sctm05
sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas 2005

La paradoja en la ciencia y el arte

Marta Macho Stadler
Profesora Contratada Doctora de Geometría y Topología
Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco

Introducción

En la revista Scientific American **217** (pág. 50-56, 1967), el biólogo y matemático ruso Anatol Rapoport (1911-), experto en teoría de la comunicación y de juegos, escribe en el artículo titulado *Escape from paradox*:

> Paradoxes have played a dramatic part in intellectual history, often foreshadowing revolutionary developments in science, mathematics, and logic. Whenever, in any discipline, we discover a problem that cannot be solved within the conceptual framework that supposedly should apply, we experience shock. The shock may compel us to discard the old framework and adopt a new one. It is to this process of intellectual molting that we owe the birth of many of the major ideas in mathematics and science.

En esta conferencia se dan algunos ejemplos de cómo las paradojas aparecen tanto en el ámbito del la Ciencia como del Arte. La lista no es exhaustiva, es tan solo una pequeña (y parcial) muestra, que pretende estimular la curiosidad de los asistentes.

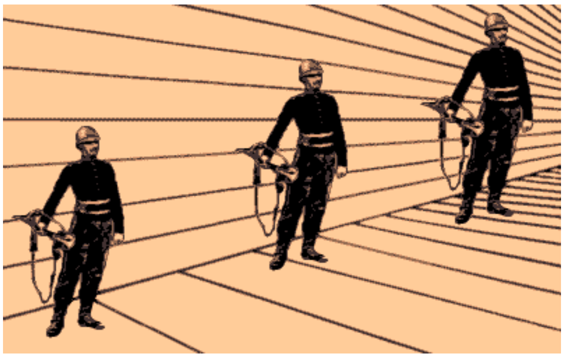
1. Paradojas visuales

Las paradojas visuales pueden deberse a diversas razones: imágenes engañosas, defectos de la visión humana, etc. A continuación, se dan algunos ejemplos.

1.1. Paradojas de la perspectiva

En la Figura 1 se muestran dos paradojas de la perspectiva: las líneas dibujadas provocan distorsiones en la percepción.

El ejemplo de la Figura 2 se debe al artista británico William Hogarth (1697-1764): el cuadro se titula *The magpie on the gallows* (1754) y contiene más de 20 errores de la perspectiva; aquí se destacan tan sólo dos de ellos.



Paradoja de la perspectiva ascendente
¿Son todos los soldados del
mismo tamaño?

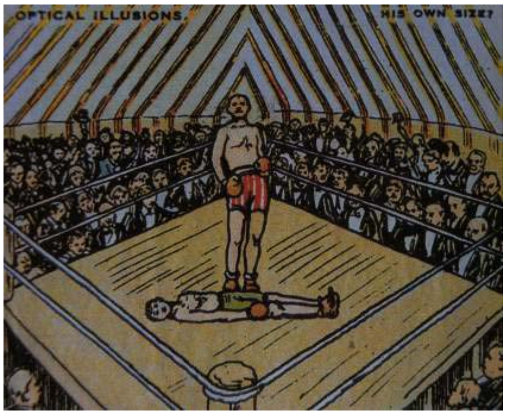


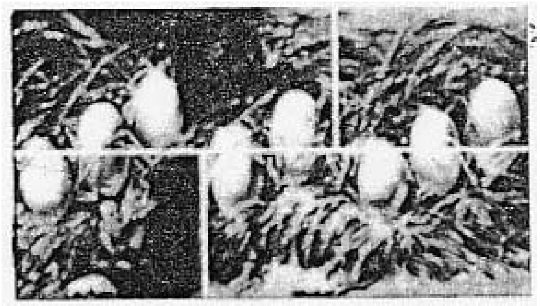
Imagen de caja de tabaco, 1926
¿Cuál de los dos boxeadores
es más alto?

Figura 1.

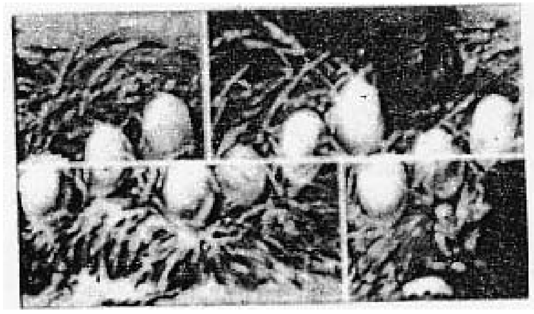
Figura 2.

1.2. Desapariciones geométricas

1.2.1. La paradoja del *huevo que desaparece* es una variante lo que se denominan *desapariciones de línea*: realizando los cortes como se indica en la Figura 3 (uno horizontal y dos verticales), se obtienen cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener seis, siete, ocho, diez, once o doce huevos.



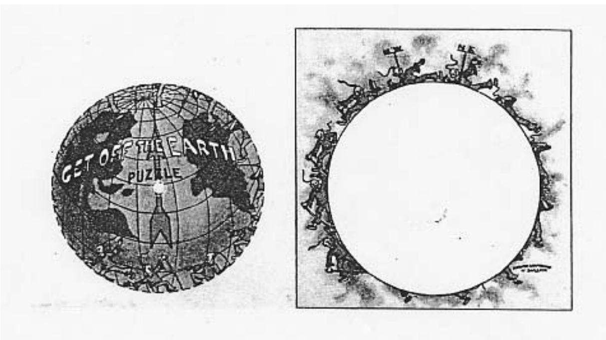
Recombinación de 8 huevos



Recombinación de 10 huevos

Figura 3.

1.2.2. Sam Loyd (1841-1911) es uno de los inventores de rompecabezas y acertijos más famosos del mundo. El puzzle *Abandone la tierra* aparece en su libro *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums, with answers* (Lamb. Pub. Co., 1914). En él, transforma ingeniosamente una línea recta en una circunferencia para obtener su paradoja.



Su dibujo no tiene más que dos trozos, pero crea una serie de desapariciones y reapariciones impresionantes: se clava el círculo de la izquierda por su centro sobre el círculo vacío de la derecha, y entonces…

… uno se puede entretener girando ese círculo… Si la flecha apunta hacia el norte, aparecen **13** guerreros chinos, y si lo hace hacia el noroeste ¡no quedan más que **12**!

