MUTURRAK

1.- Izan bedi $f(x,y)=x^m+y^m \quad (m\in\mathbb{N}-\{1\})$. Aurkitu funtzio honen mutur erlatiboak $x+y=2$ baldintzarekin.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y)=x^m+y^m+\lambda(x+y-2)$$

Baldintza beharrezkoa:

$$\left.\begin{cases} w'_x=m\cdot x^{m-1}+\lambda=0 \\ w'_y=m\cdot y^{m-1}+\lambda=0\end{cases}\right\rangle \Rightarrow x^{m-1}=y^{m-1}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\begin{cases} y=x \ (m \text{ bikoitia}) \\ y=\pm x \ (m \text{ bakoitia})\end{cases} \\ x+y=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{cases} y=x\Rightarrow x=y=1 \\ y=-x\Rightarrow 0=2\end{cases}$$

Beraz, puntu kritiko bakarra, $A(1,1)$ puntua da.
Baldintza nahikoa:

$$\left.\begin{matrix}\begin{cases} w''_{x^2}=m\cdot(m-1)\cdot x^{m-2} \\ w''_{y^2}=m\cdot(m-1)\cdot y^{m-2} \quad \Rightarrow \quad d^2w(1,1)=m\cdot(m-1)\cdot\left((dx)^2+(dy)^2\right) \\ w''_{xy}=0\end{cases} \\ \text{Eta} \quad x+y=2 \quad\Rightarrow\quad dx+dy=0 \quad\Leftrightarrow\quad dy=-dx\end{matrix}\right\}\Rightarrow d^2w(1,1)>0$$

Orduan, $A(1,1)$ minimo erlatibo baldintzatua da.

2.- Deskonposatu *a* zenbaki positiboa hiru batugai ez-negatiboetako batuketa gisa, euren kuboen batura minimoa izan dadin. Kalkulatu batura hori.

Mutur erlatibo baldintzatuen problema da hau. Lortu behar ditugun hiru batugai ez-negatiboak x, y eta z izanik, $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ funtzioaren minimoa lortu beharra dago $a=x+y+z$ baldintzarekin. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+\lambda(x+y+z-a)$$

Baldintza beharrezkoa (puntu kritikoen kalkulua):

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} w'_x=3x^2+\lambda \\ w'_y=3y^2+\lambda \\ w'_z=3z^2+\lambda\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lambda=-3x^2=-3y^2=-3z^2 \overset{(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)}{\Rightarrow} x=y=z \\ x+y+z=a\end{cases} \Rightarrow 3x=a \Rightarrow x=\frac{a}{3}$$

Beraz, puntu kritiko bakarra lortu dugu: $A=\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

Baldintza nahikoa erabiliko dugu orain puntu hori minimoa dela ziurtatzeko:

$$\begin{cases} w''_{x^2}=6x\Rightarrow w''_{x^2}(A)=2a \\ w''_{y^2}=6y\Rightarrow w''_{y^2}(A)=2a \\ w''_{z^2}=6z\Rightarrow w''_{z^2}(A)=2a \\ w''_{xy}=w''_{xz}=w''_{yz}=0\end{cases} \Rightarrow d^2w(A)=2a\left[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\right] \overset{(*)}{>} 0 \Rightarrow A \text{ minimo da}$$

eta $f(A) = 3\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{9}$

(*) $a = x + y + z$ baldintza kontuan izanik, $dx + dy + dz = 0 \Rightarrow dz = -dx - dy \Rightarrow$ ezin direla hirurak batera nuluak izan.

3.- Aurkitu $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ elipsearen puntuak zeinetarako koordenatu-jatorriarekiko distantzia maximoa eta minimoa den, hurrenez hurren.

$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ funtzioaren maximoa eta minimoa kalkulatu behar ditugu, non (x, y, z) emandako elipsearen puntuak diren, beraz, baldintza bi egiaztatu behar dituzten maximo eta minimo izango dira: $\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z) + \mu \cdot (x + y + 2z - 2)$$

Baina $d(x, y, z) = g \circ f(x, y, z)$, non $g(x) = \sqrt{x}$. Eta $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ eta d funtzioek mutur berdinak dituzte. Beraz, g-renak kalkulatuko ditugu:

$$w(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z) + \mu \cdot (x + y + 2z - 2)$$

Puntu kritikoak lortzeko baldintza beharrezkoa planteatuko dugu:

$$\begin{cases} w'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ w'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ w'_z = 2z - \lambda + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Lehenengo ekuazio bien arteko kenketa kalkulatuz: $2(x - y)(1 + \lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Baldin $y = x \Rightarrow \begin{cases} z = 2x^2 \\ 2x + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \Rightarrow y = 1/2 \text{ eta } z = 1/2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ eta } z = 2 \end{cases}$

Baldin $\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2} = x^2 + y^2$, ezinezkoa dena.

Beraz, bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ eta $B(-1, -1, 2)$.

Orain arte mutur erlatibo baldintzatuez hitz egin badugu ere, multzo itxi eta bornatuan kokaturiko muturrak direnez (elipsean hain zuzen ere), mutur absolutuak izango dira, euren existentzia Weierstrass-en teoremak ziurtatzen duena. Beraz, ez diegu baldintza nahikoa aplikatu beharrik. Bi puntu kritiko hauetarako d funtzioak hartutako balioak besterik ez ditugu kalkulatu behar:

$$d(A)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{eta} \qquad d(B)=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}$$

Eta balio biak konparatuz: $d(A)<d(B)\Rightarrow$ A puntura distantzia minimoa dago eta B puntura distantzia maximoa.

