# ALDAGAI BATZUETAKO FUNTZIOEN JARRAITUTASUNA, DERIBAGARRITASUNA ETA DIFERENTZIAGARRITASUNA

**1.- Hurrengo funtzioa emanik**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cdot e^y}{x^2+y^2} & \text{baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) **Estudiatu *f*-ren jarraitutasuna $\mathbb{R}^2$ planoan.**
b) **Kalkulatu *f*-ren lehenengo ordenako deribatu partzialak $\mathbb{R}^2$ planoan.**
a) **Aztertu *f*-ren lehenengo ordenako diferentziagarritasuna $\mathbb{R}^2$-n.**

a) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ $f$ jarraitua da.
$f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3\cdot e^y}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^3\theta\cdot e^{\rho\sin\theta}}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\cos^3\theta\cdot e^{\rho\sin\theta}=0$$

Beraz, $f$ jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ :

$$f'_x(x,y)=\frac{(x^4+3x^2y^2)\cdot e^y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2-2y)\cdot x^3e^y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k}=0$$

c) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ $f$ diferentziagarria da.
(0,0) puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^3\cdot e^k}{h^2+k^2}-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h^3\cdot(e^k-1)-hk^2\right|}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|\rho^3\cdot\cos^3\theta\cdot\left(e^{\rho\sin\theta}-1\right)-\rho^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right|}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\left|\cos^3\theta\cdot\left(e^{\rho\sin\theta}-1\right)-\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right|=\sin^2\theta\cdot\left|\cos\theta\right|\neq0$$

Beraz, $f$ ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

**2.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin(x)}{y-\sin(y)} & \text{baldin} \quad y\neq 0\\ 0 & \text{baldin } (x,0),\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$

**Estudiatu (0,0) puntuan:**

- **c) *f*-ren jarraitutasuna.**
- **d) *f*-ren deribatu partzialak.**
- **e) *f*-ren diferentziagarritasuna.**

a) $f(0,0)=0$

*f*-ren limite direkzionalak kalkulatuko ditugu (0,0) puntuan:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\ \forall m\in\mathbb{R}-\{0\}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{mx-\sin(mx)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{m-m\cdot\cos(mx)}\overset{L'H}{=}\frac{1}{m}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{m\cdot\sin(mx)}\sim$$

$$\sim\frac{1}{m^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{mx}=\frac{1}{m^3}\quad\Rightarrow\quad\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0}{k-\sin(k)}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan ezin da diferentziagarria izan puntu horretan (baldintza beharrezkoa ez baitu betetzen).

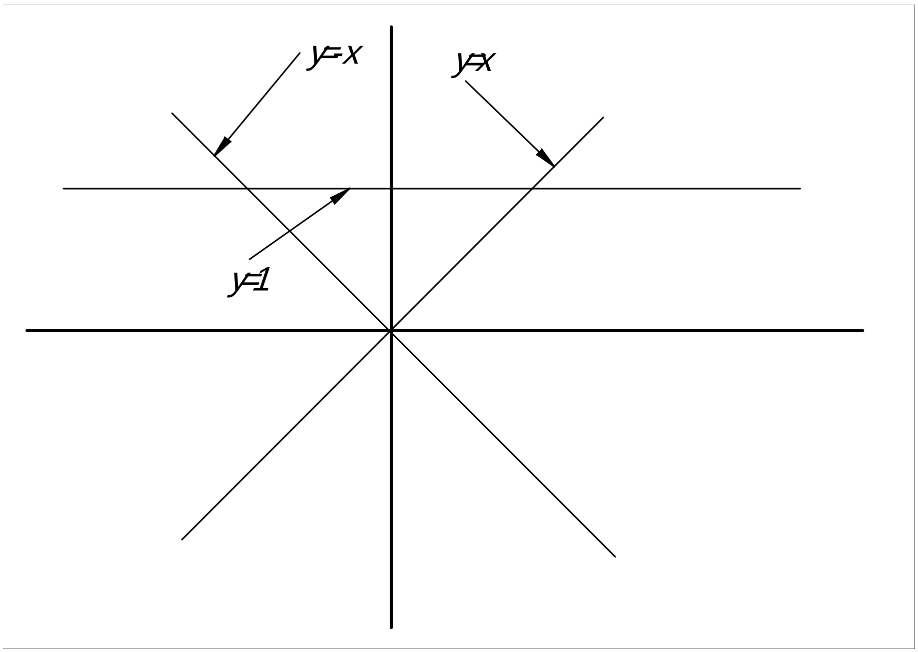
**3.-** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{yx^2-y^3+y^2-x^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **a) Irudikatu funtzioa definiturik ez dagoen planoko puntu-multzoa.**
- **b) Estudiatu *f* -ren jarraitasuna (0,0) puntuan.**
- **c) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ (jarraitasunez hedatu beharrezkoa bada).**
- **d) Estudiatu *f* -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan (jarraitasunez hedatu beharrezkoa bada).**

a) $\dfrac{xy(x^2-y^2)}{yx^2-y^3+y^2-x^2}=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{y(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(y-1)(x^2-y^2)}$