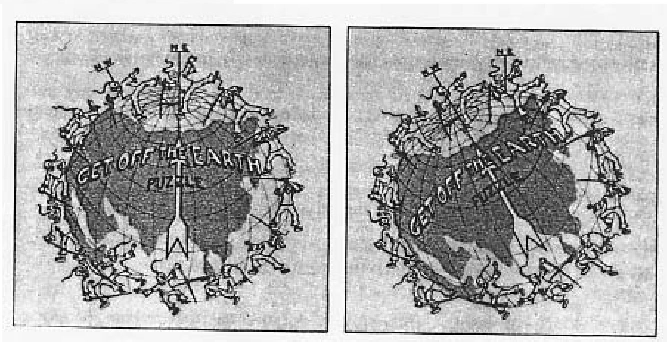
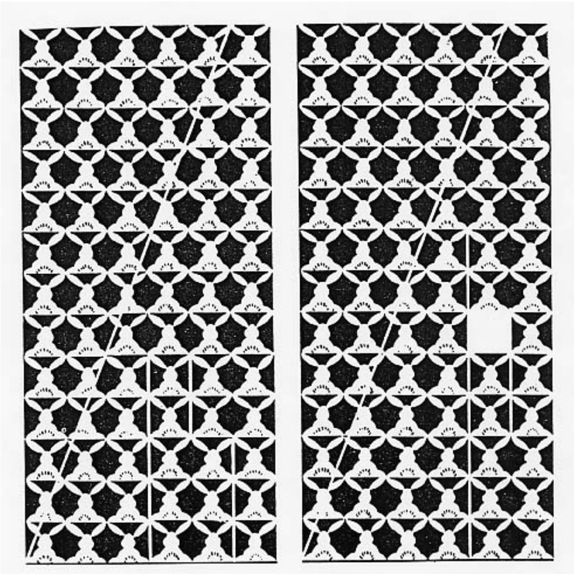


Figura 4.

1.2.3. El matemático y mago Paul Curry ha combinado las llamadas *desapariciones de línea y superficie* para realizar su divertida paradoja del conejo.



El primer rectángulo de 6×13 encierra 78 casetas, cada una de las cuales contiene la silueta de un conejo. Si se corta este rectángulo según las líneas indicadas, una vez redispuesto como se muestra, se obtiene un nuevo rectángulo con el mismo número de casetas… pero

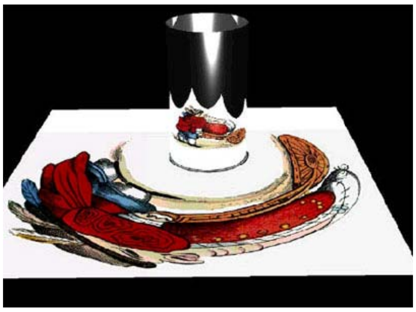
¡sólo con 77 conejos!

¿Dónde ha quedado el conejo que falta?

Figura 5.

1.3. Anamorfosis

Una *anamorfosis* es una imagen deformada que se manifiesta cuando se mira de manera *no convencional*. Por ejemplo, en las anamorfosis *oblicuas* se construye una imagen proyectada sobre un plano oblicuo, de tal manera que queda ininteligible o simula una imagen bien diferente si no se mira desde el punto de vista excéntrico adoptado para la proyección. En una anamorfosis *catóptrica* la imagen debe verse reflejada en un espejo distorsionado; los ejemplos más típicos son los cilíndricos, cónicos y piramidales. Algunos ejemplos de anamorfosis *cilíndricas* del libro [Mc] pueden verse en la Figura 6.



Un hombre gordo que lleva su estómago sobre una carretilla.

Sancho Panza y su burro. El espejo cilíndrico se coloca sobre el círculo dibujado para recuperar la imagen.

Figura 6.

A la derecha aparece la anamorfosis cilíndrica *La isla misteriosa y el retrato de Julio Verne* (1983) del diseñador gráfico húngaro István Orosz (1951-). Julio Verne aparece al colocar el espejo cilíndrico en la posición indicada.

Figura 7.

La siguiente obra de István Orosz (Figura 8) se titula *Escalera de dimensión tres*: debajo aparecen tres imágenes de la obra vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.

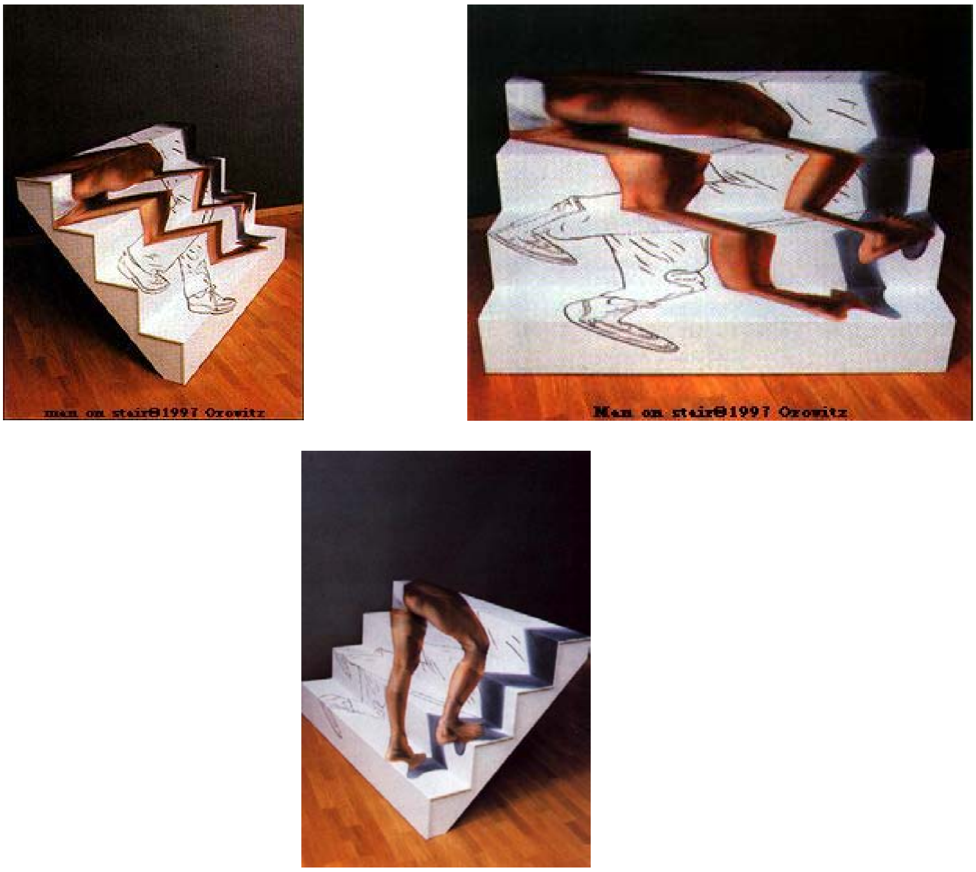


Figura 8.

Nuestra próxima composición anamórfica (Figura 9) se debe a Erhard Schön (1491-1542). Se titula *Vexierbild* (1535), y a primera vista aparecen lugares, costas, barcos y ciudades. Pero, al analizar la obra con más cuidado, se descubre la composición anamórfica de Carlos V, Fernando I, el Papa Pablo III y Francisco I.

