BERRETURA-SERIEAK

SERIEZKOGARAPENAK

1.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n$ berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura.

Balio absolutuen serieari D`Alembert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)\cdot|x|^{n+1}}{(2n+2)\cdot|x|^n}=|x|<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\Rightarrow R=1$ (Konbergentzi erradioa)

$x=1$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)$ dibergentea da.

$x=-1$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(2n+2)$ ez da konbergentea.

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n$ konbergentea da (absolutuki) $\forall x\in(-1,1)$. Hortaz:

$$\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n \quad \forall x\in(-1,1)$$

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean $\forall x\in(-1,1)$:

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}2x^{n+1}\overset{(1)}{=}\frac{2x^2}{1-x} \quad \forall x\in(-1,1)$$

Emaitza hau deribatuz:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)\cdot x^n=\left(\frac{2x^2}{1-x}\right)'=\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2} \quad \forall x\in(-1,1)$$

(1) Serie geometrikoa da: $r=x$.

2.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura.

Balio absolutuen serieari D`Alembert aplikatuko diogu:

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)}\cdot\frac{n}{2^n\cdot|x|^n}=2|x|<1\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow R=\frac{1}{2}$ (Konbergentzi erradioa)

$x=\frac{1}{2}$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ dibergentea da.

$x=-\frac{1}{2}$ puntuan: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ baldintzaz konbergentea da (Leibniz).

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$ konbergentea da $\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Hau da:

$$\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n \quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Eta deribagarria da $\forall x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^{n-1}\overset{(1)}{=}\frac{2}{1-2x}\quad \forall x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Emaitza hau integratuz ($S(0)=0$):

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=\int_0^x\frac{2}{1-2t}dt=-\mathrm{L}(1-2x)=f(x)\quad \forall x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Baina $x=-\frac{1}{2}$ puntuan $\exists S(x)$ eta $\exists f(x)$ jarraituak. Orduan:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n=-\mathrm{L}(1-2x)\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

(1) Serie geometrikoa da: $r=2x$.

3.- $\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^{2n-1}$ berretura-seriea emanik:

a) Aurkitu bere konbergentzi arloa.

b) Kalkulatu bere batura $x=\frac{1}{2}$ baliorako.

a) Balio absolutuen serieari D´Alambert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)\cdot|x|^{2n+1}}{2n\cdot|x|^{2n-1}}=|x|^2=x^2<1\quad\Leftrightarrow\quad x\in(-1,1)$$

Baldin $x=1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}2n$ dibergentea da

Baldin $x=-1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}-2n$ dibergentea da

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^{2n-1}$ konbergentea da (absolutuki) $\forall x\in(-1,1)$.

b) $\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^{2n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$. Eta integragarria da $[0,x]$ tartean $\forall x\in(-1,1)$:

$$\forall x\in(-1,1)\quad \int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\overset{(1)}{=}\frac{x^2}{1-x^2}\quad\Rightarrow\quad S(x)=\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x}{(1-x^2)^2}\quad \forall x\in(-1,1)$$

Baldin $x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad S\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{16}{9}$

(1) Serie geometrikoa da, arrazoia $r=x^2$ delarik.

4.- Aurkitu $f(x)=e^x\cdot\dfrac{1}{1-x}$ funtzioaren berredura-seriezko garapena, konbergentzi erradioa kalkulatuz.

$f(x)=g(x)\cdot h(x)$ non:

$$g(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \forall x\in\mathbb{R} \qquad \text{eta} \qquad h(x)=\frac{1}{1-x}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

(*) $r=x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da.

Orduan:

$$f(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Konbergentzi erradio, beraz, $R=1$.

5.- $f(x)=\sqrt{1+x}$ funtzioa emanik, aurkitu Maclaurin-en 1. mailako polinomioa eta dagokion Lagrange-ren hondarra. Emaitza hori erabiliz, kalkulatu $\sqrt{2}$ -ren balio hurbildua eta bornatu hurbilketa horretan egindako errorea.