Beraz, $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/(y-1)(x^2-y^2)\neq 0\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}$

$$(y-1)(x^2-y^2)=0\Leftrightarrow\begin{cases} y=1\\ x^2=y^2\Leftrightarrow|x|=|y|\Leftrightarrow y=\pm x\end{cases}$$




b) $\forall (x,y)\in D \quad \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(y-1)(x^2-y^2)}=\dfrac{xy}{y-1}$, beraz:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{y-1} & \forall (x,y)\in D-\{(0,0)\}\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Orain (0,0) puntuko jarraitasuna aztertuko dugu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{y-1}=0=f(0,0)\Rightarrow f \text{ jarraitua da (0,0) puntuan.}$$

c) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{-1}-0}{h}=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{k-1}-0}{k}=0$$

d) (0,0) puntuan diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoak betetzen dituenez (jarraitua da eta $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ finituak dira), baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko diogu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{hk}{k-1}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|}{|k-1|\cdot\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(1)}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2|\cos\theta||\sin\theta|}{|\rho\sin\theta-1|\cdot\rho}\overset{(2)}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho|\cos\theta||\sin\theta|}{|\rho\sin\theta-1|}=0 \quad \forall\theta$$

Beraz, $f$ diferentziagarria da (0,0) puntuan.

(1) Polarretan: $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{\rho\to 0^+}|\rho\sin\theta-1|=1$

**4.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} & \text{baldin} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{baldin} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$**.**

**a) Aztertu *f* funtzioa diferentziagarria ote den (0,0) puntuan.**

**b) Baldin $\vec{u}=(h_1,h_2)$ bektore unitarioa bada, *f* funtzioaren deribatu direkzionala (0,0) puntuan $\vec{u}$ bektorearen norabidean $h_1\cdot f'_x(0,0)+h_2\cdot f'_y(0,0)$ adierazpenak emango du? Arrazoitu erantzuna.**

**b) Aurkitu *f* -ren deribatu direkzionala (0,0) puntuan $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.**

a) Diferentziagarria izateko baldintza beharrezkoa deribatu partzial finituak edukitzea da:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{h}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}}{k}=0$$

Orain baldintza beharrezkoa eta nahiko erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^3}=\varphi(\theta)\neq0 \quad\Rightarrow\text{ ez da diferentziagarria.}$$

b) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan $\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}\neq h_1\cdot f'_x(0,0)+h_2\cdot f'_y(0,0)$

c) (0,0) puntuko deribatu direkzionala kalkulatzeko definizioa erabili behar da:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(\lambda h_1,\lambda h_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{\lambda^3\cdot h_1^2\cdot h_2}{\lambda^2}}{\lambda}=h_1^2\cdot h_2 \quad \forall\vec{u}=(h_1,h_2)\text{ unitario.}$$

Orduan, $\vec{u}=(1,1)$ unitario bihurtuko dugu: $\vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

eta $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

**5.-** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+2y^2} & \text{baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna (0,0) puntuan.**

**b) Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ **.**

**c) Estudiatu *f* -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{\text{(polarretan)}}{=} \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^3\cdot\sin^3\theta}{\rho^2\cdot\cos^2\theta+2\rho^2\cdot\sin^2\theta}=\lim_{\rho\to 0^+}\rho\cdot\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=$$

$$\overset{\forall\theta}{=}0\cdot\text{bornatua}=0=f(0,0)\quad\Leftrightarrow\quad f\ \text{jarraitua da } (0,0)\ \text{puntuan.}$$

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{k^3}{2k^2}-0}{k}=\frac{1}{2}$$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Kasu honetan:

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{k^3}{h^2+2k^2}-k\cdot\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|2k^3-kh^2-2k^3\right|}{2\left(h^2+2k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|k|\cdot h^2}{2\left(h^2+2k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$\overset{\text{(Polarretan)}}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^3\cdot|\sin\theta|\cdot\cos^2\theta}{2\rho^2\cdot\left(\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)\cdot\rho}=\varphi(\theta)\neq 0\quad\forall\theta$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

