-1,-1)$ **puntua emanik:**

a) **Frogatu sistemak** $z=z(x,y)$ **eta** $t=t(x,y)$ **funtzio inplizituak definitzen dituela *P* puntuaren ingurune batean.**

b) **Baldin (1,-1) puntuaren ingurune batean** (x,y) **puntu guztietarako *z* altuera eta *t* tenperatura badira eta, puntu horretatik abiatuz,** $\vec{u}=(1,1)$ **bektorearen norabidea jarraituz mugitzen bagara, *z* eta *t* igoko edo jaitsiko dira?**

a) Funtzio inplizituaren teorema egiaztatu behar da:

IV. $\begin{cases} F(P)=1-2+3-1-1=0 \\ G(P)=1-2+1=0 \end{cases}$

V. *F* eta *G* funtzioen deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan:

$$F'_x=1-3z \quad F'_y=2 \quad F'_z=-3x \quad F'_t=1$$
$$G'_x=1 \quad G'_y=-2t \quad G'_z=-1 \quad G'_t=-2y$$

VI. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P = \begin{vmatrix} -3x & 1 \\ -1 & -2y \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6+1=-5\neq 0$

Beraz, $\exists\begin{cases} z=z(x,y) \\ t=t(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak, eta $\begin{cases} z(1,-1)=-1 \\ t(1,-1)=-1 \end{cases}$

b) *z* eta *t* funtzioen deribatu direkzionalak kalkulatu behar ditugu.

Beraz, euren deribatu partzialak lortzeko, emandako sisteman deribatuko dugu:

<u>*x*-rekiko</u>:

$$\begin{cases} 1-3z-3x\cdot z'_x+t'_x=0 \\ 1-z'_x-2y\cdot t'_x=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} -3z'_x(1,-1)+t'_x(1,-1)=-4 \\ -z'_x(1,-1)+2t'_x(1,-1)=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_x(1,-1)=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5} \quad \text{eta} \quad t'_x(1,-1)=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

<u>*y*-rekiko</u>:

$$\begin{cases} 2-3x\cdot z'_y+t'_y=0 \\ -2t-z'_y-2y\cdot t'_y=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan}}{\Rightarrow} \begin{cases} -3z'_y(1,-1)+t'_y(1,-1)=-2 \\ -z'_y(1,-1)+2t'_y(1,-1)=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad z'_y(1,-1)=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5} \quad \text{eta} \quad t'_y(1,-1)=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5}$$

$\vec{u}=(1,1)$ unitario bihurtuko dugu, $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eta, honela:

$$\left.\frac{dz}{d\vec{u}}\right|_{(1,-1)}=\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{9}{5\sqrt{2}}>0 \quad \Rightarrow z\text{, altuera, igoko da.}$$

$$\left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_{(1,-1)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{5\sqrt{2}}<0 \quad \Rightarrow t\text{, tenperatura, jaitsiko da.}$$

18.- Garoñan gertatutako istripu erradioaktiboaren ondoren egindako neurketetan, kutsadura-maila $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ funtzioak ematen duela lortu da, *x* eta *y* koordenatu geografikoak direlarik. Baldin gure koordenatu geografikoak (1,3) badira:

a) Zein norabide eta noranzko aukeratu beharko genuke kutsadura-maila ahalik eta arinen jaisteko?

b) $\begin{cases} F(x,y,t)=x^2-xy^2+t+8=0 \\ G(x,y,t)=e^{t^2}+xy-4=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistemak** $(x,y,t)=(1,3,0)$ **puntuan** $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ **planoko kurba definitzen du. Zein izango litzateke kutsadura-mailaren aldakuntza kurba horren norabidea hartuko bagenu?**

a) Kutsadura-maila ahalik eta arinen jaitsiko da $-\overrightarrow{\nabla f}(1,3)=-f'_x(1,3)\cdot\vec{i}-f'_y(1,3)\cdot\vec{j}$ bektoreak adierazitako norabide eta noranzkoan.

$$\left.\begin{aligned} f'_x=-2x\cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad &\Rightarrow \quad f'_x(1,3)=-2\cdot e^{-10} \\ f'_y=-2y\cdot e^{-(x^2+y^2)} \quad &\Rightarrow \quad f'_y(1,3)=-6\cdot e^{-10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad -\overrightarrow{\nabla f}(1,3)=\frac{2}{e^{10}}\cdot\vec{i}+\frac{6}{e^{10}}\cdot\vec{j}$$

b) $C\equiv\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ kurbaren norabidea $\vec{u}=\left(x'(t),y'(t)\right)$ bektore-ukitzaileak adierazitakoa da, eta kutsadura-mailaren aldakuntza norabide horretan $\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,3)}$ deribatu direkzionalak emango du. Beraz, sisteman *t*-rekiko deribatuz eta $(x,y,t)=(1,3,0)$ puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 2x\cdot x'(t)-x'(t)\cdot y^2-2xy\cdot y'(t)+1=0 \\ 2t\cdot e^{t^2}+x'(t)\cdot y+x\cdot y'(t)=0 \end{cases} \overset{(1,3,0)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\cdot x'(0)-9\cdot x'(0)-6\cdot y'(0)+1=0 \\ 3\cdot x'(0)+y'(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad y'(0)=-3\cdot x'(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1-7\cdot x'(0)+18\cdot x'(0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x'(0)=-\frac{1}{11} \quad\Rightarrow\quad y'(0)=\frac{3}{11} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \vec{u}=\left(x'(0),y'(0)\right)=\left(-\frac{1}{11},\frac{3}{11}\right)$$

Eta $|\vec{u}|=\dfrac{\sqrt{10}}{11} \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ unitarioa da.

