GRADIENTEA

1.-Suposa dezagun ondorengo φ funtzioa (1,1,1) puntuan diferentziagarria dela:

$$\varphi(x,y,z) = f(xyz, g(xy,xz))$$

non $g(1,1)=1$ **eta** $\left(\vec{\nabla} f\right)_{(1,1)} = \left(\vec{\nabla} g\right)_{(1,1)} = (0,1)$ **diren.**

Kalkulatu φ-ren deribatu direkzional maximoa.

$$\begin{array}{l} x\nwarrow \qquad \nearrow u \\ y \leftarrow \varphi = f \qquad\quad v \\ z\swarrow \qquad \searrow g \langle \\ \qquad\qquad\qquad\quad w \end{array} \qquad \text{non } \begin{cases} u = xyz \\ v = xy \\ w = xz \end{cases}$$

$$\varphi'_x = f'_u \cdot yz + f'_g \cdot \left(g'_v \cdot y + g'_w \cdot z\right)$$
$$\varphi'_y = f'_u \cdot xz + f'_g \cdot g'_v \cdot x$$
$$\varphi'_z = f'_u \cdot xy + f'_g \cdot g'_w \cdot x$$

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{(1,1)} = \left(\vec{\nabla} g\right)_{(1,1)} = (0,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'_u(1,1) = g'_v(1,1) = 0 \\ f'_g(1,1) = g'_w(1,1) = 1 \end{cases}$$

Orduan,

$$\varphi'_x(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot \left(g'_v(1,1) + g'_w(1,1)\right) = 1$$
$$\varphi'_y(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot g'_v(1,1) = 0$$
$$\varphi'_z(1,1,1) = f'_u(1,1) + f'_g(1,1) \cdot g'_w(1,1) = 1$$

Orduan, $\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{(1,1,1)} = (1,0,1)$, eta $\left|\left(\vec{\nabla}\varphi\right)_{(1,1,1)}\right| = \sqrt{2}$, deribatu direkzional maximoa hain zuzen ere.

1.- Leku handi ilun batean hiru gazte eta munstro bat daude. Hiru gazteek munstroa non dagoen jakiteko tresna bana daukate. Tresna horrek munstrotik ateratako tenperatura hurrengo funtzioaren bidez ematen du:

$$T(x,y) = 128x + 12y - 8x^2 - y^2 + 27$$

Baldin gazteak $A(1,6)$, $B(8,-2)$ eta $C(10,2)$ puntuetan badaude, norantz abiatuko dira, munstroaren elikagai kutunenak gazteak direla badakite?

(2.5 puntu)

Gazteek $-\overrightarrow{\nabla T}$ norabidean ihes egin beharko lukete, tenperatura ahalik eta arinen jaisten den norabidean alegia.

$$T'_x = 128 - 16x \quad \Rightarrow \quad T'_x(A) = 112 \quad T'_x(B) = 0 \quad T'_x(C) = -32$$
$$T'_y = 12 - 2y \quad \Rightarrow \quad T'_y(A) = 0 \quad T'_y(B) = 16 \quad T'_y(C) = 8$$

Orduan, bakoitzari dagokion ihes egiteko bidea bektore hauen bitartez adierazten da:

$$A \Rightarrow -112\,\vec{i} \qquad B \Rightarrow -16\,\vec{j} \qquad C \Rightarrow 32\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

2.- Har dezagun $T(x,y,z)=\dfrac{1}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}$ funtzioa, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ puntuetako tenperatura adierazten duena, eta demagun $P(1,1,3)$ puntuan gaudela.

a) Aurkitu *P* puntuarekiko isotermikoak diren puntuek osaturiko *S* gainazalaren ekuazioa. Adierazi grafikoki gainazal hori.

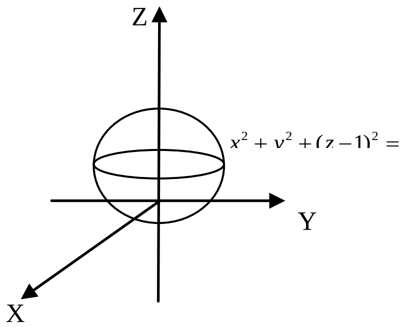
b) *P* puntutik, aurkitu norabidea eta noranzkoa non tenperaturaren aldakuntza maximoa den.

c) Kalkulatu *P* puntuan *S* gainazalari dagokion plano ukitzailearen ekuazioa..