Planteatu behar dugun hurbilketa polinomikoa honako hau da:

$$f(x)=P_1(x)+R_1(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}\cdot x^2$$

$$\text{non } 0<\theta<1 \qquad (*)$$

$f(x)=\sqrt{1+x}\Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{4(1+x)^{3/2}}\Rightarrow f''(\theta x)=-\dfrac{1}{4(1+\theta x)^{3/2}}$

Beraz:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4(1+\theta x)^{3/2}\cdot 2!}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\theta x)^{3/2}}$$

Orduan, $f(1)=\sqrt{2}\simeq P_1(1)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ eta hurbilketa honetan egindako errorea:

$$\text{Errorea}=\left|R_1(1)\right|=\left|-\frac{1}{8(1+\theta)^{3/2}}\right|=\left|\frac{1}{8(1+\theta)^{3/2}}\right|\overset{(*)}{<}\frac{1}{8}$$

6.- a) Aurkitu $f(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, tarte irekia non baliozkoa den adieraziz.
b) Kalkulatu, deribatu gabe, $f''(0)$ eta $f'''(0)$.

a) Newton-en binomioaren bitartez garatuko dugu:

$$f(x)=\left(1+4x^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3/2}{n}\cdot\left(4x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3/2}{n}\cdot 4^n\cdot x^{2n}\quad \forall x\,/\left|4x^2\right|<1\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

b) Lortutako garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea dela kontuan izanik, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$, orduan:

Baldin $n=1$: $\binom{-3/2}{1}\cdot 4x^2=\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2\quad\Leftrightarrow\quad f''(0)=-\frac{3}{2}\cdot 4\cdot 2=-12$

Eta garapeneko gai guztiak berretura bikoitiak direnez $\Rightarrow$ $f'''(0)=0$.

7.- Aurkitu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}$ berredura-seriearen konbergentzi arloa eta kalkulatu bere batura.

Balio absolutuen serieari D`Alambert aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{e^{n+1}\cdot(n+1)}\cdot\frac{e^n\cdot n}{|x|^n}=\frac{|x|}{e}<1\Leftrightarrow x\in(-e,e)$$

Baldin $x=-e\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(-e)^n}{e^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$ dibergentea da.

Baldin $x=e\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot e^n}{e^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ baldintzaz konbergentea da.

Orduan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}$ konbergentea da $\forall x\in\left(-e,e\right]$. Beraz:

$\exists S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}\quad\forall x\in\left(-e,e\right]$ eta deribagarria da $\forall x\in(-e,e)$. Hau da:

$$\exists S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}}{e^n}\overset{(*)}{=}\frac{1/e}{1+x/e}=\frac{1}{x+e}\quad\forall x\in(-e,e)$$

Emaitza hau integratuz:

$$S(x)-\underbrace{S(0)}_{=0}=S(x)=\int_0^x\frac{1}{t+e}dt=\mathrm{L}(t+e)\Big|_0^x=\mathrm{L}(x+e)-1\quad\forall x\in(-e,e)$$

$$x=e \text{ puntuan }\begin{cases}\exists S(x)\text{ eta jarraitua da}\\ \exists\mathrm{L}(x+e)-1\text{ eta jarraitua da}\end{cases}$$

Orduan, $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{e^n\cdot n}=\mathrm{L}(x+e)-1\quad\forall x\in\left(-e,e\right]$

(*) Serie geometrikoa da, arrazoia $r=-\frac{x}{e}$.

8.- a) Aurkitu $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ **funtzioaren berretura-seriezko garapena, non den baliagarria adieraziz.**
b) Kalkulatu, deribatu gabe, $f'''(0)$ **.**

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x+2-x+2}{(x+2)^2}}{1+\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2}=\frac{4}{x^2+4x+4+x^2-4x+4}=\frac{4}{2x^2+8}=\frac{1/2}{\dfrac{x^2}{4}+1}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot x^{2n}\quad \forall x\in(-2,2)$$

(*) Serie geometrikoaren batura, $r=-\dfrac{x^2}{4}\Rightarrow$ konbergentea $\Leftrightarrow\left|-\dfrac{x^2}{4}\right|<1\Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean $\forall x\in(-2,2)$:

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad \forall x\in(-2,2)\Leftrightarrow f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad \forall x\in(-2,2)$$

$x=-2$ puntuan $\nexists f$.

$x=2$ puntuan:

$$\begin{cases}\exists f \text{ eta jarraitua da.}\\ -\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n+1}}{2n+1}=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\text{ bald. konberg. da}\Rightarrow\exists\text{batura jarraitua}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad \forall x\in(-2,2]$$

b) Lortutako berretura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea da. Hau da, x^{2n+1} gaiaren koefizientea $\dfrac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$ da, beraz:

$$\frac{f^{2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\cdot(2n+1)}$$

Orduan, baldin $n=1$:

$$\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{-1}{2^3\cdot 3}\quad\Leftrightarrow\quad f'''(0)=-\frac{3!}{2^3\cdot 3}=-\frac{1}{4}$$

9.- $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ **funtzioa emanik,**

a) Irudikatu *f*, gutxi gorabehera, aldez aurretik bere definizio-eremua, asintotak eta gorakortasuna - beherakortasuna estudiatuz.

b) Garatu *f* berretura-serietan, bere konbergentzi arloa adieraziz.