4.- Aurkitu, $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq r^2\right\}$ **eskualdean, puntuak non** $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ **funtzioak maximo eta minimo absolutuak hartzen dituen.**

A multzo itxi eta mugatuan f funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak izan behar dituela Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu.

Lehenengo A eskualdean dauden puntu kritiko libreak kalkulatuko ditugu:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+y=0 \\ f'_y &= 2y+x=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad P_1=(0,0)\in A$$ puntu kritiko bakarra lortzen dugu. Eta $\boxed{f(P_1)=0}$.

Orain, A eskualdearen mugako puntu kritikoak kalkulatuko ditugu (puntu kritiko baldintzatuak alegia). Hiru zati bereizten dira:

- mugako $y=0$ zatia, $\forall x\in[0,r]$:

  $$\left.\begin{aligned} &f(x,y)=x^2+y^2+xy \\ &y=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(x)=x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x=0 \quad \Rightarrow \quad P_1=(0,0)$$

  Eta zati honetan ere funtzio jarraitua, $f(x)=x^2$, multzo itxian, $\forall x\in[0,r]$, dugunez, mugako puntuak ere kontuan hartu behar ditugu, hau da:
  $P_2=(r,0)$. Eta $\boxed{f(P_2)=r^2}$

- mugako $x=0$ zatia, $\forall y\in[0,r]$:
  Aurreko kasuaren simetrikoa da, beraz, $P_3=(0,r)$ puntua dugu. Eta $\boxed{f(P_3)=r^2}$

- mugako $x^2+y^2=r^2$ zatia:
  Hemen Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:
  $W(x,y)=x^2+y^2+xy+\lambda(x^2+y^2-r^2)$

$$\left.\begin{aligned} W'_x &= 2x+y+2\lambda x=0 \\ W'_y &= 2y+x+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda &= -\frac{2x+y}{2x} \\ \lambda &= -\frac{2y+x}{2y} \end{aligned}\right\} 2xy+y^2=2xy+x^2 \Rightarrow x^2=y^2 \left.\vphantom{\begin{aligned}a\\a\\a\end{aligned}}\right\} 2x^2=r^2 \to x=\pm\frac{r}{\sqrt{2}}$$

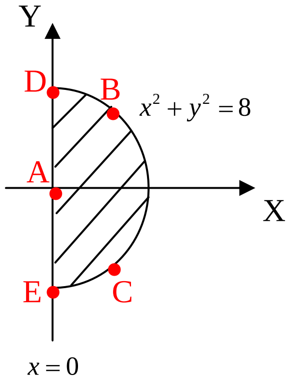
Baina soluzio negatiboa baztertuko dugu A eskualdean ez baitago. Beraz, hemendik aterako dugun puntu bakarra $P_4=\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ izango da. Eta $\boxed{f(P_4)=\frac{3r^2}{2}}$

Puntu guztiak konparatuz, hurrengoa dugu:

Minimo absolutua $P_1(0,0)$ eta Maximo absolutua $P_4=\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$

5.- $z=f(x,y)=x^2+y^2+xy-3$ **funtzioa emanik, kalkulatu mutur absolutuak hurrengo multzoan:**

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le 8\ \wedge\ x\ge 0\right\}$$



f funtzio jarraitua da D multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x=2x+y=0 & \Leftrightarrow\quad y=-2x \\ f'_y=2y+x=0 & \end{cases}\right\rangle \Rightarrow\quad -3x=0\quad\Leftrightarrow\quad x=0\quad\Rightarrow\quad y=0$$

Puntu kritikoa: $A=(0,0)$ $(A\in D)$.

b) Orain, f-ren puntu kritiko baldintzatuak (D multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. D-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $x=0\quad\Rightarrow\quad f(0,y)=F(y)=y^2-3\quad\Rightarrow\quad F'(y)=2y=0\quad\Leftrightarrow\quad y=0$

Berriro ere A puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+y^2=8\quad\Rightarrow\quad w(x,y)=x^2+y^2+xy-3+\lambda(x^2+y^2-8)$ funtzioa definituko dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x+y+2\lambda x=0\Leftrightarrow 2x(1+\lambda)+y=0 \\ w'_y=2y+x+2\lambda y=0\Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+x=0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=-\frac{y}{2x}=-\frac{x}{2y}\ \Leftrightarrow\ x^2=y^2 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}\right\rangle\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 2x^2=8\quad\overset{x\ge 0}{\Rightarrow}\quad x=2\quad\Rightarrow\quad y=\pm 2$$

Beraz, bi puntu kritiko gehiago ditugu: $B=(2,2)$ eta $C=(2,-2)$.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2=8 \ \wedge \ x=0$

Hortik $D=\left(0,2\sqrt{2}\right)$ eta $E=\left(0,-2\sqrt{2}\right)$ puntuak ditugu.

Puntu hauetan *f*-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-3 \quad f(B)=9 \quad f(C)=1 \quad f(D)=5 \quad f(E)=5$$

Beraz, *A* minimo eta *B* maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x^2+y^2\neq 8$

6.- Aurkitu $f(x,y)=xy+2x-\mathrm{L}\left(x^2\cdot y\right)$ funtzioaren puntu kritikoa planoko eskualdean non $x>0$ eta $y>0$, eta estudiatu zein motatako muturra den.