a) *P* puntuko tenperatura: $T(P)=\dfrac{1}{e^{1+1+2^2}}=\dfrac{1}{e^6}\Rightarrow$ Puntu isotermikoak:

$$T(x,y,z)=T(P)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}=\frac{1}{e^6}\quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+(z-1)^2=6\,.$$

Hau da, *S* gainazala (0,0,1) puntuan zentroa duen eta $\sqrt{6}$ erradioko esfera da.



b) Tenperaturaren aldakuntza maximoa gradientearen norabidean suertatzen da:

$$\left.\begin{array}{l}T'_x=\dfrac{-2x}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}\quad\Rightarrow\quad T'_x(P)=\dfrac{-2}{e^6}\\[2ex] T'_y=\dfrac{-2y}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}\quad\Rightarrow\quad T'_y(P)=\dfrac{-2}{e^6}\\[2ex] T'_z=\dfrac{-2(z-1)}{e^{x^2+y^2+(z-1)^2}}\quad\Rightarrow\quad T'_x(P)=\dfrac{-4}{e^6}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{\nabla T}(P)=\left(\frac{-2}{e^6},\frac{-2}{e^6},\frac{-4}{e^6}\right)$$

Beraz, tenperaturaren igoera maximoa $(-1,-1,-2)$ norabidean eta noranzkoan dugu.

c) *S* gainazalean tenperatura ez da aldatzen (tenperaturaren aldakuntza minimoa dugu alegia), beraz *P* puntuko plano ukitzailea eta tenperaturaren aldakuntza maximoaren norabideak elkarzutak dira. Beraz,

$$(-1,-1,-2)\parallel\overrightarrow{\nabla T}(P)=\left(\frac{-2}{e^6},\frac{-2}{e^6},\frac{-4}{e^6}\right)$$

plano ukitzailearen bektore karakteristikoa da.
Hau da:

$$-x-y-2z+D=0$$

Eta $P(1,1,3)\in S$ ukitze-puntua denez: $-1-1-6+D=0\quad\Leftrightarrow\quad D=8$

Beraz, plano ukitzailea honako hau da: $x+y+2z-8=0$

3.- Hainbat ate daukan pabiloi zabal batean hiru sagu sartzen dira, bat zuria, beste bat grisa eta beste bat beltza. Hiru saguak presio handitan ezartzen dira. Presioa $P(x,y)=\dfrac{3}{3x^2+y^2}$ atmosfera funtzioak ematen du, non (x,y) posizioa den. Hauetako saguren batek 2 atmosfera edo presio gehiago jasotzen badu, segundo batzutan hil egingo dela ezagutzen da. Saguak honako posizio hauetan daude:

$$\begin{cases} \textbf{Zuria: } (-1,3) \\ \textbf{Grisa: } (3,0) \\ \textbf{Beltza: } \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right) \end{cases}$$

a) <u>Sagu zuriak eta grisak</u>, esperimentu zientifiko baten emaitza direla eta, matematikari buruzko oso ezaguera zabala dute. Beraz, norantz ihes egingo dute presio hilgarria saihesteko?

b) <u>Sagu beltzak</u>, berriz, ezer ez daki matematikari buruz. Baldin, horrez gain, urduri jartzen bada eta ihes egiten badu $\left(2,-\sqrt{6}\right)$ norabidean, zer gertatuko zaio?

c) Kalkulatu 2 atmosferako presioari dagokion isobara kurbaren ekuazioa.

a) Sagu Zuriaren posizioa $\mathrm{Z}=(-1,3)$, sagu Grisarena $\mathrm{G}=(3,0)$ eta sagu Beltzarena $\mathrm{B}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},1\right)$ dira.

Hasierako puntu horietan bakoitza jasotzen ari den presioa hauxe da:

$$P(Z)=\frac{1}{4},\ P(G)=\frac{1}{9} \text{ eta } P(B)=2$$

Arazorik ez izateko, hirurek ihes egin beharko lukete presioa arinen jaisten den norabidean, hau da $-\overrightarrow{\nabla P}$ bektorearen norabidean.

$$P'_x=\frac{-18x}{\left(3x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} P'_x(Z)=\dfrac{1}{8} \\ P'_x(G)=-\dfrac{2}{27} \end{cases} \quad \text{eta} \quad P'_y=\frac{-6y}{\left(3x^2+y^2\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} P'_y(Z)=-\dfrac{1}{8} \\ P'_y(G)=0 \end{cases}$$

Orduan, $-\overrightarrow{\nabla P}(Z)=\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$ eta $-\overrightarrow{\nabla P}(G)=\left(\dfrac{2}{27},0\right)$.