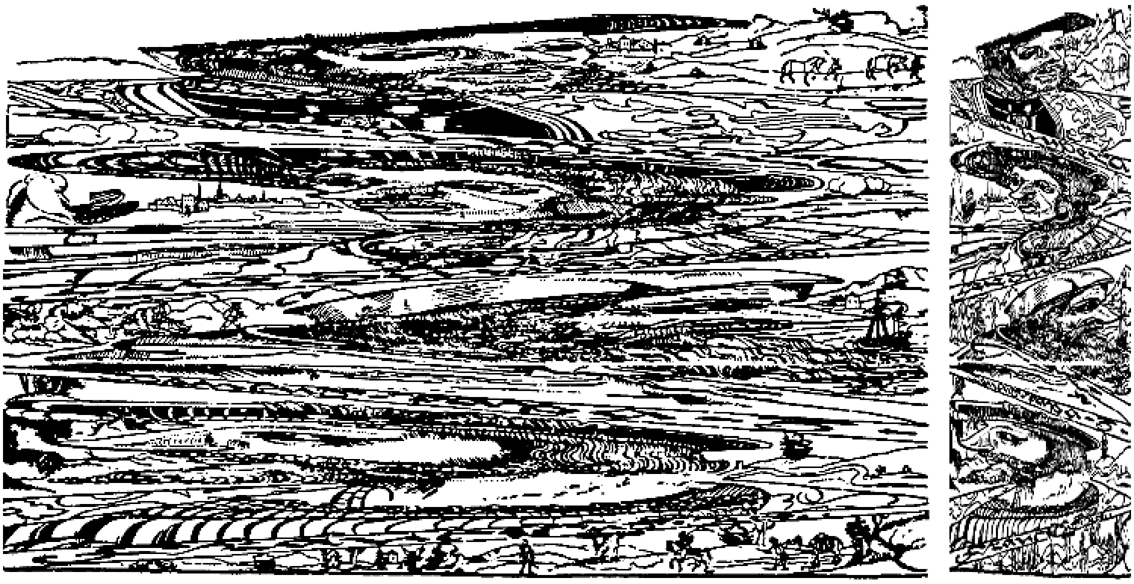


Figura 9.

En esta época, los diseños de este tipo se utilizaban para esconder *imágenes secretas*, a veces de tipo erótico, otras de naturaleza política, etc.

La siguiente obra se titula *Los embajadores* (1533). Es la obra más célebre de Holbein el joven (1497-1543). Representa a dos diplomáticos, colocados delante de un tapiz. Entre los dos hombres, diversos objetos, símbolos del poder (laico y eclesiástico) y del conocimiento científico (relojes solares, un globo terráqueo, instrumentos de navegación y de astronomía, libros...). La escena representada por el pintor está datada con gran precisión: 11 de abril de 1533. Poco tiempo antes, Enrique VIII solicitaba al papa Clemente VII anular su matrimonio con Catalina de Aragón, ya que de su unión no había nacido ningún heredero varón. El papa no accede a este favor, lo que no impide al monarca esposar en secreto a Ana Bolena el 25 de enero. A principios de abril, el arzobispo de Canterbury, Thomas Cranmer, anula él mismo el matrimonio precedente y declara a Ana Bolena reina de Inglaterra. El hecho no tenía precedentes, y se envió una embajada francesa para intentar una reconciliación con el papa. El cuadro de Holbein representa a los dos miembros de esta embajada: Jean de Dintevile (1504-1555, a izquierda, ropa corta, poseedor del poder político) y Georges de Selve (1508-1541, a la derecha, ropa larga, depositario del poder religioso).

Figura 10.

En primer plano, en el centro, se observa un objeto enigmático: se trata de un cráneo estirado, cuya forma no se aparece delante del espectador más que si éste adopta un cierto punto de vista con respecto al cuadro (Figura 10). La técnica empleada por Holbein para producir este efecto es la de la *anamorfosis oblicua*. La imagen toma su dimensión y libera su secreto cuando uno se coloca en el lado lateral del cuadro para mirarlo oblicuamente: entonces se ve una calavera deformada proyectando una sombra sobre el embaldosado del suelo (Figura 11).

Como detalle curioso, el apellido Holbein significa *hueso* (Bein) *hueco* (hohl).

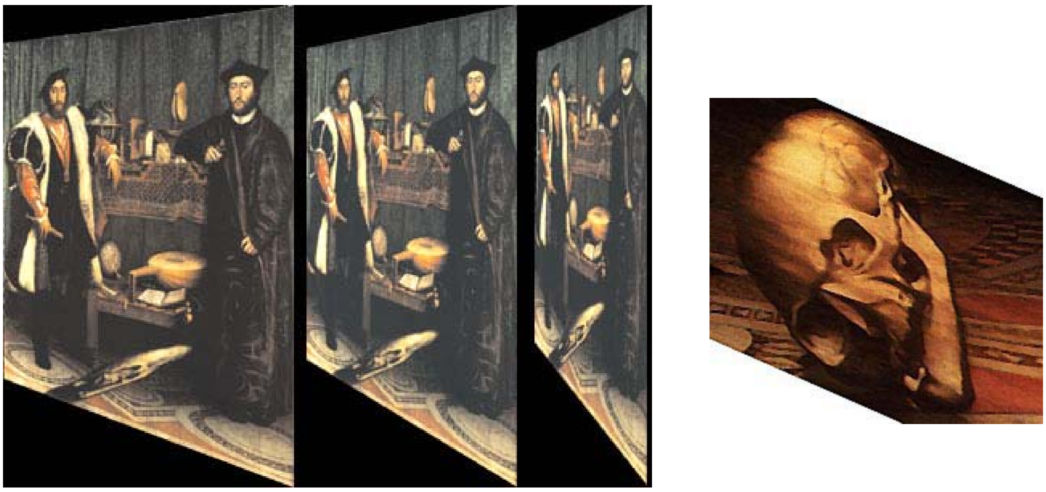


Figura 11.

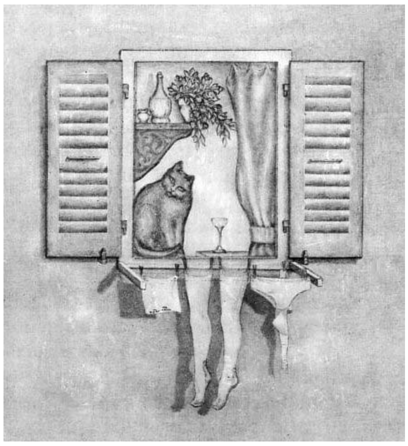
Los diseños anamórficos se utilizan también en la señalización de nuestras carreteras. La razón es que los conductores ven las marcas sobre el asfalto desde una posición inadecuada, con un aparente encogimiento de los objetos al ir avanzando. En el ejemplo de la Figura 12, el tamaño de la flecha parece el mismo que el de la palabra CAR debajo de ella. Pero, visto de lado, se observa que la flecha es más del doble de larga que la palabra: la señalización utiliza la herramienta del *estiramiento*.

Figura 12.