**6.-** $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{L}\left(x^2+e^y\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Aztertu *f*-ren jarraitasuna (0,0) puntuan.**

**b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.**

**c) Aztertu *f*-ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) $f$ jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\mathrm{L}1\cdot(\text{bornatua})=0\cdot(\text{bornatua})=0=f(0,0)$

Beraz, $f$ jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{L}\left(h^2+1\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\sim\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}h\cdot\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=0\cdot(\text{bornatua})=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}\left(e^k\right)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=\lim_{k\to0}\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\nexists f'_y(0,0)$$

c) $\nexists f'_y(0,0) \quad\Rightarrow\quad f$ ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

**7.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2-xy} & \text{baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

**a) Estudiatu bere definizio-eremua, jarraitutasuna (0,0) puntuan eta kalkulatu deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**b) Azaldu diferentziagarria denentz (0,0) puntuan.**
**c) Lortu *f*-ren gradientea *P*(2,-1) puntuan eta baita puntu honetatik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea ere.**

a) *Definizio-eremua*:

$$x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=\dfrac{y}{2}\\ y=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x.y)=(0,0)$$

Baina $f(0,0)=0$

Beraz, $D=\mathbb{R}^2$

*Jarraitutasuna* (0,0) *puntuan*:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2-xy}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2-\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\frac{\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{1-\cos\theta\cdot\sin\theta}\overset{(*)}{=}0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

(*) $1-\cos\theta\cdot\sin\theta\neq0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$

*Deribatu partzialak* (0,0) *puntuan*:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0$$

b) (0,0) puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\dfrac{h^2k}{h^2+k^2-hk}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^2\theta\cdot|\sin\theta|}{\rho^2(1-\cos\theta\cdot\sin\theta)\cdot\rho}=\varphi(\theta)\neq0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

c) $\forall(x,y)\neq(0,0)$ $f$ diferentziagarria denez, orduan:

$$\overrightarrow{\nabla f}(2,-1)=f'_x(2,-1)\cdot\vec{i}+f'_y(2,-1)\cdot\vec{j}$$

$$\forall(x,y)\neq(0,0)\quad f'_x(x,y)=\frac{2xy(x^2+y^2-xy)-x^2y(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}\quad\Rightarrow\quad f'_x(2,-1)=-\frac{8}{49}$$

$$\forall(x,y)\neq(0,0)\quad f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^2+y^2-xy)-x^2y(2y-x)}{(x^2+y^2-xy)^2}\quad\Rightarrow\quad f'_y(2,-1)=\frac{12}{49}$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{\nabla f}(2,-1)=-\frac{8}{49}\cdot\vec{i}+\frac{12}{49}\cdot\vec{j}=\left(-\frac{8}{49},\frac{12}{49}\right)$$

$P$ puntutik igarotzen den maila-kurbari dagokion zuzen ukitzailea eta puntu horretako gradientea elkarzutak direla kontuan izanik, orduan

Bektore ukitzailea: $\left(-\frac{12}{49},-\frac{8}{49}\right)\perp\left(-\frac{8}{49},\frac{12}{49}\right)=\overrightarrow{\nabla f}(2,-1)$

Zuzen ukitzailea: $\dfrac{x-2}{-\frac{12}{49}}=\dfrac{y+1}{-\frac{8}{49}}\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{x-2}{12}=\dfrac{y+1}{8}\quad\Leftrightarrow\quad y=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{7}{3}$

**8.-** $f(x,y)=\begin{cases}x+\dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

**a) Aztertu bere jarraitutasuna $\mathbb{R}^2$ planoan.**
**b) Kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak (0,0) puntuan..**
**c) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
**d) Estudiatu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) $D=\mathbb{R}^2$ eta $\forall(x,y)\in D-\{(0,0)\}$ $f$ jarraitua da (funtzio jarraituen konposaketa baita)

$(x,y)=(0,0)$ puntuan, $\exists f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[x+\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)\right]=0+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)$$

Eta $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\cdot\sin\left(\frac{\rho^3\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{\rho^2}\right)=$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right)=0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi)$$

Orduan $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0) \quad \Leftrightarrow \quad f$ jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h+\frac{0}{h^2}\cdot\sin h}{h}=1$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\frac{0}{k^2}\cdot\sin k}{k}=0$

c) $(0,0)$ puntuko diferentziagarritasuna aztertzeko baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliko dugu. Hots, $f$ diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h+\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right)-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\left|\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\left(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right)\right|}{\rho}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\overbrace{\sin\left(\rho\cdot(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right)}^{\to 0}=0$$

Beraz, $f$ diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan.

e) $f$ diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow$ $f$ deribagarria da $(0,0)$ puntuan.