Hau da, sagu Zuriak $y=-x$ zuzenaren norabidea jarraituz ihes egin beharko luke, eta sagu Grisak, berriz, OX ardatzaren norabidean. Kasu bietan koordenatu-jatorritik urruntzen dira.

b) $P(B)=2$ denez, sagu Beltza benetako arriskuan dago. Baldin $\vec{u}=\left(2,-\sqrt{6}\right)$ norabidean ihes egiten badu, presioaren aldakuntza deribatu direkzionalak emango digu.

$|\vec{u}|=\sqrt{10} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}=\left(\frac{2}{\sqrt{10}},\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)$ unitarioa da. Orduan:

$$\left.\frac{dP}{d\vec{u}}\right|_B = P'_x(B)\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}+P'_y(B)\cdot\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=-\frac{8}{\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=-\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}+\frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=0$$

Hau da, presioa ez da aldatzen sagu Beltza maila-kurbatik mugitzen ari baita. Beraz, hil egingo du.

c) $P(x,y)=\frac{3}{3x^2+y^2}=2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2+2y^2=3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{3/2}=1$

Hau da, 2 atmosferako presioari dagokion maila-kurba (0,0) puntuan zentroa duen elipsea da. Eta hortik doa sagu Beltza mugitzen.

4.- Izan bedi (x,y) puntuan tenperatura neurtzen duen $T(x,y)=e^{f(u,v)}$ funtzio diferentziagarria, non $u=e^{-x-y}$ eta $v=x^2+y^2$ diren. Baldin $f(1,0)=0$ eta $f'_u(1,0)=f'_v(1,0)=2$ badira:

a) Kalkulatu (0,0) puntuan, norabidea non tenperaturaren aldakuntza maximoa den.

b) Aurkitu (0,0) puntutik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailearen ekuazioa.

a) (0,0) puntuan tenperaturaren aldakuntza maximoa $\overrightarrow{\nabla T}(0,0)=T'_x(0,0)\cdot\vec{i}+T'_y(0,0)\cdot\vec{j}$ bektoreak ematen digu.

$$T(x,y)=e^{f(u,v)} \quad \text{non} \quad f\left\langle \begin{array}{l} u\left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \\ v\left\langle \begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Eta $(x,y)=(0,0) \quad \Leftrightarrow \quad (u=e^{-x-y}, v=x^2+y^2)=(1,0)$

Orduan:

$$T'_x=e^f\cdot\left(f'_u\cdot u'_x+f'_v\cdot v'_x\right)=e^f\cdot\left(-e^{-x-y}\cdot f'_u+2x\cdot f'_v\right) \quad \Rightarrow \quad T'_x(0,0)=-2$$

$$T'_y=e^f\cdot\left(f'_u\cdot u'_y+f'_v\cdot v'_y\right)=e^f\cdot\left(-e^{-x-y}\cdot f'_u+2y\cdot f'_v\right) \quad \Rightarrow \quad T'_y(0,0)=-2$$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla T}(0,0)=(-2,-2)$ ($y=x$ zuzenaren norabidea alegia).

b) Maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea $\perp \overrightarrow{\nabla T} \quad \Rightarrow \quad (2,-2)$ bektore ukitzailea da.

Eta (0,0) puntuko zuzen ukitzailea: $\begin{cases} y = -x \\ T(0,0) = 1 \text{ planoan} \end{cases}$.

5.- $f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik,**

- **a) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
- **b) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
- **c) Kalkulatu bere deribatu direkzional maximoa (0,0) puntuan.**
- **d) Kalkulatu bere deribatu direkzionala (0,0) puntuan, gradientearekiko norabide perpendikularrean.**

a) $\exists f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + \frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}_{1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos\theta + \sin\theta)^3}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)^3 = 0$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) Diferentziagarria izateko, nahikoa ez bada ere, *f* funtzioak bi baldintza bete behar ditu. Bata aurreko atalean egiaztatzen dela frogatu dugu, jarraitua izatea alegia. Bestea, deribatu partzial finituak edukitzea da:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h + \dfrac{h^3}{\sqrt{h^2}} \cdot e^{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h^2}{\sqrt{h^2}} \cdot e^{\sqrt{h^2}} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{|h|^2}{|h|} \cdot e^{\sqrt{h^2}} \right) = \lim_{h\to 0} \left(1 + |h| \cdot e^{\sqrt{h^2}} \right) = 1$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{k^3}{\sqrt{k^2}} \cdot e^{\sqrt{k^2}}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{\sqrt{k^2}} \cdot e^{\sqrt{k^2}} = \lim_{k\to 0} |k| \cdot e^{\sqrt{k^2}} = 0$$

Orain, baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu.