Puntu kritikoa:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=y+2-\dfrac{2xy}{x^2\cdot y}=y+2-\dfrac{2}{x}=0 \\ f'_y=x-\dfrac{x^2}{x^2\cdot y}=x-\dfrac{1}{y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y+2-2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

Beraz, $P\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ puntu kritikoa da.

Zein motatako muturra den lortzeko bigarren diferentzialaren zeinua aztertuko dugu:

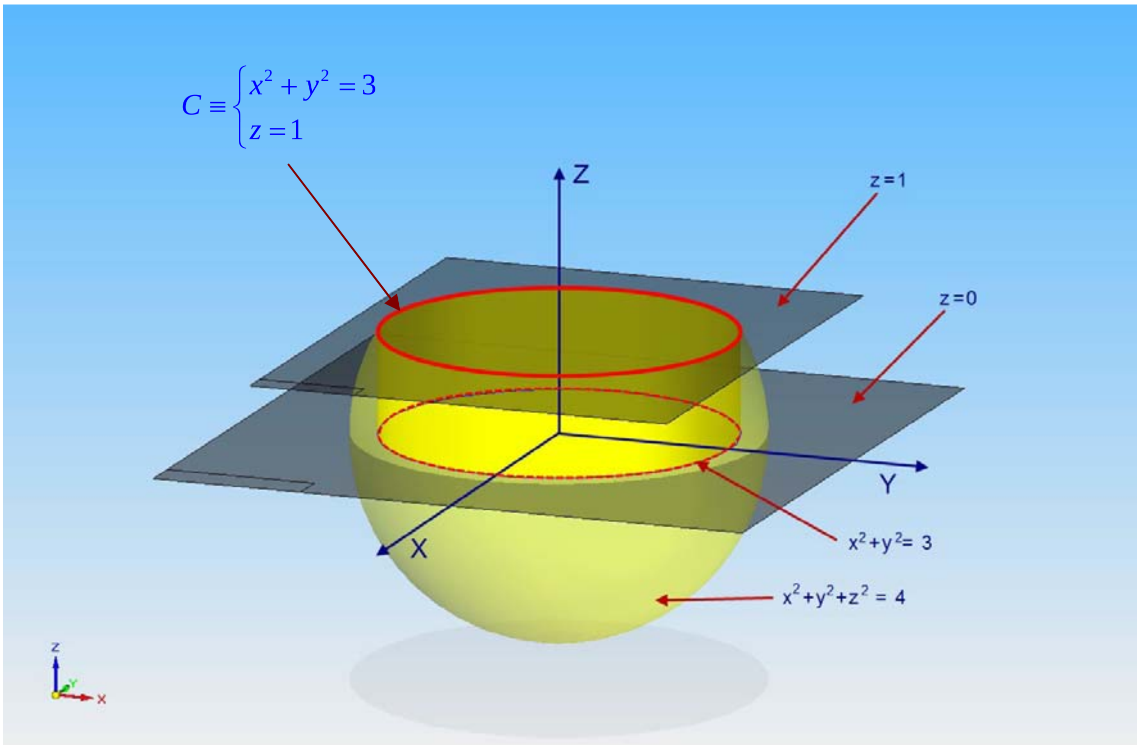
$$\left.\begin{array}{l} f''_{x^2}=\dfrac{2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''_{x^2}(P)=8 \\ f''_{xy}=1 \quad \Rightarrow \quad f''_{x^2}(P)=1 \\ f''_{y^2}=\dfrac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad f''_{x^2}(P)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad d^2f(P)=8(dx)^2+2dxdy+\frac{1}{4}(dy)^2=$$

$$=\left(2\sqrt{2}dx+\frac{1}{2\sqrt{2}}dy\right)^2+\frac{1}{8}(dy)^2>0 \quad \Rightarrow$$

P minimo erlatiboa da.

7.- Aurkitu $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2\leq 4 \ \wedge \ z\leq 1\right\}$ multzoan.

f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.



a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} f'_x = 2x+1=0 \\ f'_y = 2y+1=0 \\ f'_z = 2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\in M$$

b) Orain, f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $z=1 \quad \left(\forall(x,y)/x^2+y^2<3\right) \quad \Rightarrow$

$$f(x,y,1)=x^2+y^2+x+y+2=F(x,y) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F'_x = 2x+1=0 \\ F'_y = 2y+1=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

b.2) $x^2+y^2+z^2=4 \quad (z<1)$

Kasu honetan Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$$\left.\begin{cases} w'_x = 2x+1+2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)+1=0 \\ w'_y = 2y+1+2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+1=0 \\ w'_z = 2z+1+2\lambda z = 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)+1=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2z} \Leftrightarrow x=y=z \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = y = z$$

Baina $z = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \quad \Rightarrow \quad D = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ puntua dugu bakarrik.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2+z^2=4 \ \wedge \ z=1$.
Bi baldintza hauek espazioko C kurba definitzen dute (marrazkian marra lodi gorria).