1.4. Figuras ambiguas

A continuación se dan varios ejemplos de imágenes ambiguas.

Roger N. Shepard (1929-), profesor de psicología, y su ilusión de figura y fondo *Sara Nader*.

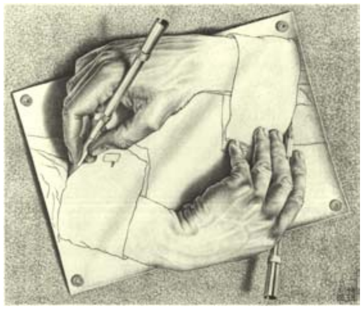


El artista suizo Sandro del Prete afirma: *Todo lo que vemos puede verse de otra manera*.

Figura 13.

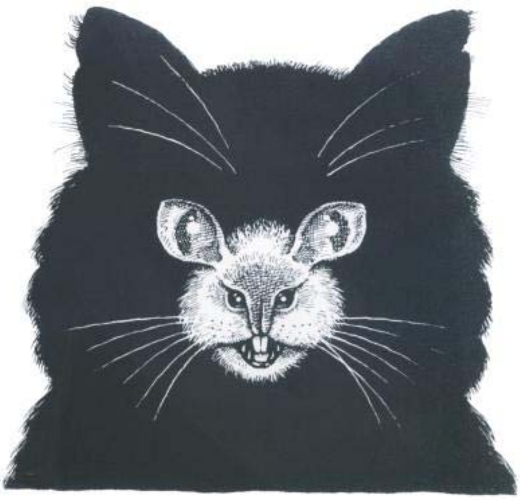
En la Figura 14 aparecen dos obras del artista gráfico Maurits Cornelius Escher (1898-1972), de clara ambigüedad:

El charco



Manos dibujando

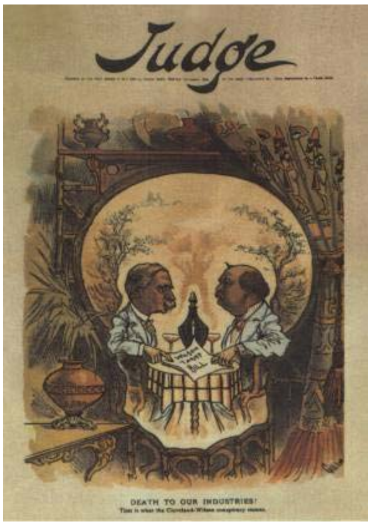
Figura 14.



El artista Peter Brookes es el creador de esta figura con superposiciones: al mirar de cerca se ve el ratón y de lejos aparece el gato…

En esta caja de cerillas están representados 12 elefantes, con sólo 6 cabezas (aparte del elefante central).

Figura 15.



Muchos carteles contienen figuras ambiguas, con intenciones críticas o reivindicativas. Gillam creó esta portada del *Magazine Judge* 26 (1894): es un cartel reivindicativo contra los aranceles. En la base del cartel se lee *Death to our industries. That is what Cleveland-Wilson conspiracy means*.

Figura 16.

1.5. Ambigramas

Scott Kim es un famoso creador de *ambigramas*, es decir, letras, palabras o números que son ambiguos. Algunos de ellos son imágenes reflejadas en un espejo, otras pueden leerse en sentido inverso, otras poseen dos significados contenidos en la misma palabra, etc.

Figura 17.

1.6. Ilusión fotográfica

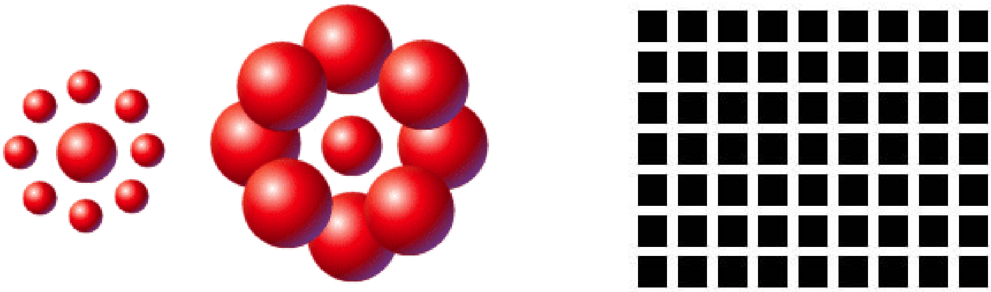
En la Figura 18 vemos una ilusión fotográfica debida al artista Jerry Downs. ¿Hacia qué lado mira el caballo?

Debajo se indican las dos posibilidades, con una línea que ayuda a visualizar la dirección.

Figura 18.

1.7. Ilusiones ópticas

A continuación se dan algunas de las ilusiones ópticas (debidas a problemas de percepción del ojo y cerebro humanos) más conocidas.



Ilusión de *Titchener y Delboeuf*
¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?

Ilusión del enrejado *por contraste de colores*

Figura 19.

¿Son paralelas las líneas que aparecen en las imágenes de la Figura 20?

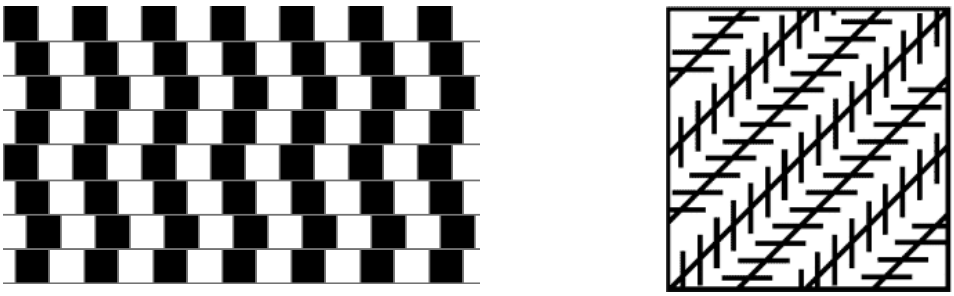
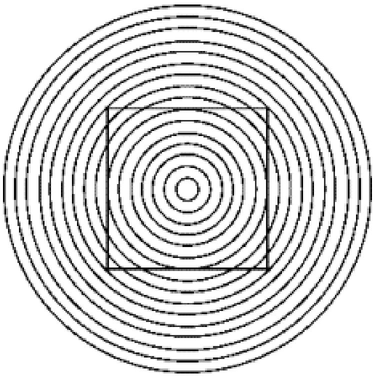
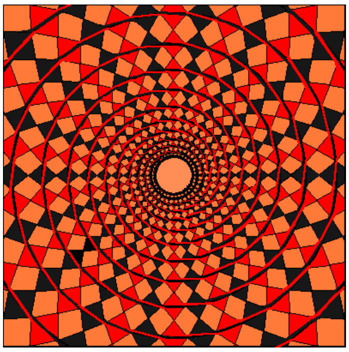


Figura 20.