**9.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\sin x}{x^2+y^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **.**

**a) Estudiatu *f*-ren jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
**b) Kalkulatu *f*-ren deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**b) Aztertu *f* diferentziagarria ote den (0,0) puntuan.**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot\sin x}{x^2+y^2}\overset{\text{(polarretan)}}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho\cos\theta\cdot\sin(\rho\cos\theta)}{\rho^2}\sim$$

$$\sim\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\cos\theta}{\rho^2}=\cos^2\theta\neq 0=f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h\cdot\sin h}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h^2}\sim\lim_{h\to 0}\dfrac{h}{h^2}=\pm\infty$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0}{k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

**10.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **.**

**a) Estudiatu *f*-ren jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
**b) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ .**
**c) Aztertu *f* -ren diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\rho\to0^+}\cos\left(\frac{\rho^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^2}\right)=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\cos\left(\rho\cdot\overbrace{\cos\theta\cdot\sin^2\theta}^{\text{mugatua}}\right)=\cos 0=1=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(\dfrac{0}{h^2}\right)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\cos\left(\dfrac{0}{k^2}\right)-1}{k}=\lim_{k\to0}\frac{1-1}{k}=0$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuko dugu.

Hots, *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\cos\left(\dfrac{hk^2}{h^2+k^2}\right)-1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|\cos\left(\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right)-1\right|}{\rho}\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\dfrac{\left(\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right)^2}{2}}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^4\theta}{2\rho}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\overbrace{\cos^2\theta\cdot\sin^4\theta}^{\text{mugatua}}=0\quad\forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

**11.- Izan bedi $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ non $z = f(x,y)$. Arrazoitu ea hurrengo baieztapenak egiazkoak edo faltsuak diren:**

a) **Baldin *f* deribagarria bada $P_0$ puntuan, orduan *f* diferentziagarria da $P_0$ puntuan.**
b) **Baldin *f* diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan** $\Rightarrow \quad f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$
c) **Baldin *f* jarraitua ez bada $P_0 \in D$ puntuan** $\Rightarrow \quad \nexists f'_x(P_0), \nexists f'_y(P_0)$.
d) **Baldin *f* diferentziagarria ez bada $P_0 \in D$ puntuan** $\Rightarrow \quad \nexists f'_x(P_0), \nexists f'_y(P_0)$.
e) **Baldin *f* diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan** $\Rightarrow \quad f'_x$ **jarraitua da $P_0$ puntuan.**

a) Faltsua. Deribagarritasuna baldintza beharrezkoa da diferentziagarritasunerako, baina ez, ordea, nahikoa.

b) Faltsua. Baldin *f* diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan $\Rightarrow \quad \exists f'_x(P_0),\ f'_y(P_0) \in \mathbb{R}$, baina ez dute zertan berdinak eta, areago, nuluak izango.

c) Faltsua. Jarraitutasunaren eta deribatu partzialen existentziaren arteko erlaziorik ez dago.

d) Faltsua. Deribatu partzialen existentzia diferentziagarritasunerako baldintza beharrezkoa da baina ez, ordea, nahikoa.

e) Faltsua. Baldin *f* diferentziagarria bada $P_0 \in D$ puntuan $\Rightarrow \quad \exists f'_x(P_0),\ f'_y(P_0) \in \mathbb{R}$, baina ez dute zertan jarraituak izango.

**12.-** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y} & \text{Baldin} \quad y \neq -x^2 \\ 1 & \text{Baldin} \quad y = -x^2 \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitasuna (0,0) eta (1,-1) puntuetan.**
**b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) eta (1,-1) puntuetan.**
**c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) eta (1,-1) puntuetan.**

a) $f(0,0) = 1$ eta $f(1,-1) = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x^2+y} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2\cdot\cos^2\theta + \rho\cdot\sin\theta} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\rho\cdot\cos^2\theta + \sin\theta} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \forall\theta \neq 0, \pi \\ 0 & \text{Baldin } \theta = 0, \pi \end{cases} \quad \text{non } \theta \in [0, 2\pi). \text{ Orduan } \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{y}{x^2+y} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) eta (1,-1) puntuetan.