Beraz, $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,1) = x+y+5 = F(x,y)$ eta

$x^2+y^2=3$ baldintza dugu. Berriro ere Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y) = x+y+5+\lambda(x^2+y^2-3)$$

$$\left.\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x = 1+2\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2x} \\ w'_y = 1+2\lambda y = 0 \Leftrightarrow \lambda \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2x} \end{array}\right\rangle \Rightarrow x=y \\ x^2+y^2=3 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow 2x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = y$$

$$\Rightarrow \quad E = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \text{ eta } F = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$$

Lortutako puntu kritikoetan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A) = -\frac{3}{4} \quad f(B) = \frac{3}{2} \quad f(D) = 4-2\sqrt{3} \quad f(E) = 5+\sqrt{6} \quad f(F) = 5-\sqrt{6}$$

Beraz, A minimo eta E maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \quad \Rightarrow \quad 1=0\#$

8.- $f(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2$ **funtzioa emanik, aurkitu bere mutur absolutuak** $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{8}\le x^2+y^2\le 8\right\}$ **multzoan.**

Weierstraas-en teoremak ziurtatzen digu multzo itxi eta bornatuan funtzio jarraituak maximo eta minimo absolutuak dituela.

a) Puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x=2x-2=0\Leftrightarrow x=1 \\ f'_y=2y+2=0\Leftrightarrow y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A(1,-1)\in M \text{ puntu kritiko bakarra lortzen da.}$$

b) Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, *M* multzoaren mugakoak hain zuzen ere. Beraz, bi kasu bereiziko ditugu:

(i) $x^2+y^2=8$ baldintza egiaztatzen dutenak.

$$w(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2+\lambda(x^2+y^2-8)$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_x=2x-2+2\lambda x=0 \\ w'_y=2y+2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{-1-y}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y=-x \\ x^2+y^2=8 \end{array}\right. \Rightarrow \quad 2x^2=8\Rightarrow x=\pm 2$$

Hortaz, bi puntu kritiko ditugu mugaren zati horretan: *B*(2,-2) eta *C*(-2,2).

(ii) $x^2+y^2=\frac{1}{8}$ baldintza egiaztatzen dutenak.

$$w(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+2+\lambda\left(x^2+y^2-\frac{1}{8}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} w'_x=2x-2+2\lambda x=0 \\ w'_y=2y+2+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \quad 2x^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{4}$$

Beraz, beste bi puntu kritiko gehiago ditugu: $D\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$ eta $E\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Orain 5 puntu kritikoetan funtzioak hartzen duen balioa kalkulatuko dugu:

$f(A)=0$

$f(B)=2$

$f(C)=18$

$f(D)=\frac{9}{8}$

$f(E)=\frac{25}{8}$

Hortaz, *A* minimo absolutua da eta *C* maximo absolutua.

9.- Planoko (x,y) puntuaren tenperatura $T(x,y)=25+xy$ funtzioak ematen du. Barraskilo bat plano horretako $x^2+y^2=2$ kurbatik herrestan doa. Aurkitu puntuak non barraskiloak tenperatura maximoa eta minimoa jasango duen.

T funtzioaren mutur erlatibo baldintzatuak kalkulatu behar dira:

$$w(x,y)=25+xy+\lambda(x^2+y^2-2)$$

Baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} w'_x &= y+2\lambda x=0 \\ w'_y &= x+2\lambda y=0 \end{aligned}\right\} \underset{(x\neq 0,y\neq 0)}{\Rightarrow} \quad \lambda=-\dfrac{y}{2x}=-\dfrac{x}{2y} \Leftrightarrow x^2=y^2 \\ x^2+y^2-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow y=\pm 1$$

Beraz, 4 puntu kritiko lortu ditugu: *A*(1,1), *B*(1,-1), *C*(-1,1) eta *D*(-1,-1).

Baldintza, $x^2+y^2=2$, berriz, multzo itxi eta mugatua denez (zirkunferentzia hain zuzen) eta *T* funtzio jarraitua denez multzo horretan, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu mutur absolutuak existituko direla. Hortaz, baldintza nahikoa egiaztatu beharrean, puntu kritikoetan *T* funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatu besterik ez dugu egin behar:

$$T(A)=T(D)=26 \qquad \text{eta} \qquad T(B)=T(C)=24$$

Beraz, *A* eta *D* maximoak dira eta *C* eta *D* minimoak.

10.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+2x+y^2$ funtzioaren maximo eta minimo absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; x^2+4y^2\leq 24\right\}$ multzoan.

Funtzio jarraitua multzo itxi eta mugatuan dugunez, Weierstrass-en teoremak maximo eta minimo absolutuak existitzen direla multzo horretan ziurtatzen digu

Hasteko, baldintzarik gabeko puntu kritikoak kalkulatuko ditugu:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= 2x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \\ f'_y &= 2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A(-1,0)\in M \ \text{ puntu kritiko bakarra lortzen dugu.}$$

Orain puntu kritiko baldintzatuak aurkitu ditugu, *M*-ren mugan daudenak alegia. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=x^2+2x+y^2+\lambda(x^2+4y^2-24)$$

$$\begin{cases} w'_x=2x+2+2\lambda x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1+\lambda x=0 \\ w'_y=2y+8\lambda y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y+4\lambda y=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ \lambda=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \\ x^2+4y^2=24 \end{cases}$$

Baldin $y=0 \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=\pm\sqrt{24}$

Baldin

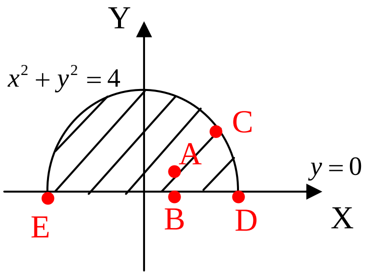
$$\lambda=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{16}{9}+4y^2=24 \Leftrightarrow y^2=\frac{50}{9} \Rightarrow y=\pm\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Beraz, $B=\left(\sqrt{24},0\right)$, $C=\left(-\sqrt{24},0\right)$, $D=\left(-\frac{4}{3},\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$, $E=\left(-\frac{4}{3},-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$ puntu kritikoak lortzen ditugu.