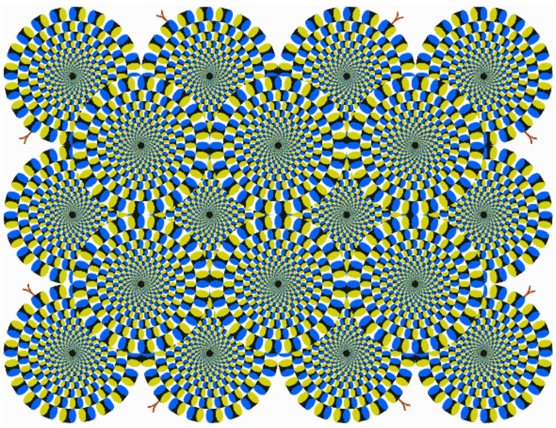


La figura central, ¿es un cuadrado?

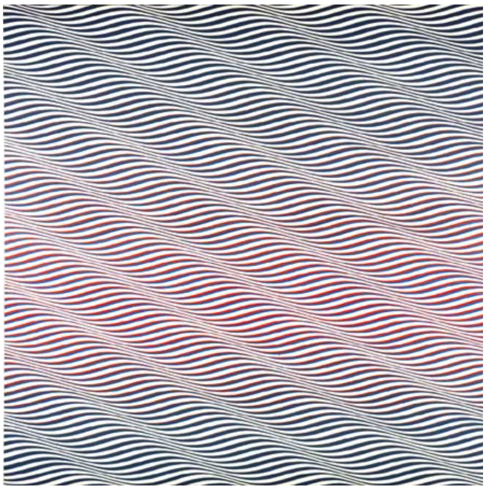


Ilusión de las cuerdas del psicólogo James Frazier: **¿son círculos o espirales?** El efecto desaparece cuando se oculta la mitad del dibujo.

Figura 21.



Esta ilusión óptica del psicólogo Akiyoshi Kitaoka se titula *Serpientes rotando*, … pero es una imagen estática.



La obra *Catarata* (1967) de Bridget Riley (1931-), representante del Op Art, parece moverse.

Figura 22.

1.8. Figuras imposibles

Guido Moretti (1947-) es físico y escultor. En las imágenes de las Figuras 23 y 24 se ven tres planos diferentes **¡del mismo objeto!**

Figura 23.

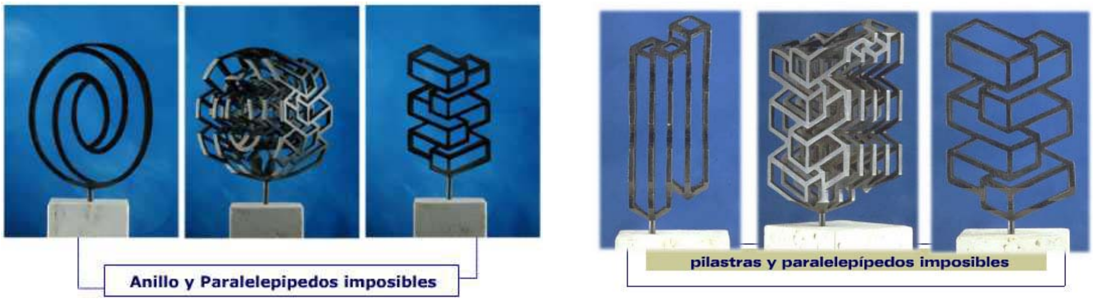


Figura 24.

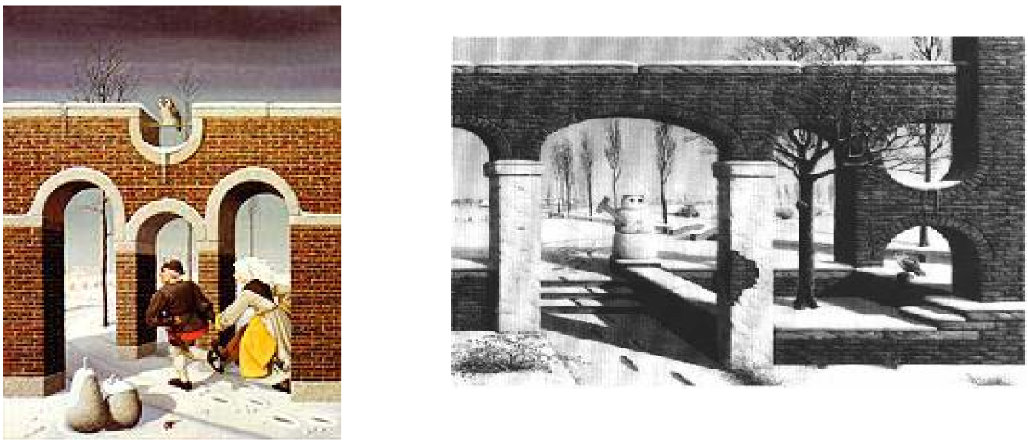


Figura 25.

La Figura 25 muestra dos figuras imposibles del artista Jos de Mey (1929-).

1.9. Figuras reversibles

La imagen de la Figura 26…

…¿es un granjero inglés…

…o su asno?

Figura 26.

El dibujo de la Figura 27, de Sergio Buratto,

¿es un sapo o…

…un caballo?

Figura 27.

¿O ambos?

El artista japonés Shigeo Fukuda (1932-) es un maestro de la ilusión y la ambigüedad, crea esculturas que parecen un completo caos, y miradas desde otros ángulos, el aparente desorden se transforma en perfección.

En su obra en madera *Encore*, de frente aparece un pianista. Si se va girando la figura, en cierto punto aparece una combinación extraña, y finalmente se aprecia al violinista.

Figura 28.

Peter Newell (1862-1924) dibujó en 1883 este *Caballero y Elfo de* la Figura 29: **un hombre sobre un caballo ataca al pobre elfo… que finalmente consigue defenderse.**

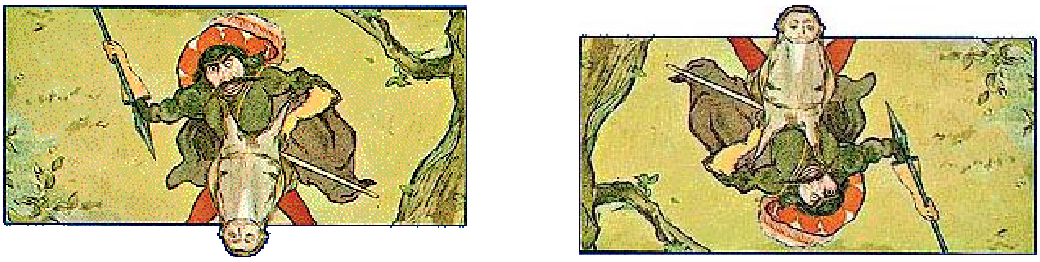


Figura 29.