b) $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{0}{h^2} - 1}{h} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \nexists f'_x(0,0)$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{k}{k} - 1}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1-1}{k} = 0$$

$$f'_x(1,-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,-1) - f(1,-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+h)^2 - 1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-h^2-2h}{h^3+2h^2} = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \quad \nexists f'_x(1,-1)$$

$$f'_y(1,-1) = \lim_{k\to 0} \frac{f(1,-1+k) - f(1,-1)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{-1+k}{1+(-1+k)} - 1}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-1}{k^2} = -\infty$$

c) (0,0) eta (1,-1) puntuetan *f* jarraitua ez denez, ezin da diferentziagarria izan.

**13.-** $f(x,y) = \begin{cases} 3^{\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}} & \text{Baldin } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{Baldin } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Aztertu *f* funtzioaren jarraitasuna (0,0) puntuan.**
**b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3^{\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} 3^{\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} 3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta} = 3^0 = 1 = f(0,0)$

Hortaz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3^{\frac{0}{h^2}} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1-1}{h} = 0$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{3^{\frac{0}{k^2}} - 1}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1-1}{k} = 0$$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(h,k) - f(0,0) - h\cdot f_x'(0,0) - k\cdot f_k'(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| 3^{\frac{h^2\cdot k}{h^2+k^2}} - 1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\left|3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}-1\right|}{\rho} \sim \lim_{\rho\to0^+} \frac{\left|\mathrm{L}\left(3^{\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}\right)\right|}{\rho} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\left|\rho\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}(3)\right|}{\rho} = \cos^2\theta\cdot\sin\theta\cdot\mathrm{L}(3) \neq 0$$

Beraz, $f$ ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

**14.-** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{L}(1-x^2-y^2)} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ a & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$ parametroaren balioa *f* jarraitua izan dadin (0,0) puntuan.**

**Aurreko atalean lortutako *a* parametroaren baliorako:**
**b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (3,3) puntuan.**

a) $f$ jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

$f(0,0)=a$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\mathrm{L}(1-x^2-y^2)} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2}{\mathrm{L}(1-\rho^2)} \sim \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2}{-\rho^2} = -1 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Orduan, $f$ jarraitua (0,0) puntuan $\Leftrightarrow a=-1$.

b) $$f_x'(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\dfrac{h^2}{\mathrm{L}(1-h^2)} - (-1)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^2+\mathrm{L}(1-h^2)}{h\cdot\mathrm{L}(1-h^2)} \sim$$

$$\sim \lim_{h\to0} \frac{h^2+\mathrm{L}(1-h^2)}{-h^3} \overset{(L'H)}{=} \lim_{h\to0} \frac{2h - \dfrac{2h}{1-h^2}}{-3h^2} = -\frac{2}{3}\lim_{h\to0} \frac{1-\dfrac{1}{1-h^2}}{h} =$$

$$= -\frac{2}{3}\lim_{h\to0} \frac{1-h^2-1}{h\cdot(1-h^2)} = \frac{2}{3}\lim_{h\to0} \frac{h}{1-h^2} = 0$$

Eta simetriaz, $f_y'(0,0)=0$

c) $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1-x^2-y^2>0\right\} \cup \left\{(0,0)\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1\right\} \cup \left\{(0,0)\right\}$

Beraz $(3,3)\notin D \quad \Rightarrow \quad f$ ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

**15.-** $$f(x,y)=\begin{cases} x+\mathrm{L}(1+x^2+y^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ **funtzioa emanik:**

**a) Estudiatu *f* funtzioaren jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
**b) Kalkulatu *f* funtzioaren deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**c) Estudiatu *f* funtzioaren direntziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0+0\cdot\text{mugatua}=0=f(0,0) \quad\Leftrightarrow\quad$ *f* jarraitua (0,0) puntuan

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\mathrm{L}(1+h^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}\sim 1+\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h}=$$
$$=1+\lim_{h\to0}h\cdot\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)=1+0\cdot\text{mugatua}=1+0=1$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{L}(1+k^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}\sim\lim_{h\to0}\frac{k^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k}=$$
$$=0\cdot\text{mugatua}=0$$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Kasu honetan:
$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h+\mathrm{L}(1+h^2+k^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{\text{polarretan}}{=}\lim_{\rho\to0^+}\frac{\mathrm{L}(1+\rho^2)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)}{\rho}\sim$$
$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cdot\sin\left(\frac{1}{\rho^2}\right)=0\cdot\text{mugatua}=0\quad\forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