Orain lortutako bost puntu kritikoetan f funtzioa balioesten dugu:
$f(A)=-1$, $f(B)=24+2\sqrt{24}$, $f(B)=24-2\sqrt{24}$, $f(D)=\frac{14}{3}$, $f(E)=\frac{14}{3}$.

Beraz, A minimo absolutua da eta B maximo absolutua.

11.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y-1$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}$ multzoan.



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x=2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \\ f'_y=2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \end{cases}\right\rangle \Rightarrow A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) Orain, f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=0 \Rightarrow f(x,0)=F(x)=x^2-x-1 \Rightarrow F'(x)=2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Eta $B=\left(\frac{1}{2},0\right)$ puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+y^2=4 \Rightarrow w(x,y)=x^2+y^2-x-y-1+\lambda(x^2+y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left.\begin{cases} w'_x = 2x-1+2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y = 2y-1+2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)-1=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2y} \Leftrightarrow x=y \Bigg\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \overset{y\geq 0}{\Rightarrow} \quad y=\sqrt{2}$$

Beraz, $C = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ puntu kritikoa dugu.

b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak): $x^2+y^2=4 \ \wedge \ y=0$

Hortik $D=(2,0)$ eta $E=(-2,0)$ puntuak ditugu.

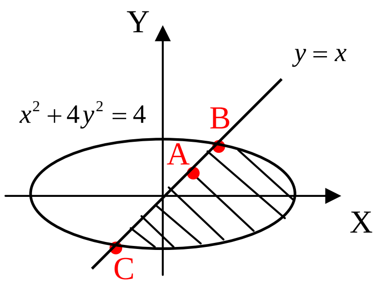
Puntu hauetan guztietan *f*-ren balioak konparatuz:

$$f(A) = -\frac{3}{2} \quad f(B) = -\frac{5}{4} \quad f(C) = 3-2\sqrt{2} \quad f(D)=1 \quad f(E)=5$$

Beraz, *A* minimo eta *E* maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x=0 \quad \Rightarrow \quad -1=0$

12.- Aurkitu $f(x,y) = x^2+4y^2-x-4y-1$ funtzioaren mutur absolutuak $M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+4y^2\leq 4, y\leq x\right\}$ multzoan.



f funtzio jarraitua da *M* multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan *f*-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) *f*-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x = 2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2} \\ f'_y = 8y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{1}{2} \end{cases}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \ \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) Orain, *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak (*M* multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. *M*-ren muga bi zatitan bananduta dagoenez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, hiru kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=x \quad \Rightarrow \quad f(x,x)=F(x)=5x^2-5x-1 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=10x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}$

Eta, berriro, *A* puntu kritikoa lortzen dugu.

b.2) $x^2+4y^2=4 \Rightarrow w(x,y)=x^2+4y^2-x-4y-1+\lambda(x^2+4y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y=8y-4+8\lambda y=0 \Leftrightarrow 8y(1+\lambda)-4=0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1+\lambda=\frac{1}{2x}=\frac{4}{8y} \Leftrightarrow x=y \\ x^2+4y^2=4 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

(*) Baldin $x=0 \Rightarrow -1=0$

$$\Rightarrow \quad 5x^2=4 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}=y$$

Beraz, $B=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ eta $C=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ puntu kritikoak ditugu.

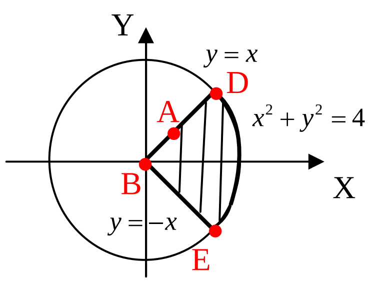
b.3) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira. Mugako erpinak, alegia (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak: $x^2+4y^2=4 \;\wedge\; y=x$
Kasu honetan, aldez aurretik lortutako B eta C puntuak lortzen ditugu.

Puntu hauetan guztietan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{9}{4} \qquad f(B)=\frac{3\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}} \qquad f(C)=\frac{3\sqrt{5}+10}{\sqrt{5}}$$

Beraz, A minimo eta C maximo absolutuak dira.

13.- Aurkitu $f(x,y)=x^2+y^2-x-y-1$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x^2+y^2\le 4,\ x\ge|y|\right\}$ multzoan.