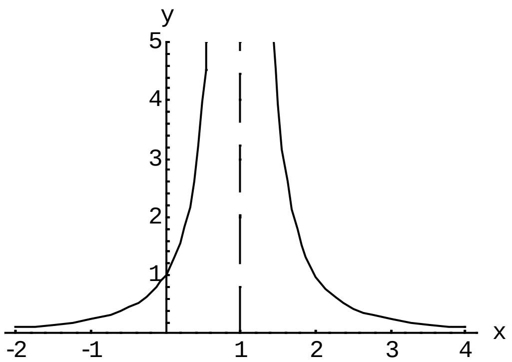
c) Kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^{n-1}}$ **seriearen batura.**

a) $D=\mathbb{R}-\{1\}$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1$ asintota bertikala da

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0$ asintota horizontala da. Beraz, ez dago asintota zeiharrik.

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}\quad \forall x\in D \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\forall x<1 & f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ gorakorra da}\\ \forall x>1 & f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f \text{ beherakorra da}\end{cases}$$



b) Bi eratan:

b.1) Izan bedi $g(x)=\dfrac{1}{1-x}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) $r=x$ arrazoiko serie geometrikoaren batura, konbergentea, beraz, $\forall x \,/\, |r|=|x|<1$

Eta deribagarria da $\forall x\in(-1,1)$:

$$g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}\quad \forall x\in(-1,1)$$

Baldin $x=1 \quad\Rightarrow\quad \nexists f$

Baldin $x=-1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\exists f\\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n \quad \text{ez da konbergentea}\end{cases}$

Orduan $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

b.2) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) Newton-en binomioaren garapena.

Oharra: $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{10^{n-1}}\overset{(**)}{=} f\left(\dfrac{1}{10}\right)=\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^2}=\dfrac{100}{81}$

(**) b) atalean ikusi dugunez, $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} \quad \forall x\in(-1,1)$

10.- Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}\left(4+x^4\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena non den baliagarria adieraziz.

$$f(x)=\mathrm{L}\left(4+x^4\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3}{4+x^4}=\frac{x^3}{1+\dfrac{x^4}{4}}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty} x^3\cdot\left(-\frac{x^4}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+3}}{4^n}$$

(*) $r=-\dfrac{x^4}{4}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura. Konbergentea beraz,

$$\forall x \,/\, |r|=\frac{x^4}{4}<1 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Orduan, $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^{4n+3}}{4^n} \quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

Eta integragarria da $\left[0,x\right]$ tartean, $\forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$:

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+4}}{4^n\cdot(4n+4)} \quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)=\mathrm{L}4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{4n+4}}{4^n\cdot(4n+4)} \quad \forall x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Baldin $x = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \exists f \text{ jarraitua} \\ \mathrm{L}4 + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} \text{ konbergentea da} \Rightarrow \exists \text{batura jarraitua} \end{cases}$

Beraz, $f(x) = \mathrm{L}4 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{4n+4}}{4^n \cdot (4n+4)} \quad \forall x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

11.- Aurkitu $f(x) = x^2 \cdot \mathrm{L}\left(e + x^2\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non den baliagarria adieraziz.

$f(x) = x^2 \cdot g(x)$ non

$$g(x) = \mathrm{L}\left(e + x^2\right) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2x}{e + x^2} = \frac{2x/e}{1 + \dfrac{x^2}{e}} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{e} \cdot \left(-\frac{x^2}{e}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{e^{n+1}} \cdot x^{2n+1} \quad \forall x \in \left(-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right)$$

(*) Serie geometrikoaren batura, arrazoia $r = -\dfrac{x^2}{e} \Rightarrow$ konbergentea dena $\Leftrightarrow |r| < 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{e} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e}$.