Hots, *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

1

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|h+\dfrac{(h+k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2+k^2}}-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{(h+k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}}\cdot e^{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|(h+k)^3\right|\cdot e^{\sqrt{h^2+k^2}}}{h^2+k^2} =$$

$$\overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cdot\left|(\cos\theta+\sin\theta)^3\right|}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cdot\left|(\cos\theta+\sin\theta)^3\right| = 0 \quad \forall\theta$$

Beraz, f diferentziagarria da (0,0) puntuan.

c) Deribatu direkzional maximoa (0,0) puntuan gradientearen modulua da, beraz:

$$\vec{\nabla} f(0,0)=\left(f'_x(0,0),\, f'_y(0,0)\right)=(1,0) \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{\nabla} f(0,0)\right|=1$$

d) Baldin $\vec{u}\perp\vec{\nabla} f(0,0) \quad\Rightarrow\quad \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=0$, deribatu direkzional minimoa hain zuzen ere.

6.- Metalezko xafla baten (x,y) puntuko tenperatura $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2+20$ funtzioak adierazten du.
$t=0$ unean, inurri bat $(x,y)=(1,1)$ puntuan dago.

a) Zein norabide aukeratu behar du inurriak, tenperatura ahalik eta arinen jaisteko? Eta zein da tenperaturaren aldakuntza norabide horretan?

b) Baldin inurriak lekuz aldatzea erabakitzen badu $C\equiv\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ ibilbideari jarraituz, non x eta y $\begin{cases}y^2+e^{xt}-2=0\\ tx+2yx-y-1=0\end{cases}$ sistemak inplizituki definituriko funtzioak diren, zein izango da, orduan, tenperaturaren aldakuntza? Zer ondorioztatzen da lortutako ematzetik?

c) Diferentzialaren kontzeptua erabiliz, kalkulatu tenperaturaren balio hurbildua $(x,y)=(1.18,0.88)$ puntuan.

a) Norabidea non tenperatura arinen igoko den gradientearena da beraz, inurriak $-\vec{\nabla}T=(-T'_x,-T'_y)$ norabidea aukeratu behar du.

$$\left.\begin{array}{l} T'_x=8x-4y \quad\Rightarrow\quad T'_x(1,1)=4 \\ T'_y=-4x+2y \quad\Rightarrow\quad T'_y(1,1)=-2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad -\vec{\nabla}T(1,1)=(-4,2)$$

Eta tenperaturaren aldakuntza norabide horretan minus gradientearen modulua da:

$$-\left|\vec{\nabla}T(1,1)\right|=-\sqrt{16+4}=-\sqrt{20}=-2\sqrt{5}$$

Zeinu negatiboa atera zaigu tenperatura jaisten baita norabide horretan.

b) $C \equiv \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ibilbidearen norabidea bere bektore ukitzaileak adierazten du, hau da $\vec{u} = (x'(t), y'(t))$, $t = 0$ unean.

Deribatu hauek lortzeko $\begin{cases} y^2 + e^{xt} - 2 = 0 \\ tx + 2yx - y - 1 = 0 \end{cases}$ sisteman *t*-rekiko deribatu behar dugu:

$$\begin{cases} 2y \cdot y' + (x' \cdot t + x)e^{xt} = 0 \\ x + t \cdot x' + 2(y' \cdot x + y \cdot x') - y' = 0 \end{cases}$$

Eta orain $(x, y) = (1,1)$, $t = 0$ balioetarako ordezkatuz:

$$\begin{cases} 2 \cdot y'(0) + 1 = 0 \\ 1 + 2(y'(0) + x'(0)) - y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = -\dfrac{1}{2} \\ x'(0) = -\dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Kalkulatu behar dugun tenperaturaren aldakuntza, deribatu direkzionalak adierazten digu:

$\left.\dfrac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = T'_x(1,1) \cdot h_1 + T'_y(1,1) \cdot h_2$, non $\vec{u} = (h_1, h_2)$ unitarioa de (*T* diferentziagarria da).

Kasu honetan, $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{16}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \vec{u} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Beraz, $\left.\dfrac{dT}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)} = -4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = 0$.