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x=2x-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2} \\ f'_y=2y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1}{2} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \quad A=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in M \text{ puntu kritikoa da.}$$

b) f-ren puntu kritiko baldintzatuak (M multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. M-ren mugan hiru zati ditugunez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, lau kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y = x \;\Rightarrow\; F(x) = 2x^2 - 2x - 1 \;\Rightarrow\; F'(x) = 4x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; A$

b.2) $y = -x \;\Rightarrow\; F(x) = 2x^2 - 1 \;\Rightarrow\; F'(x) = 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; B = (0,0)$

b.3) $x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; w(x,y) = x^2 + y^2 - x - y - 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w'_x = 2x - 1 + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda) - 1 = 0 \\ w'_y = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda) - 1 = 0 \end{array}\right\rangle \overset{(*)}{\Rightarrow} 1 + \lambda = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2y} \Leftrightarrow x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Bigg\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x^2 = 4 \;\overset{x \geq 0}{\Rightarrow}\; x = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; D = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$ puntu kritikoa dugu.

b.4) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak. Mugako erpinak):

$y = x \;\wedge\; y = -x \;\Rightarrow\; B$

$x^2 + y^2 = 4 \;\wedge\; y = x \;\Rightarrow\; D$

$x^2 + y^2 = 4 \;\wedge\; y = -x \;\Rightarrow\; E = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

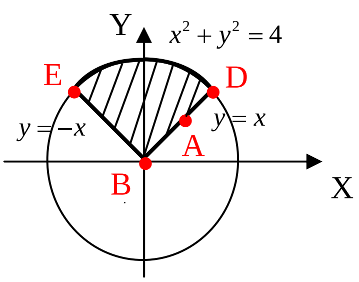
Puntu hauetan guztietan f-ren balioak konparatuz:

$$f(A) = -\frac{3}{2} \quad f(B) = -1 \quad f(D) = 3 - 2\sqrt{2} \quad f(E) = 3$$

Beraz, A minimo eta E maximo absolutuak dira.

(*) Baldin $x = 0 \;\Rightarrow\; -1 = 0$

14.- Aurkitu $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y - 1$ funtzioaren mutur absolutuak $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; x^2 + y^2 \leq 4,\; y \geq |x|\right\}$ multzoan.



f funtzio jarraitua da M multzo itxi eta mugatuan, orduan Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu multzo horretan f-ren maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.

a) f-ren puntu kritiko ez-baldintzatuak kalkulatzen hasiko gara:

$$\left.\begin{cases} f'_x = 2x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{2} \\ f'_y = 2y - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{1}{2} \end{cases}\right\rangle \;\Rightarrow\; A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in M$$ puntu kritikoa da.

b) *f*-ren puntu kritiko baldintzatuak (*M* multzoaren mugan daudenak) kalkulatuko ditugu. *M*-ren mugan hiru zati ditugunez, bakoitza baldintza baten bitartez adierazita dagoena, lau kasu bereiziko ditugu:

b.1) $y=x \quad \Rightarrow \quad F(x)=2x^2-2x-1 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=4x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A$

b.2) $y=-x \quad \Rightarrow \quad F(x)=2x^2-1 \quad \Rightarrow \quad F'(x)=4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad B=(0,0)$

b.3) $x^2+y^2=4 \quad \Rightarrow \quad w(x,y)=x^2+y^2-x-y-1+\lambda(x^2+y^2-4)$ funtzioa dugu Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiltzeko. Honela:

$$\left.\begin{cases} w'_x=2x-1+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)-1=0 \\ w'_y=2y-1+2\lambda y=0 \Leftrightarrow 2y(1+\lambda)-1=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}\right\rangle \Rightarrow 2(x-y)(1+\lambda)=0 \left\langle \begin{array}{l} \lambda=-1 \\ x=y \end{array}\right.$$

$\lambda=-1 \quad \Rightarrow \quad -1=0\#$

$$x=y \quad \Rightarrow \quad 2x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{2} \quad \overset{y\geq 0}{\Rightarrow} \quad y=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad D=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad E=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

puntu kritikoak ditugu.

b.4) Mugaren zati bien arteko ebaki-puntuak ere kontuan hartu behar dira (hau da, baldintza biak batera egiaztatzen dituztenak. Mugako erpinak):

$y=x \ \wedge \ y=-x \quad \Rightarrow \quad B$

$x^2+y^2=4 \ \wedge \ y=x \quad \Rightarrow \quad D$

$x^2+y^2=4 \ \wedge \ y=-x \quad \Rightarrow \quad E$

Puntu hauetan guztietan *f*-ren balioak konparatuz:

$$f(A)=-\frac{3}{2} \quad f(B)=-1 \quad f(D)=3-2\sqrt{2} \quad f(E)=3$$

Beraz, *A* minimo eta *E* maximo absolutuak dira.

15.- $F(x,y,z)=x^2-8x+(3x^2+1)(y^2z+1)+2e^z=0$ **ekuazioa eta** $P(a,0,0)$ **puntua emanik:**

a) Kalkulatu *a* parametroaren balioak zeinetarako aurreko ekuazioak *x* eta *y* aldagaiko *z* funtzio inplizitua, $z=z(x,y)$**, definitzen duen *P* puntuaren ingurunean.**

b) Aurkitu esandako $z=z(x,y)$ **funtzioaren mutur erlatiboak non** $z\neq 0$**.**

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i) $F(a,0,0)=a^2-8a+(3a^2+1)(0+1)+2e^0=4a^2-8a+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}=\frac{8\pm 4}{8} \Rightarrow a=\frac{3}{2} \text{ eta } a=\frac{1}{2}$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} F'_x = 2x - 8 + 6x(y^2 z + 1) \\ F'_y = 2yz(3x^2 + 1) \\ F'_z = (3x^2 + 1)\cdot y^2 + 2e^z \end{array}\right\} \text{ jarraituak } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

iii) $F'_z(a,0,0) = 2 \neq 0$

Beraz, $P(a,0,0)$ puntuaren ingurunean $\exists z = z(x,y)$ deribatu partzial jarraituekin $z(a,0) = 0$ delarik.

b) z funtzioak bete behar duen baldintza beharrezkoa mutur erlatiboak izateko:

$$\left\{\begin{array}{l} z'_x = 0 \Leftrightarrow F'_x = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + 6x(y^2 z + 1) = 0 \\ z'_y = 0 \Leftrightarrow F'_y = 0 \Leftrightarrow 2yz(3x^2+1) = 0 \underset{z\neq 0}{\Rightarrow} y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad 2x - 8 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Eta hasierako ekuazioan balio hauek biak ordezkatuz:

$$1 - 8 + (3+1) + 2e^z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z = \mathrm{L}\left(\frac{3}{2}\right)$$

Beraz, puntu singular bakarra lortu dugu, $A(1,0,\mathrm{L}(3/2))$ ($z(1,0) = \mathrm{L}(3/2)$ izanik).