**16.-** $f(x,y)=\begin{cases} y+\cos\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
**b) Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ **eta** $f'_y(0,0)$ **.**
**c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[y+\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\right]=0+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)=$$

$$\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\cos\left(\frac{\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\right)=\cos\left(\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\neq 1=f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\left(\frac{0}{h^2}\right)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1-1}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k+\cos\left(\frac{0}{k^2}\right)-1}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k+1-1}{k}=1$$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

**17.-** $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-x^3y}{x^2+y^2}} & \forall(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan**
**b) Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ **eta** $f'_y(0,0)$
**c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan**
**d) Estudiatu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{-x^3y}{x^2+y^2}}\overset{(\text{polarretan})}{=}\lim_{\rho\to0^+} e^{\frac{-\rho^4\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}}=\lim_{\rho\to0^+} e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}=e^0=1=f(0,0)$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1-1}{h} = 0$

$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{e^{\frac{0}{k^2}}-1}{k} = \lim_{k\to 0} \dfrac{1-1}{k} = 0$

c) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|e^{\frac{-h^3k}{h^2+h^2}}-1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\left|e^{\frac{-\rho^4\cos^3\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}}-1\right|}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\left|e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}-1\right|}{\rho} \sim$$

$$\sim \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\left|\mathrm{L}\left(e^{-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta}\right)\right|}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\left|-\rho^2\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right|}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\left|\cos^3\theta\cdot\sin\theta\right| = 0 \quad \forall\theta$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

d) *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Rightarrow$ *f* deribagarria da (0,0) puntuan

**18.-** $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **d) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
- **e) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.**
- **f) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
- **g) Aztertu $f'_x$ eta $f'_y$ deribatuen jarraitutasuna (0,0) puntuan.**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}} \overset{(\text{polarretan})}{=} \lim_{\rho\to 0^+} e^{\frac{\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}} = e^{\cos\theta\cdot\sin\theta} \neq 1 = f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-1}{h}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{e^{\frac{0}{k^2}}-1}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{1-1}{k}=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

d) *f* diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, orduan deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (0,0) puntuan.

**19.-** $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{L}\left(1+\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik:**

- **h) Estudiatu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
- **i) Kalkulatu $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$.**
- **j) Estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
- **k) Aztertu $f'_x$ eta $f'_y$ deribatuen jarraitutasuna (0,0) puntuan.**

a) Jarraitutasuna (0,0) puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\mathrm{L}\left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\overset{\text{(polarretan)}}{=}\lim_{\rho\to 0^+}\mathrm{L}\left(1+\frac{\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta}{\rho^2}\right)=$$

$$=\lim_{\rho\to 0^+}\mathrm{L}\left(1+\cos\theta\cdot\sin\theta\right)\neq 0=f(0,0)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\frac{0}{h^2}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\mathrm{L}\left(1+\frac{0}{k^2}\right)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0}{k}=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, orduan ezin da diferentziagarria izan (0,0) puntuan.

d) $f$ diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, orduan deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (0,0) puntuan.

**20.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2(y+1)}{x^2+y^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$**.**

**a) Estudiatu bere diferentziagarritasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

**b) Kalkulatu** $f''_{y^2}(0,0)$**.**

a) Jarraitasuna aztertuz:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(y+1)}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^2\cos^2\theta(\rho\sin\theta+1)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0^+}\cos^2\theta(\rho\sin\theta+1)=\varphi(\theta)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2(y+1)}{x^2+y^2}\Rightarrow f$ ez da jarraitua $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow f$ ezin da diferentziagarria izan $(0,0)$ puntuan.

Edo deribatu partzialak kalkulatzen baditugu:

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}=\pm\infty\Rightarrow$ Deribatu partzial finitua existitzen ez denez, $f$ ezin da diferentziagarria izan $(0,0)$ puntuan.

b) $f''_{y^2}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f'_y(0,0+k)-f'_y(0,0)}{k}$

Beraz, hasteko, $f$-ren $y$-rekiko lehenengo deribatu partziala kalkulatu behar dugu:

$\forall(x,y)\neq(0,0\ \ )\ f'_y(x,y)=\dfrac{x^4-x^2y^2-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^2}-0}{k}=0$$

Hau da, $f'_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-x^2y^2-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Eta orain eskatzen digutena:

$$f''_{y^2}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_y(0,0+k)-f'_y(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0}{k^4}-0}{k}=0$$

