ALDAGAI BATEKO FUNTZIOEN JARRAITUTASUNA, DERIBAGARRITASUNA ETA DIFERENTZIAGARRITASUNA

1.- a) Aurkitu *a* eta *b* hurrengo funtzioa jarraitua izan dadin $x=1$ puntuan:

$$f(x)=\begin{cases} b\cdot \mathrm{L}(1+4x) & \forall x<1 \\ a & x=1 \\ \dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x} & \forall x>1 \end{cases}$$

b) *a* eta *b* parametroen balio horietarako, aztertu *f* -ren deribagarritasuna $x=1$ puntuan

a) *f* jarraitua da $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

Kasu honetan $f(1)=a$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} b\cdot \mathrm{L}(1+4x)=b\cdot \mathrm{L}(5) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x}\sim \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x-e}{e\cdot(x-1)}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^x}{e}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=b\cdot \mathrm{L}(5)=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{\mathrm{L}(5)}$$

Eta *f* jarraitua da $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow a=1$ eta $b=\dfrac{1}{\mathrm{L}(5)}$.

b) Balio horietarako, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}(1+4x)}{\mathrm{L}(5)} & \forall x<1 \\ 1 & x=1 \\ \dfrac{e^x-e}{e\cdot \mathrm{L}x} & \forall x>1 \end{cases}$, deribagarria da $x=1$ puntuan $\Leftrightarrow \exists f'(1)\in\mathbb{R}$.

Hau da:

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{\mathrm{L}(1+4(1+h))}{\mathrm{L}(5)}-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{L}(5+4h)-\mathrm{L}(5)}{h\cdot \mathrm{L}(5)}\overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{\dfrac{4}{5+4h}}{\mathrm{L}(5)}=\frac{4}{5\cdot \mathrm{L}(5)}$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{e^{1+h}-e}{e\cdot \mathrm{L}(1+h)}-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{1+h}-e-e\cdot \mathrm{L}(1+h)}{h\cdot e\cdot \mathrm{L}(1+h)}\sim$$

$$\sim\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-1-\mathrm{L}(1+h)}{h^2}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-\dfrac{1}{1+h}}{2h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0^+}\frac{e^h+\dfrac{1}{(1+h)^2}}{2}=1$$

Beraz, $f'(1^+)\neq f'(1^-)\Rightarrow \nexists f'(1)\Rightarrow f$ ez da deribagarria $x=1$ puntuan.

2.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{|x|}}}{\mathrm{L}\left|x-1\right|} & \text{baldin } x\neq 1 \\ 0 & \text{baldin } x=1 \end{cases}$. **Estudiatu** f **funtzioaren jarraitutasuna (eten mota adieraziz), deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna** $x=0$ **eta** $x=1$ **puntuetan.**

(2,5 puntu)

Jarraitutasuna:

$x=0$ puntuan:

$\not\exists f$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{\infty}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{\infty}{0^+}=+\infty \end{cases}\right. \Rightarrow \text{ Jauzi infinituko eten gaindiezina}$$

$x=1$ puntuan:

$f(1)=0$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(x-1)}=\dfrac{e}{-\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{L}(1-x)}=\dfrac{e}{-\infty}=0 \end{cases}\right. \Rightarrow \text{ Jarraitua da}$$

Diferentziagarritasuna:

$x=0$ puntuan ez da jarraitua, beraz ezin da deribagarria izan.

$x=1$ puntuan:

$$\left.\begin{cases} f'(1^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(h)}\overset{(*)}{=}-\infty \\ f'(1^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(-h)}\overset{(*)}{=}\infty \end{cases}\right. \Rightarrow \text{ Ez da deibagarria.}$$

Diferentziagarritasuna:

$x=0$ eta $x=1$ puntuetan deribagarria ez denez, ezin da diferentziagarria izan.

$$(*)\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(h)}=e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1/h}{\mathrm{L}(h)}\overset{(L'H)}{=}e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-1/h^2}{1/h}=-e\cdot\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h}=-\infty \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{1+h}}}{\mathrm{h}\cdot\mathrm{L}(-h)}=e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1/h}{\mathrm{L}(-h)}\overset{(L'H)}{=}e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1/h^2}{1/h}=-e\cdot\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1}{h}=\infty \end{cases}$$