Puntu honetarako baldintza nahikoa aztertuko dugu:

$$d^2 z = z''_{x^2}(dx)^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}(dy)^2$$

Puntu kritikoetan $z''_{x^2} = -\dfrac{F''_{x^2}}{F'_z} \quad z''_{xy} = -\dfrac{F''_{xy}}{F'_z} \quad z''_{y^2} = -\dfrac{F''_{y^2}}{F'_z}$, hortaz:

$$\left.\begin{array}{ll} F''_{x^2} = 2 + 6(y^2 z + 1) & \Rightarrow F''_{x^2}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 8 \\ F''_{y^2} = 2z(3x^2+1) & \Rightarrow F''_{y^2}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 8\mathrm{L}(3/2) \\ F''_{xy} = 12xyz & \Rightarrow F''_{xy}(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 0 \\ F'_z = y^2\cdot(3x^2+1) + 2e^z & \Rightarrow F'_z(1,0,\mathrm{L}(3/2)) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 z(1,0) = -\frac{1}{3}\left(8(dx)^2 + 8\mathrm{L}(3/2)(dy)^2\right) < 0$$

Beraz, A maximo erlatiboa da.

16.- Kalkulatu $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 15\right\}$ **multzoan** $z = z(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2\cdot y^2$ **funtzioaren mutur absolutuak.**

Funtzio jarraitua multzo itxi eta bornatuan daukagunez, Weiertrass-en teoremak ziurtatzen digu gutxienez behin maximo eta minimo absolutuak hartu behar dituela.

a) Baldintzarik gabeko puntu kritikoak kalkulatzen hasiko gara:

$$\begin{cases} z'_x = 8x - 2x\cdot y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(4-y^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases} \\ z'_y = 18y - 2y\cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow 2y(9-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 3 \end{cases} \end{cases}$$

Honela 5 puntu kritiko lortzen ditugu: A(0,0), B(3,2), C(3,-2), D(-3,2) eta E(-3,-2), eta bostak *M* multzoaren barnealdean daude.

b) Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu, M multzoaren mugan daudenak hain zuzen ere. Horretarako Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2\cdot y^2 + \lambda(x^2+y^2-15)$$

$$\begin{cases} w'_x = 8x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(4-y^2+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda = y^2-4 \end{cases} \\ w'_y = 18y - 2yx^2 + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(9-x^2+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \lambda = x^2-9 \end{cases} \\ x^2+y^2=15 \end{cases}$$

Baldin $x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{15} \Rightarrow \lambda=-9$

Baldin $y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{15} \Rightarrow \lambda=-4$

Baldin $\lambda = y^2-4 = x^2-9 \Rightarrow y^2 = x^2-5$

Eta $x^2+y^2=15$, orduan, $2x^2-20=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{10} \Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$

Beraz, 8 puntu kritiko gehiago atera zaizkigu: F$(0,\sqrt{15})$, G$(0,-\sqrt{15})$, H$(\sqrt{15},0)$, I$(-\sqrt{15},0)$, J$(\sqrt{10},\sqrt{5})$, K$(\sqrt{10},-\sqrt{5})$, L$(-\sqrt{10},\sqrt{5})$, M$(-\sqrt{10},-\sqrt{5})$.

Amaitzeko, lortutako 13 puntu kritikoetan *z* funtzioak hartzen dituen balioak konparatu besterik ez dugu egin behar:

$z(A)=0$, $z(B)=z(C)=z(D)=z(E)=36$, $z(F)=z(G)=135$, $z(H)=z(I)=60$, $z(J)=z(K)=z(L)=z(M)=35$

Hortaz, A minimo absolutua da eta F eta G maximo absolutuak dira.

17.- Aurkitu distantzia minimoa $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik $x^2+y^2+z^2=1$ esferaraino. (Ebatzi ariketa analitikoki, muturrei buruzko teoria erabiliz)

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik $x^2+y^2+z^2=1$ esferaraino distantzia funtzio honek ematen digu:

$$d(x,y,z) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Bere minimoa kalkulatu behar dugu, $x^2+y^2+z^2=1$ baldintzarekin.

Dakigunez, $f(x,y,z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$ funtzioaren muturrak eta aurreko funtzioarenak berdinak dira, beraz, honenak kalkulatuko ditugu.

Gainera, $x^2+y^2+z^2=1$ multzo itxi eta bornatua da, eta f funtzio jarraitua, beraz, Weiertrass-en teorema aplikatuz, badakigu maximo eta minimo absolutuak existitzen direla. Hau da, lortu behar dugun minimoa, mutur absolutua da.

Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliz:

$$w(x,y,z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

Funtzio honi muturrak edukitzeko baldintza beharrezkoa aplikatzen zaio:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} w'_x=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\lambda x \\ w'_y=2\left(y-\frac{1}{2}\right)+2\lambda y \quad \Rightarrow \lambda=-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x}=-\dfrac{y-\frac{1}{2}}{y}=-\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z} \Leftrightarrow x=y=z \\ w'_z=2\left(z-\frac{1}{2}\right)+2\lambda z \end{array}\right. \\ \hfill x^2+y^2+z^2-1=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Beraz, bi puntu kritiko atera zaizkigu: $A=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ eta $B=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, bata maximo absolutua eta bestea minimo absolutua. Kalkulatuko ditugu, beraz, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntutik puntu hauetarainoko distantziak:

$$d(A)=\sqrt{3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2} \quad \text{eta} \quad d(B)=\sqrt{3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Orduan, distantzia minimoa $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ da.

18.- Aurkitu $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1,\, x>0,\, y>0\right\}$ **multzoan** $f(x,y)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y$ **funtzioaren mutur erlatiboak.**

Baldintzarik gabeko mutur erlatiboak kalkulatzen hasiko gara:

$\left\{\begin{array}{l} f'_x=\frac{1}{x}\neq 0 \\ f'_y=\frac{1}{y}\neq 0 \end{array}\right.$ Sistema honek soluziorik ez dauka, hortaz ez da mutur erlatibo librerik existitzen.

Mutur erlatibo baldintzatuak egon daitezke: $x^2+y^2=1$ (M multzoaren muga) baldintza egiaztatzen dutenak hain zuzen ere. Kalkulatzeko Lagrange-ren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu:

$$w(x,y)=\mathrm{L}x+\mathrm{L}y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases}\begin{cases} w'_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0\Leftrightarrow 2\lambda x^2+1=0 \\ w'_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0\Leftrightarrow 2\lambda y^2+1=0\end{cases} \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2x^2}=-\dfrac{1}{2y^2}\Leftrightarrow x^2=y^2 \underset{x>0,y>0}{\Rightarrow} x=y \\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2=1\underset{x>0}{\Rightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}=y \quad \text{eta} \quad \lambda=-1$$

Puntu kritiko bakarra dugu: $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Puntu honi muturra izateko baldintza nahikoa aplikatuko zaio:

$$\left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}+2\lambda\Rightarrow w''_{x^2}(A)=-4 \\ w''_{xy}=0 \\ w''_{y^2}=-\dfrac{1}{y^2}+2\lambda\Rightarrow w''_{y^2}(A)=-4\end{array}\right\}\Rightarrow d^2w(A)=-4(dx)^2-4(dy)^2$$

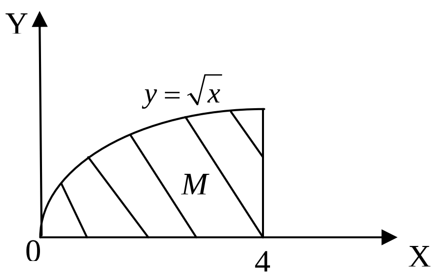
Bestalde, $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0\Rightarrow\varphi'_y=2y\Rightarrow\varphi'_y(A)\neq 0\Rightarrow\exists y=y(x)$

Orduan, ekuazio horretan diferentziala kalkulatuz: $2xdx+2ydy=0 \Rightarrow dy=dx$ (A puntuan). Eta aurreko adierazpenean ordezkatuz:

$d^2w(A)=-4(dx)^2-4(dy)^2=-8(dx)^2<0\Rightarrow$ A maximo erlatiboa da (M multzoan).

19.- Kalkulatu $f(x,y)=x^2-4xy+5$ funtzioaren mutur absolutuak $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le x\le 4, 0\le y\le\sqrt{x}\right\}$ multzoan.

f jarraitua denez M multzo itxi eta mugatuan, Weiestrass-en teoremak ziurtatzen digu maximo eta minimo absolutuak existitzen direla.



Puntu kritiko ez-baldintzatuekin hasiko gara:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x-4y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{x}{2} \\ f'_y=-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=(0,0)\in M \text{ puntu kritiko bakarra.}$$

Orain puntu kritiko baldintzatuak kalkulatuko ditugu (M-ren mugakoak hain zuzen ere).
Hiru zati bereiziko ditugu:

i) $y=0 \quad \forall x\in[0,4] \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(x,y)=x^2+5=F(x) \quad \Rightarrow \quad F'(x)=2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad A$

Eta tarte honetako mugetan: A eta $B(4,0)$ puntu kritikoak ditugu.

ii) $x=4 \quad \forall y\in[0,2] \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(x,y)=21-16y=G(y) \quad \Rightarrow \quad G'(y)=-16\neq 0$

Eta hemen ere multzo itxiaren mugak kontuan hartu behar ditugu: A eta $D(4,2)$

iii) $y=\sqrt{x} \quad \forall x\in[0,4] \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x,y)=x^2-4x^{3/2}+5=H(x) \quad \Rightarrow \quad H'(x)=2x-6x^{1/2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=0 \quad \Rightarrow \quad A \\ x=9\notin M \end{cases}$$

Zati itxi honetarako, mugak aurreko A eta D puntuak lirateke.

Orain, lortutako puntu kritikoetan f-ren balioa balioesten dugu:

$$f(A)=5,\ f(B)=21 \text{ eta } f(D)=-11$$

Beraz, B maximo eta D minimo absolutuak dira.