**21.-** $f(x,y)=\begin{cases} x+e^{\frac{x^2\cdot y^3}{x^2+y^2}} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

**f) Aztertu bere jarraitutasuna (0,0) puntuan.**
**g) Kalkulatu bere deribatu partzialak (0,0) puntuan.**
**h) Aztertu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.**
**i) Aztertu bere deribagarritasuna (0,0) puntuan eta kalkulatu puntu horretan bere deribatu direkzionala $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.**

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x+e^{\frac{x^2\cdot y^3}{x^2+y^2}}\right)=0+\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2\cdot y^3}{x^2+y^2}} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} e^{\frac{\rho^5\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta}{\rho^2}}=$

$=\lim\limits_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} e^{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta}=e^0=1=f(0,0) \quad\Leftrightarrow\quad f$ jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h+e^{\frac{0}{h^2}}-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{h}=1$

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{hk\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{e^{\frac{0}{k^2}}-1}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{0}{k}=0$

c) Baldintza beharrezkoa eta nahikoa aplikatuz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|h+e^{\frac{h^2\cdot k^3}{h^2+k^2}}-1-h\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|e^{\frac{h^2\cdot k^3}{h^2+k^2}}-1\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\left|e^{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta}-1\right|}{\rho}\sim$$

$$\sim\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\frac{\rho^3\cdot\cos^2\theta\cdot\left|\sin^3\theta\right|}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}}\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot\left|\sin^3\theta\right|=0 \quad\Leftrightarrow\quad f \text{ diferentziagarria da } (0,0) \text{ puntuan}$$

d) $f$ diferentziagarria da (0,0) puntuan $\Rightarrow$ $f$ deribagarria da (0,0) puntuan eta

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=f'_x(0,0)\cdot h_1+f'_y(0,0)\cdot h_2 \quad \forall\vec{u}=(h_1,h_2) \text{ unitario}$$

Kasu honetan, $|\vec{u}|=\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \vec{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ unitarioa da eta $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**22.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{L}(1+xy)\cdot\dfrac{(y-x)}{\sin(x^2+y^2)} & \forall(x,y)\neq(0,0)\,/\,xy>-1 \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **.**

**a) Estudiatu bere jarraitasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

**b) Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ **eta** $f'_y(0,0)$ **.**

**c) Estudiatu bere diferentziagarritasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

**d) Estudiatu lehenengo deribatu partzialen jarraitasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

a) *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathrm{L}(1+xy)\cdot\frac{(y-x)}{\sin(x^2+y^2)}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\mathrm{L}(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta)\cdot\frac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin(\rho^2)}\sim\lim_{\rho\to0^+}\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\rho^2}=$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)=0\quad\forall\theta\in[0,2\pi)$$

Beraz, *f* jarraitua da $(0,0)$ puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{L}(1)\cdot\dfrac{-h}{\sin(h^2)}}{h}\sim\lim_{h\to0}\frac{-\mathrm{L}(1)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h^2}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}(1)\cdot\dfrac{k}{\sin(k^2)}}{k}\sim\lim_{k\to0}\frac{\mathrm{L}(1)}{k^2}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k^2}=0$$

c) *f* diferentziagarria da $(0,0)$ puntuan $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0\qquad\text{(B.B.N.)}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\mathrm{L}(1+hk)\cdot\dfrac{(k-h)}{\sin(h^2+k^2)}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\mathrm{L}(1+\rho^2\cos\theta\sin\theta)\cdot\dfrac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin(\rho^2)}}{\rho}\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\cdot\dfrac{\rho(\sin\theta-\cos\theta)}{\rho^2}}{\rho}=$$

$$=\cos\theta\sin\theta\cdot(\sin\theta-\cos\theta)\neq0\quad\forall\theta\in[0,2\pi)$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria $(0,0)$ puntuan.

d) *f* diferentziagarria ez denez $(0,0)$ puntuan $\Rightarrow f'_x$ eta $f'_y$ ezin dira jarraituak izan $(0,0)$ puntuan (hauetako bat jarraitua balitz, orduan *f* diferentziagarria litzateke (B.N.)).

(1) Polarretan adieraziz.