Beraz, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,3)}=f'_x(1,3)\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{10}}+f'_y(1,3)\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{2-18}{e^{10}\cdot\sqrt{10}}=-\dfrac{16}{e^{10}\cdot\sqrt{10}}$

19.- $\begin{cases} F(x,y,z,t)=e^{x-z}+yt+3=0 \\ G(x,y,z,t)=e^{y+t}-xz=0 \end{cases}$ **sistema emanik:**

a) egiaztatu *x* eta *y* aldagaiko *z* eta *t* funtzio inplizituak definitzen dituela $(x,y,z,t)=$ **(1,2,1,-2) puntuaren ingurune batean.**

b) aurkitu $z=z(x,y)$ **funtzioaren gradientea (1,2) puntuan.**

c) aurkitu $t=t(x,y)$ **funtzioaren deribatu direkzionala (1,2) puntuan,** $\vec{u}=(1,1)$ **bektorearen norabidean.**

a) i) $\begin{cases} F(1,2,1,-2)=e^0-4+3=0 \\ G(1,2,1,-2)=e^0-1=0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} F'_x=e^{x-z} & F'_y=t & F'_z=-e^{x-z} & F'_t=y \\ G'_x=-z & G'_y=e^{y+t} & G'_z=-x & G'_t=e^{y+t} \end{cases}$ existitzen eta jarraituak dira $\mathbb{R}^4$ osoan.

iii) $\left.\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|\right|_{(1,2,1,-2)}=\left.\begin{vmatrix} -e^{x-z} & y \\ -x & e^{y+t} \end{vmatrix}\right|_{(1,2,1,-2)}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Orduan, (1,2,1,-2) puntuaren ingurune batean $\exists z=z(x,y)$ eta $\exists t=t(x,y)$, deribatu partzial jarraituekin, eta $z(1,2)=1$, $t(1,2)=-2$.

b) eta c) Atal bietarako *z* eta *t* funtzioen deribatu partzialak behar ditugu, hortaz, hasierako sisteman *x* eta *y* aldagaiekiko deribatuko dugu $z=z(x,y)$ eta $t=t(x,y)$ funtzioak dauzkagula kontuan izanik.

x-rekiko deribatuz eta (1,2,1,-2) puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} 1 - z'_x(1,2) + 2t'_x(1,2) = 0 \\ -1 - z'_x(1,2) + t'_x(1,2) = 0 \end{cases} \underset{kenduz}{\Rightarrow} 2 + t'_x(1,2) = 0 \Leftrightarrow t'_x(1,2) = -2 \Rightarrow z'_x(1,2) = -3$$

Era berean, y-rekiko deribatuz eta (1,2,1,-2) puntuan ordezkatuz:

$$\begin{cases} -2 - z'_y(1,2) + 2t'_y(1,2) = 0 \\ 1 - z'_y(1,2) + t'_y(1,2) = 0 \end{cases} \underset{kenduz}{\Rightarrow} -3 + t'_y(1,2) = 0 \Leftrightarrow t'_y(1,2) = 3 \Rightarrow z'_y(1,2) = 4$$

Beraz, $\vec{\nabla} z(1,2) = z'_x(1,2) \cdot \vec{i} + z'_y(1,2) \cdot \vec{j} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\left.\frac{dt}{d\vec{u}}\right|_{(1,2)} = t'_x(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + t'_y(1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(t diferentziagarria da deribatu partzial jarraituak baititu).

20.- Aztertu ea hurrengo sistemak:

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \\ xyu^3 + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases}$$

***P*(*x,y,z,u,v*)=(1,1,1,1,1) puntuaren ingurune batean *x, y* eta *z* aldagaiko *u* eta *v* funtzio inplizituak definitzen dituen. Gero kalkulatu $\frac{\partial u}{\partial x}$ eta $\frac{\partial u}{\partial y}$ puntu horretan.**

i) $\begin{cases} F(x,y,z,u,v) = xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ G(x,y,z,u,v) = xyu^3 + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(P) = 0 \\ G(P) = 0 \end{cases}$

ii) P puntuaren ingurune batean existitzen eta jarraituak dira deribatu partzialak:

$F'_x = y^2 + zu \quad F'_y = 2xy + v^2 \quad F'_z = xu \quad F'_u = xz \quad F'_v = 2yv$

$G'_x = yu^3 + 2v \quad G'_y = xu^3 \quad G'_z = 0 \quad G'_u = 3xyu^2 - 2uv^2 \quad G'_v = 2x - 2u^2v$

iii) $\left|\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_P = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Beraz, P puntuaren ingurune batean existitzen dira $u = u(x,y,z)$ eta $v = v(x,y,z)$ diferentziagarriak, non $u(1,1,1) = 1$ eta $v(1,1,1) = 1$.

Orain, sisteman x-rekiko deribatuz eta P puntuan ordezkatuz:

$$\left.\begin{cases} 2 + u'_x + 2v'_x = 0 \\ 3 + u'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u'_x = -3} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \boxed{v'_x = \frac{1}{2}}$$

Eta, era beran, y-rekiko:

$$\left.\begin{cases} 3 + u'_y + 2v'_y = 0 \\ 1 + u'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u'_y = -1} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow \boxed{v'_y = -1}$$