Hau da, ez dagoenez tenperaturaren aldakuntzarik, *C* ibilbidea maila-kurba dela ondorioztatzen da. Izan ere, $\vec{u} = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}\right) \perp \vec{\nabla} T(1,1) = (-4, 2)$ direnez, deribatu direkzionala kalkulatu gabe, emaitza nulua zela atera genezakeen.

c) $dT(1,1) \simeq \Delta T(1,1) = T(1.18, 0.88) - T(1,1) \Rightarrow T(1.18, 0.88) \simeq T(1,1) + dT(1,1)$

Eta $dT(1,1) = T'_x(1,1) \cdot dx + T'_y(1,1) \cdot dy = 4 \cdot (0.18) - 2 \cdot (-0.12) = 0.72 + 0.24 = 0.96$

Orduan, $T(1.18, 0.88) \simeq T(1,1) + dT(1,1) = 21 + 0.96 = 21.96$

7.- $P(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ **puntuaren inguruneko tenperatura** $T(x,y)=\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x$ **funtzioak adierazten du.** ***P*** **puntutik abiatuz:**

a) Aurkitu norabidea eta noranzkoa non tenperatura arinen jaitsiko den.

b) Aurkitu norabidea non tenperatura konstantea izango den.

c) Aurkitu ***P*** **puntuari dagokion maila-kurba eta puntu horretako zuzen ukitzailea.**

d) OX^+ **ardatzarekin** 30° **angelua osatzen duen norabidean, tenperatura igoko edo jaitsiko da?**

a) Norabidea non tenperatura arinen aldatuko den gradientearena litzateke. Gradientearen noranzkoan, berriz, funtzioaren balioak igotzen dira beraz, kasu honetan eman behar dugun erantzuna gradientearen kontrakoa da:

$$-\vec{\nabla}T=(-T'_x,-T'_y)$$

$$\left.\begin{aligned} T'_x&=-\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\sin x \quad\Rightarrow\quad T'_x(P)=-1\\ T'_y&=-\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x \quad\Rightarrow\quad T'_y(P)=-1\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad -\vec{\nabla}T(P)=(1,1)$$

b) Tenperatura konstantea da gradientearekiko norabide elkartzutan:

$$\vec{u}\perp\vec{\nabla}T=(1,1)\quad\Leftrightarrow\quad\vec{u}=(1,-1)$$

c) *P* puntuari dagokion maila-kurba lortzeko, puntu horretako tenperatura ezagutu behar dugu:

$$T(P)=\sqrt{2}\cdot e^{0}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=1$$

Eta tenperatura hori duten puntuek maila-kurba osatuko dute. Hau da:

$$\sqrt{2}\cdot e^{-y}\cdot\cos x=1\quad\Leftrightarrow\quad y=\mathrm{L}\left(\sqrt{2}\cdot\cos x\right)$$

Eta zuzen ukitzailea:

$\begin{cases} y=m\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\ T=1\end{cases}$ non malda aurreko ataleko $\vec{u}=(1,-1)$ bektoreak adierazten digu.

Hau da, $m=-1\quad\Rightarrow\quad y=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} y=\frac{\pi}{4}-x\\ T=1\end{cases}$

d) $\vec{v}=(\cos 30^{\circ},\sin 30^{\circ})=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ norabidean tenperaturaren aldakuntza kalkulatu behar dugu:

$\left.\frac{dT}{d\vec{v}}\right|_P\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot T'_x(P)+\frac{1}{2}\cdot T'_y(P)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}<0\quad\Rightarrow$ tenperatura jaitsiko da, aldakuntza negatiboa baita.

(*) *T* diferentziagarria da.

8- Izan bedi *f* funtzio diferentziagarria *P* puntuan.

a) Adierazi, arrazoituz, hurrengo hiru kasuetan zein den $\vec{u}$ bektoreak adierazten duen norabidea:

i. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = 0$

ii. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = f'_x(P)$

iii. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right|$

b) Izan bedi $\overrightarrow{\nabla f}(P) = (3,-4)$. $\exists\,\vec{u}$ bektore unitarioa zeinerako $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = 6$? Erantzuna arrazoitu.

a) f diferentziagarria denez $\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \overrightarrow{\nabla f}(P)\cdot\vec{u} = f'_x(P)\cdot h_1 + f'_y(P)\cdot h_2$ non $\vec{u} = (h_1, h_2)$ unitarioa den. Hori dela eta:

i. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = 0 \iff \vec{u} \perp \overrightarrow{\nabla f}(P) \iff \vec{u}$ maila-kurbaren norabidea da.