Eta integragarria da $[0, x]$ tartean $\forall x \in \left(-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right)$:

$$g(x) - g(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{e^{n+1}} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \quad \forall x \in \left(-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$g(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{e^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in \left(-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right)$$

Orduan,

$$f(x) = x^2 \cdot g(x) = x^2 \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+2}}{e^{n+1} \cdot (n+1)}\right) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+4}}{e^{n+1} \cdot (n+1)} = S(x)$$

$$\forall x \in \left(-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right)$$

$x = \pm\sqrt{e}$ puntuetan $\begin{cases} f(e) = e^2 \cdot \mathrm{L}(2e) \Rightarrow \exists f \text{ eta jarraitua da} \\ S(e) = e + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{e}{n+1} \quad \text{konbergentea da} \Rightarrow \exists S \text{ jarraitua} \end{cases}$

Beraz, $f(x) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+4}}{e^{n+1} \cdot (n+1)} \quad \forall x \in \left[-\sqrt{e}, \sqrt{e}\right]$

12.- Aurkitu $f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^3\right)$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

$$f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^3\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 3x^2 \cdot \left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (-1)^n \cdot x^{3n+2} \quad \forall x \in (-1,1)$$

(*) $r = -x^3$ arrazoiko serie geometrikoaren batura, konbergentea $\Leftrightarrow |r| = \left|-x^3\right| = \left|x^3\right| < 1$

Eta integragarria da $[0, x]$ tartean $\forall x \in (-1,1)$:

$$f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (-1)^n \cdot \frac{x^{3n+3}}{3n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n+3}}{n+1} = S(x) \quad \forall x \in (-1,1)$$

$x = -1$ puntuan $\nexists f$

$$x = 1 \text{ puntuan } \begin{cases} \exists f \text{ jarraitua} \\ \exists \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ baldintzaz konbergentea} \quad \Rightarrow \quad \exists S \text{ jarraitua} \\ f(x) = S(x) \quad \forall x \in (-1,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{L}\left(1+x^3\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{3n+3}}{n+1} \quad \forall x \in \left(-1,1\right]$$

13.- a) Aurkitu $f(x) = \frac{x^2}{8+x^3}$ funtzioaren berredura-seriezko garapena non den baliozkoa adieraziz.
b) Lortu, <u>deribatu gabe</u>, $f''(0)$ eta $f^{v)}(0)$.

a) f serie geometrikoaren batura da:

$$f(x) = \frac{x^2}{8+x^3} = \frac{\frac{x^2}{8}}{1+\frac{x^3}{8}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{8} \cdot \left(-\frac{x^3}{8}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+2}}{2^{3n+3}}$$

Eta baliozkoa da:

$$\forall x \in \mathbb{R} \,/\, |r| = \left|-\frac{x^3}{8}\right| < 1 \Leftrightarrow |x|^3 < 8 \Leftrightarrow |x| < \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2 \quad)$$

b) Aurreko berredura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea dela kontuan izanik:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{2^{3n+3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Orduan,

$$n=0\Rightarrow\frac{x^2}{2^3}=\frac{f''(0)}{2!}x^2\Rightarrow f''(0)=\frac{1}{4}$$

$$n=1\Rightarrow-\frac{x^5}{2^6}=\frac{f^{V)}(0)}{5!}x^5\Rightarrow f^{V)}(0)=-\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{64}=-\frac{15}{8}$$

14.- a) Aurkitu $f(x)=\mathrm{L}(9+81x^2)$ funtzioaren berredura-seriezko garapena non den baliozkoa adieraziz.
b) Aurkitu, deribatu gabe, $f^{2n+1)}(0)\quad\forall n\geq 0$.

a) $f'(x)=\dfrac{2\cdot81x}{9+81x^2}=\dfrac{18x}{1+9x^2}\overset{(*)}{=}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}18x\cdot(-9x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2\cdot9^{n+1}x^{2n+1}$

$$\forall x/\left|-9x^2\right|<1\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

(*) $r=-9x^2$ arrazoia duen serie geometrikoaren batura.

Eta integragarria da $[0,x]$ tartean, $\forall x\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$:

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2\cdot9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{L}9+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{n+1}\quad\forall x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$x=\pm\dfrac{1}{3}$ puntuetan:

$\exists f$ eta jarraitua da

eta

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n9^{n+1}\frac{1}{3^{2n+2}(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ baldintzaz konbergentea da, beraz existitzen da batura jarraitua ere puntu horietan.

Orduan:

$$f(x)=\mathrm{L}9+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n9^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{n+1}\quad\forall x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$$

b) Aurreko atalean lortutako berredura-seriezko garapena *f*-ri dagokion Taylor-en seriea da, hau da:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Eta ikusten denez, garapen horretako gai guztiak berredura bikoitiak dira. Hortaz:

$$f^{2n+1)}(0)=0\quad\forall n\geq 0$$