En el libro *Topsys and turvys*, Peter Newell dibujó, entre otros, *Hombre saliendo del agua o… ahogándose* (Figura 30).

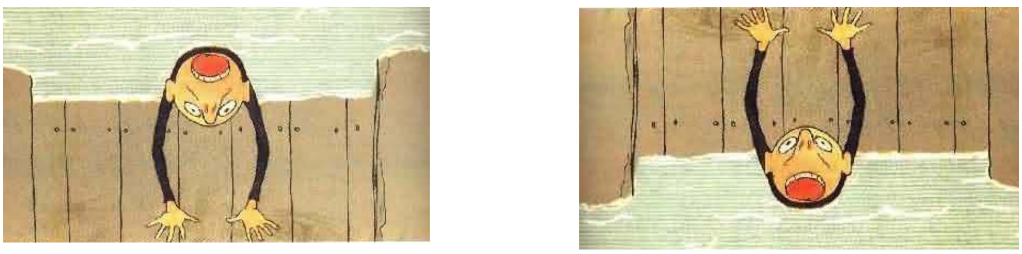


Figura 30.

Gustave Verbeck (1867-1937) es el creador de *A fish story*. En la Figura 31 aparece parte de esta historia: ***El mayor de los pájaros la coge por su vestido… justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole furiosamente con su cola…***

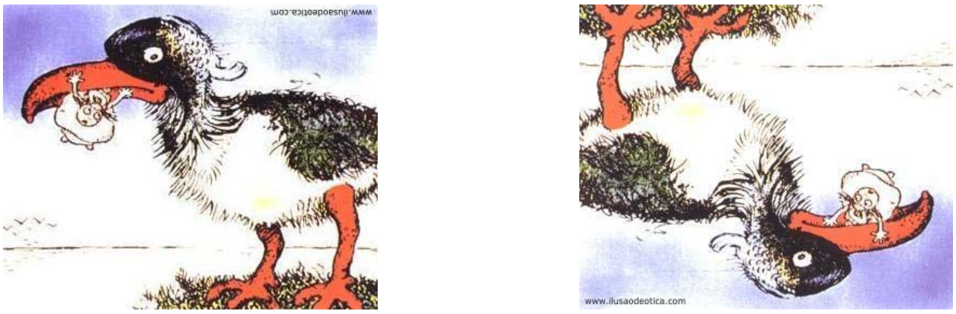


Figura 31.

Gustave Verbeck publicó una serie de comics *reversibles* en el Sunday New York Herald, a principios de 1900. La primera parte del comic se lee de manera normal, y cuando se le gira 180 grados, la historia continúa… En la Figura 32 aparece parte de *Little lady Lovekins and old man Muffaroo: the thrilling adventure of the dragon*… faltaría girarla para ver aparecer la otra historia escondida.

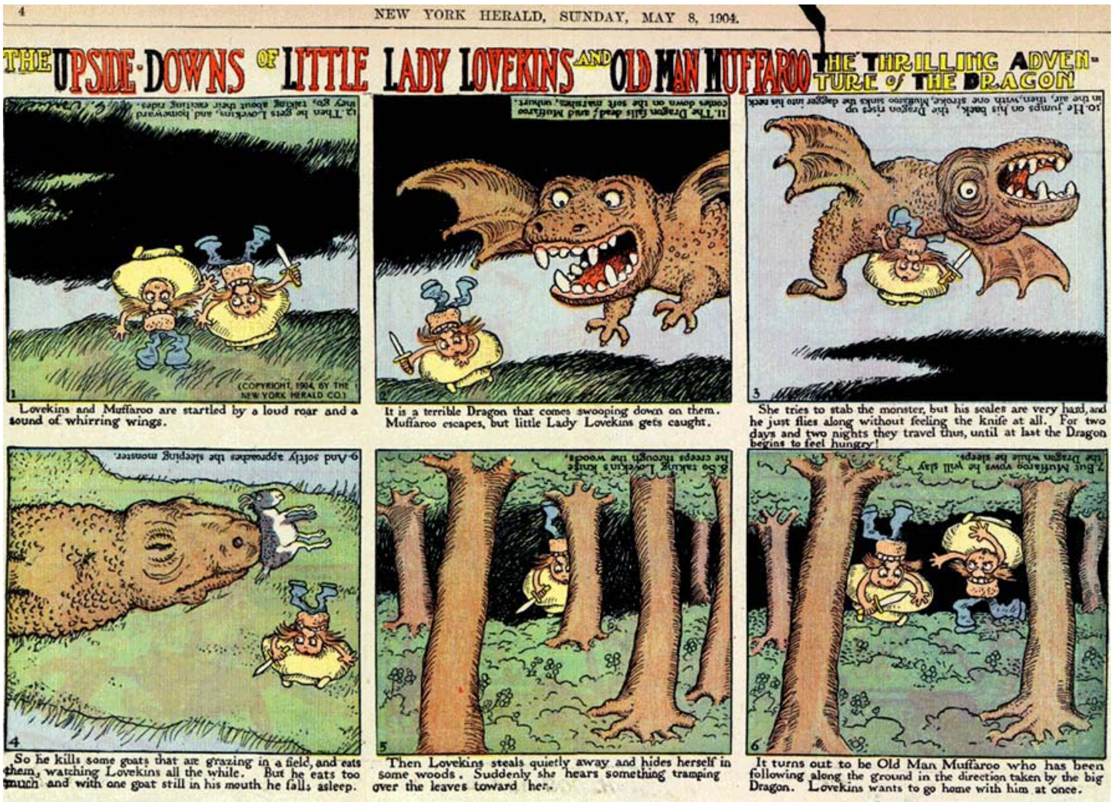


Figura 32.

El artista Rex Whistler (1905-1944) realizó los dibujos de la Figura 33 para una campaña publicitaria de Shell:

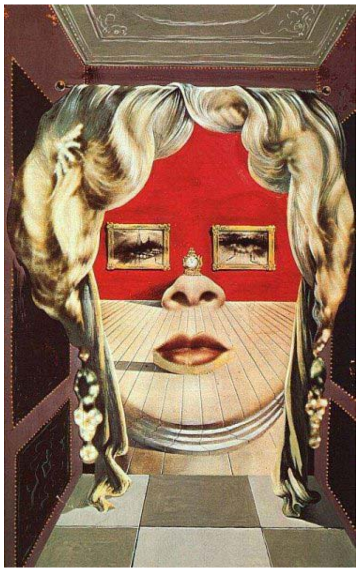
¿**Sherlock Holmes** o... ...**Robin Hood**? ¿**Sherezade** o... ...el **príncipe**?

Figura 33.