3.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ |x-a| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+b} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases}$**. Kalkulatu *a* eta *b* parametroen balioak *f* jarraitua izan dadin.**

$\forall x<0$ f jarraitua da (polinomioa da).
$\forall x\in(0,3)$ f jarraitua da (balio absolutua).
$\forall x>3$ f jarraitua da $\Leftrightarrow x+b\ne 0 \Leftrightarrow x\ne -b$.
$x=0$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}|x-a|=|-a|=|a| \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ jarraitua da } \Leftrightarrow |a|=1 \Leftrightarrow a=\pm 1 .$$

$x=3$ puntuan:

$$\left.\begin{array}{r} f(3)=\dfrac{18}{3+b} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2+3x}{x+b}=\dfrac{18}{3+b} \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}|x-a| \begin{cases} \overset{(\text{baldin } a=1)}{=} \lim\limits_{x\to 3^-}|x-1|=2 \\ \overset{(\text{baldin } a=-1)}{=} \lim\limits_{x\to 3^-}|x+1|=4 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ jarraitua da } \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{18}{3+b}=2 \Leftrightarrow b=6 \\ \dfrac{18}{3+b}=4 \Leftrightarrow b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Orduan, baldin $a=1$ eta $b=6$, edo $a=-1$ eta $b=\dfrac{3}{2}$ f jarraitua da $\forall x\in\mathbb{R}$.

<u>Oharrak</u>:

1) $b=6$ eta $b=\dfrac{3}{2}$ balioetarako, $x\ne -b \quad \forall x>3 \Rightarrow f$ jarraitua da ere puntu horietan.

2) Lortutako a eta b parametroen balioetarako, f funtzio jarraituaren adierazpen analitikoa hauetako bat litzateke.:

Baldin $a=1$ eta $b=6$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ |x-1| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+6} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ 1-x & \text{baldin } 0<x\le 1 \\ x-1 & \text{baldin } 1<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+6} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases}$$

Baldin $a=-1$ eta $b=\frac{3}{2}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ |x+1| & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+\frac{3}{2}} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases} = \begin{cases} x^2+1 & \text{baldin } x\le 0 \\ x+1 & \text{baldin } 0<x<3 \\ \dfrac{x^2+3x}{x+\frac{3}{2}} & \text{baldin } x\ge 3 \end{cases}$$

4.- Izan bedi $f(x)=\begin{cases} a-1+\sin x & \forall x\ge 0 \\ \dfrac{ax}{2-x} & \forall x<0 \end{cases}$ **funtzioa, non** $a\in\mathbb{R}$ **. Kalkulatu** $f'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ **.**

$\forall x\ne 0$ deribatua zuzenean ateratzen da deribazio erregelak aplikatuz:

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & \forall x>0 \\ \dfrac{2a}{(2-x)^2} & \forall x<0 \end{cases}$$

$x=0$ puntuko deribagarritasuna aztertzeko bi eratan egin daiteke.

1. Metodoa: Definizioa erabiliz:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{a-1+\sin h-(a-1-0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{a\cdot h}{2-h}-(a-1-0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah-(a-1)(2-h)}{h(2-h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{2ah-h-2a+2}{h(2-h)}=$$

$$=\begin{cases} \text{Baldin } a>1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-a}{h}=+\infty \Rightarrow \text{Ez da deribagarria finitua ez baita} \\ \text{Baldin } a<1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-a}{h}=-\infty \Rightarrow \text{Ez da deribagarria finitua ez baita} \\ \text{Baldin } a=1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{ah}{2h}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(0^+)\ne f'(0^-) \Rightarrow \text{Ez da deribagarria} \end{cases}$$

Beraz, f ez da deribagarria $x=0$ puntuan $\forall a\in\mathbb{R}$.

2. Metodoa: Ikus dezagun f jarraitua ba ote den $x=0$ puntuan:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a-1+\sin x)=a-1=f(0) \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{2-x}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ jarraitua } x=0 \text{ puntuan} \Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1$$

Beraz, $\forall a \neq 1$ f ezin da deribagarria izan.
Eta

$$a = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sin x & \forall x \geq 0 \\ \dfrac{x}{2-x} & \forall x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\sin h}{h} = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h}{h(2-h)} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{1}{(2-h)} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \nexists f'(0)$$