ii. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = f'_x(P) \iff \vec{u}$ OX ardatzaren norabidea da.

iii. $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right| \iff \vec{u}$ $\overrightarrow{\nabla f}(P)$ -ren norabidea da.

b) $\overrightarrow{\nabla f}(P) = (3,-4) \Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P)\right| = 5$ deribatu direkzional maximoa da

$\Rightarrow \quad \nexists\,\vec{u}$ unitario non $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = 6 > 5$

9.- $z=f(x,y)$ funtzioa emanik, adierazi, erantzuna arrazoituz, hurrengo baiteztapenak egiazkoak edo gezurrezkoak diren:

a) Baldin $f'_x(0,0)=0$ eta $f'_y(0,0)=\infty \Rightarrow$ *f* ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

b) Baldin limite direkzionalak $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ y=m(x-1)\,\forall m\in\mathbb{R}}} f(x,y)=f(1,0) \Rightarrow$ *f* jarraitua da $(1,0)$ puntuan.

c) Izan bedi *f* diferentziagarria P_0 puntuan. $\vec{u}=(-1,1)$ bektorea emanik, baldin $f'_x(P_0)=-a$ eta $f'_y(P_0)=b \Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0}=a+b$.

a) Egiazkoa da. *f* diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoa deribatu partzial finituak izatea da, eta kasu honetan ez da betetzen, beraz *f* ezin da diferentziagarria izan.

b) Gezurrezkoa da. Limite direkzionalak zuzenetan zehar berdinak badira ere (eta funtzioaren balioarekin bat badatoz ere), horrek ez du esan nahi limite bikoitzak gauza bera betetzen duenik. Beraz, ezin da egiaztatu *f* jarraitua denik puntu horretan.

c) Gezurrezkoa da. Deribatu direkzionalaren balioa $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0}=-a\cdot h_1+b\cdot h_1$, non $\vec{u}=(h_1,h_2)$ unitarioa den. Eta kasu honetan ez zen horrelakoa. Emaitza zuzena $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0}=\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ litzateke.

10.- Migratzen ari direnean, enaren abiadura $f(x,y)=x^y+y^2$ funtzio diferentziagarriak ematen du. Zein da azelerazio maximoa *P*(1,1) puntuan? Eta zein da azelerazioa puntu horretan iparralderantz doazenean? (OX ardatzak ekialdea erakusten badu).

Azelerazio maximoa *P*(1,1) puntuan *f*-ren aldakuntza maximoa da, $\left|\vec{\nabla}f(P)\right|$ hain zuzen ere:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=y\cdot x^{y-1}\Rightarrow f'_x(1,1)=1 \\ f'_y=x^y\cdot \mathrm{L}x+2y\Rightarrow f'_y(1,1)=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left|\vec{\nabla}f(1,1)\right|=\sqrt{5}$$

Azelerazioa iparralderantz doazenean, berriz, deribatu direkzionala da $\vec{u}(0,1)$ bektore unitarioak adierazitako norabidean:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=f'_x(1,1)\cdot 0+f'_y(1,1)\cdot 1=2$$

11.- Izan bedi $f(x,y)=e^{xy}\cdot\sin(ax+by)$ **funtzioa. Baldin ezagutzen bada** A**(0,0) puntuan** ***f*****-ren gradientea eta** $2x-y-1=0$ **zuzena paraleloak direla eta bere deribatu direkzionala OX ardatzaren noranzko positiboan 2 dela, kalkulatu** ***a*** **eta** ***b*****.**

$\vec{\nabla}f(0,0)=f'_x(0,0)\cdot\vec{i}+f'_y(0,0)\cdot\vec{j}$

$f'_x=y\cdot e^{xy}\sin(ax+by)+ae^{xy}\cos(ax+by)\Rightarrow f'_x(0,0)=a$

$f'_y=x\cdot e^{xy}\sin(ax+by)+be^{xy}\cos(ax+by)\Rightarrow f'_y(0,0)=b$

$2x-y-1=0$ zuzenaren malda $m=2$ denez eta $\vec{\nabla}f(0,0)$ eta zuzena paraleloak direnez, orduan, $\frac{b}{a}=2\Leftrightarrow b=2a$

Gainera, deribatu direkzionala OX ardatzaren noranzko positiboan 2 da, hortaz, $f'_x(0,0)=a=2$. Beraz $b=4$.