1.10. Salvador Dalí

Salvador Dalí (1904-1989) es uno de los mayores representantes del surrealismo. En la Figura 34 aparecen algunas de sus obras con imágenes paradójicas:

Boca misteriosa apareciendo en la espalda de mi nodriza



Rostro de Mae West que puede usarse como apartamento surrealista

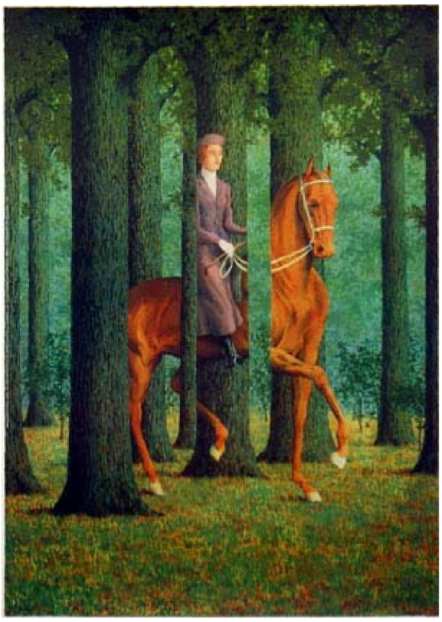
Figura 34.

Rostro paranoico: la tarjeta postal transformada en Picasso (Figura 35). Dalí encontró la postal de la derecha, y al verla verticalmente vio un rostro, que en un primer impulso creyó realizado por Picasso. Cuando comprobó que era sólo producto de su imaginación, reprodujo el efecto en su propia obra.

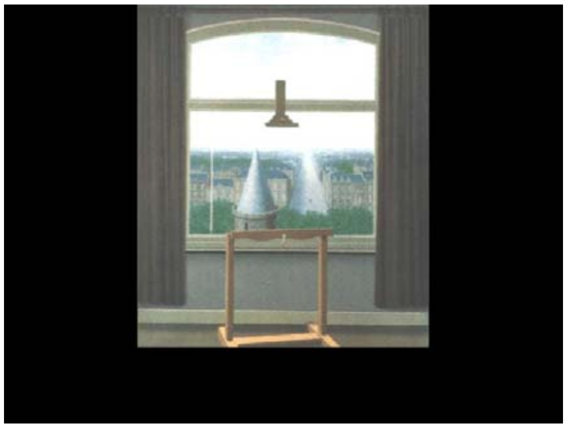
Figura 35.

1.11. René Magritte

René Magritte (1898-1967), fundador del surrealismo belga, dijo que *el arte de pintar tiene como objetivo hacer que el funcionamiento de la mirada sea perfecto*. En la Figura 36 aparecen dos de sus obras que encierran paradojas.



Carte blanche



Los paseos de Euclides: ejemplo de fusión de figura y fondo, donde además se asocia la cúpula cónica con la calle del fondo.

Figura 36.

1.12. Giuseppe Arcimboldo

Giuseppe Arcimboldo (1527-1593) pertenece al movimiento artístico del manierismo. En el siglo XX tiene una gran acogida puesto que sus retratos parecen precursores del surrealismo. La Figura 37 muestra su obra ***The librarian*** **(**1566).

Figura 37.

1.13. Octavio Ocampo

Octavio Ocampo (1943-) es uno de los pintores mexicanos más conocidos. En la Figura 38 aparecen dos de sus magnificas obras.

Mona Lisa: se trata de una silla ocupada por tres conejos (uno negro abajo a la izquierda y dos blancos abajo en el centro), un gato está sentado sobre un cojín en el centro y mira al observador. La silla tiene un respaldo que a primera vista parece la cara de la Mona Lisa, pero si se inspecciona con más cuidado aparecen dos mujeres, un hombre, un ángel, …

Las visiones del Quijote

Figura 38.

2. Paradojas del infinito

Desde sus orígenes, la matemática ha chocado con el infinito como un problema crucial.

La escuela eleática de filósofos fue fundada por el pensador, filósofo y poeta Xenofánes (nacido en 570 A.C.) y su principal enseñanza era que el universo es singular, eterno e incambiable: *El todo es uno*. De acuerdo con esta idea, las apariencias de multiplicidad, cambio, y moción son meras ilusiones.

Las paradojas de Zenón son el foco en la relación de lo discreto con lo continuo. Ninguno de sus escritos ha sobrevivido; se conocen sus ideas a través de los trabajos de Platón, Aristóteles, Simplicio y Proclus. De los aproximadamente 40 argumentos atribuidos a Zenón, destacamos dos relacionados con la moción: *Aquiles y la tortuga* y *La flecha*.

2.1. **Aquiles y la tortuga** (Aristóteles, *Physics* 239b, 15-18)

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es *mucho* más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al *lentísimo* animal. La paradoja que surge es que Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: en efecto, cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco…

Algo debe ser falso en este argumento… la paradoja aparece debido a la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad. La solución pasa por la convergencia de la serie

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 1.$$

2.2. **La flecha** (Aristóteles, *Physics* 239b, 5-7)

Supongamos un argumento de Zenón del tipo:

- un intervalo de tiempo se compone de *instantes* (que son la menor medida e indivisibles);
- en cada instante, una flecha no se mueve.

Si se observa el trayecto de una flecha en un período de tiempo infinitamente corto, el movimiento correspondiente a cada observación es nulo. La suma de todos estos ceros da aún cero, por lo tanto *¡la flecha ha estado siempre inmóvil!*

La solución consiste en aceptar que la flecha está en reposo en cada instante, pero rechazar que esto implique que la flecha no se mueve: lo que se requiere para que la flecha se mueva, es que esté en diferentes sitios en momentos cercanos. Un instante no es suficientemente grande para que tenga lugar el movimiento: este último es una relación entre objetos, lugares y varios instantes. Esta paradoja es un ejemplo de una conclusión inaceptable (*nada se mueve*) a partir de una premisa aceptable (*ningún movimiento ocurre* *durante un instante*), por un razonamiento inaceptable (*estar en reposo significa que la flecha está en el mismo lugar en instantes cercanos*).

3. Paradojas lógicas

Dos conjuntos infinitos son *equipotentes* (tienen el mismo *número cardinal*), si existe de una biyección del uno sobre el otro. El cardinal de un conjunto infinito es la extensión al caso de los conjuntos infinitos del concepto de número, y la equipotencia es la extensión de la noción de igualdad. No todos los conjuntos infinitos son *de igual tamaño*, como afirma el siguiente resultado:

Teorema de Cantor: *Dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad, $\wp(C)$ (el conjunto de sus partes).*

Bertrand Russell (1872-1970), Premio Nobel de Literatura en 1930 y Medalla Fields en 1966, descubre una contradicción al considerar el teorema de Cantor:

> El conjunto de todas las cosas U debe tener mayor cardinal que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (y todo conjunto) es una cosa. Así, $\wp(U)$ debe de estar contenido en U, en cuyo caso
>
> $$\text{card}(\wp(U)) \leq \text{card}(U) < \text{card}(\wp(U)),$$
>
> y así el resultado cantoriano debía ser erróneo.