**23.-** $f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ a & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik,**

**a) Determinatu *a* parametroaren balioa *f* jarraitua izan dadin (0,0) puntuan.**

**b) Kalkulatu *a* parametroaren balio horretarako** $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$**.**

**c) Estudiatu ea *f* diferentziagarria den (0,0) puntuan, eta baiezko kasuan, kalkulatu diferentziala puntu horretan.**

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=a$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)=\lim_{\rho\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\rho^2}\right)=$$

$=\lim\limits_{\rho\to0^+}\operatorname{arctg}\left(\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right)=0 \quad \forall\theta\Rightarrow$ *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow a=0$

b) $a=0$ baliorako:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{h^4}{h^2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{arctg}\left(h^2\right)}{h}\sim\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=0$$

$f'_y(0,0)=0$ simetriaz.

c) $\forall a\neq0$ *f* ez da jarraitua beraz ezin da diferentziagarria izan.

Baldin $a=0$, B.B.N. erabiliko dugu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\left|\operatorname{arctg}\left(\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)\right)\right|}{\rho}\sim$$

$\sim\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\rho^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\rho}=0\quad\forall\theta\Leftrightarrow f$ diferentziagarria da (0,0) puntuan. Eta bere diferentziala:

$$df(0,0)=f'_x(0,0)\cdot dx+f'_y(0,0)\cdot dy=0$$

**24.-** $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin x\cdot\sin y}{\arcsin(x^2+y^2)} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ **funtzioa emanik:**

**a) estudiatu bere jarraitasuna (0,0) puntuan**
**b) kalkulatu bere lehenengo deribatu partzialak (0,0) puntuan**
**c) estudiatu bere diferentziagarritasuna (0,0) puntuan**
**d) estudiatu lehenengo deribatu partzialen jarraitasuna (0,0) puntuan**

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin x\cdot\sin y}{\arcsin(x^2+y^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\sin(\rho\cdot\cos\theta)\cdot\sin(\rho\cdot\sin\theta)}{\arcsin(\rho^2)}\sim$$
$$\sim\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot\sin\theta}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}\cos\theta\cdot\sin\theta=\varphi(\theta)\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Beraz, *f* ez da jarraitua (0,0) puntuan.

b) $f'_x(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{0}{\arcsin(h^2)}-0}{h}=0$

Simetriaz, $f'_y(0,0)=0$

c) *f* jarraitua ez denez (0,0) puntuan, ezin da diferentziagarria izan puntu horretan.

d) *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan, hortaz puntu horretako lehenengo deribatu partzialak ezin dira jarraituak izan (hrietako bat jarraitua balitz (0,0) puntuan, orduan *f* diferentziagarria litzateke).

**25.- Izan bedi** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{Baldin } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{Baldin } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **,** $n\in\mathbb{N}$ **, funtzioa.**

**b) Estudiatu *f* –ren jarraitasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

**c) Kalkulatu** $f'_x(0,0)$ eta $f'_y(0,0)$ **.**

**d) Estudiatu *f* –ren diferentziagarritasuna** $(0,0)$ **puntuan.**

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)\in\mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^n\cdot\cos^n\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho^{n-1}\cdot\cos^n\theta=\begin{cases}\cos\theta, \quad \text{baldin } n=1\Rightarrow\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\\ 0=f(0,0), \quad \forall n\geq 2\end{cases}$$

Beraz *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow n\geq 2$

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^n}{\sqrt{h^2}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^n}{h|h|}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{h^n}{h^2}=\begin{cases}\infty,\ n=1 \text{ bada}\\ 1,\ n=2 \text{ bada}\\ 0,\ \forall n\geq3\end{cases}\\ \lim\limits_{h\to0^-}-\dfrac{h^n}{h^2}=\begin{cases}-\infty,\ n=1 \text{ bada}\\ -1,\ n=2 \text{ bada}\\ 0,\ \forall n\geq3\end{cases}\end{cases}$$

Hau da, baldin $n=1,2\Rightarrow\nexists f'_x(0,0)$ eta $\forall n\geq3\Rightarrow f'_x(0,0)=0$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\frac{0}{\sqrt{k^2}}}{k}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

c) Baldin $n=1$, $f$ ez da jarraitua (0,0) puntuan (eta $\nexists f'_x(0,0)$), beraz ezin da diferentziagarria izan.

Baldin $n=2$, $\nexists f'_x(0,0)$, beraz ezin da diferentziagarria izan.

$\forall n\geq3$ diferentziagarria izateko B.B.N. aplikatuko diogu:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h^n}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^n}{h^2+k^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^n\cdot\cos^n\theta}{\rho^2}\underset{n\geq3}{=}0 \quad \forall\theta\in[0,2\pi]$$

Orduan $\forall n\geq3$ *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.