Existía en aquella época un postulado (surgido de la lógica tradicional aristotélica) que se venía implícitamente tomando como base para la teoría de conjuntos, llamado *principio de comprensión*, que afirma que *dada una propiedad P, existe siempre un conjunto que la cumple:* $\{x: P(x)\}$. Lo que hace Russell es refutarlo, tomando como proposición

$$P(x)= (x \notin x),$$

y deduciendo una contradicción: así, se invalida la llamada teoría *ingenua* de conjuntos.

Algunas propuestas de solución de esta paradoja han sido:

- la complicada y filosófica *teoría de tipos* de Russell, que afirma que deben arreglarse todas las sentencias en una jerarquía: es entonces posible referirse a todos los objetos para los que un determinado predicado es cierto sólo si están ambos en el mismo nivel o son del mismo tipo. Así, una expresión de la forma $(x \notin x)$ no se considera como válida;
- la elegante *axiomatización de la teoría de conjuntos* de Ernst Zermelo, que elimina el principio de comprensión e incluye de manera destacada el llamado axioma de elección: se admiten en la teoría sólo aquellas clases de las que no pueden derivarse contradicciones. Su sistema de axiomas contenía conceptos y relaciones fundamentales que estaban definidas implícitamente por las afirmaciones de los axiomas mismos. La fundamentación de la teoría de conjuntos de Zermelo fue mejorada por Abraham Fraenkel, y Von Neumann introdujo cambios adicionales.

4. Paradojas semánticas

Fijémonos en la sentencia

L: *Lo que estoy diciendo ahora es falso*.

Liar significa mentiroso en inglés

Figura 39.

Si ***L*** es verdad, es falsa, y si es falsa, es verdad. ¿Es esto paradójico? Tenemos dos afirmaciones condicionales:

1) Si ***L*** es verdad, entonces es falsa.
2) Si ***L*** es falsa, entonces es verdad.

Asumiendo que cuando algo es falso no es verdad, y que todo lo que es verdad no es falso, 1) y 2) pueden escribirse de la siguiente manera:

1*) Si ***L*** es cierta, entonces es no cierta.
2*) Si L es falsa, entonces es no falsa.

Existe un principio de razonamiento llamado *consequentia mirabilis*, que dice que si una sentencia implica su propia negación, se puede inferir su falsedad.

Ambas 1*) y 2*) dan argumentos para este principio: 1*) asegura que si ***L*** es cierto, implica su negación, luego el principio nos lleva a inferir que ***L*** es no cierto; y de manera paralela, 2*) nos lleva a concluir que ***L*** no es falso. Así, un razonamiento estándar garantiza que ***L*** es no cierto y no falso. Luego ***L*** no es ni cierto ni falso.

¿Es esto paradójico? No, excepto si se admite un *principio de bivalencia* que afirma, de manera esquemática, que toda sentencia es cierta o falsa.

¿Es todo principio de bivalencia cierto? Las preguntas se expresan en sentencias, pero no toda pregunta es o bien cierta o bien falsa. Supongamos entonces que restringimos el principio a sentencias declarativas. Pero aún así hay contraejemplos... Consideremos la sentencia:

Has dejado de fumar.

Si tú nunca has fumado, la sentencia es ciertamente falsa, pero decir que no es cierta sugiere que sigues fumando... El principio de bivalencia se alcanza debido a la creencia de que toda representación no defectuosa de cómo las cosas están en el mundo, debe ser o bien correcta o incorrecta, verdadera o falsa.

Una solución a esta paradoja es la famosa *jerarquía de Tarski*: el concepto ordinario de *verdad* es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de *conceptos de verdad,* jerárquicamente ordenados y cada uno de ellos expresado en un lenguaje diferente de cualquier lenguaje natural (es decir, de lenguajes que evolucionen de manera natural).

Mucha gente ha pedido algo menos radical, una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinario. Una de estas respuestas menos radicales se basa en la noción de jerarquía de Tarski, pero afirma que esto está de hecho implícito en nuestro actual uso de *verdad*. En contra de Tarski, que afirma que el lenguaje ordinario es irremediablemente defectuoso, esta alternativa afirma que los defectos son una mera apariencia: la realidad subyacente es que usamos ya una jerarquía tipo Tarski de los conceptos de verdad.

5. Paradojas de la vaguedad

Sorites es la palabra griega para *montón* o *pila*. Las paradojas de tipo *sorites*, atribuidas al lógico Eubulides de Mileto, son una serie de argumentos paradójicos que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados involucrados.

Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos un montón de arena: si se quita un grano de arena, sigue siendo un montón. De otra manera, si dos familias de granos de arena difieren en un grano, o bien los dos son montones o ninguno de los dos los son. Esta aparentemente obvia y no controvertida suposición da lugar a la conclusión paradójica de que todos los conjuntos de granos de arena, incluso las colecciones formadas por único un grano, son montones. El problema aquí es que la palabra clave ***montón*** es una palabra *vaga*.

Otros ejemplos de estas paradojas son:

- *el hombre con capucha*: dices que conoces a tu hermano, este hombre con la cabeza cubierta es tu hermano y no le conoces...
- *el hombre calvo*: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un *lenguaje ideal*, cuyo atributo clave es su precisión: la *vaguedad* del lenguaje natural es un defecto a eliminar (propuesta por Frege y Russell);

- la utilización de *lógicas multivaluadas* (no clásicas), como la *lógica difusa* de Goguen y Zadeh (1969), que sustituye a la usual (dos-valuada) y que reconoce para un objeto *los grados* de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón… o en otra versión… *¡la calvicie no existe!*

6. Paradojas de la confirmación

Carl Gustav Hempel (1905-1997), filósofo de la Ciencia e inventor de esta paradoja, afirma que la existencia de una *vaca de color violeta* incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros. **¿Por qué?**

Para responder, establezcamos la ley
Todos los cuervos son negros,

de una manera diferente, pero lógicamente equivalente:

Todos los objetos no-negros no son cuervos.

Figura 40.

Hempel dice: *He encontrado un objeto no-negro: una vaca violeta. Por lo tanto, esto confirma (débilmente) la ley* **Todos los objetos no-negros no son cuervos**. Y así, también confirma la ley equivalente ***Todos los cuervos son negros***.

Es fácil encontrar millones de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema con la paradoja de Hempel es que observando objetos no-negros se confirma la ley ***Todos los cuervos son negros***, pero sólo a un nivel *infinitesimal*: la clase de objetos en la Tierra que no son cuervos es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos, que el grado con en el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una *vaca de color violeta* confirma del mismo modo el enunciado ***Todos los cuervos son blancos***...

Se define un objeto como *verul*, si observado antes del tiempo t es verde, y azul después de t. Si $t = 1$ de junio de 2005, Nelson Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son verdes o verules es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente.

7. Paradojas de la predicción

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:

Una mañana de este mes serás ejecutado, pero no lo sabrás hasta esa misma mañana, de modo que cada noche te acostarás con la duda, que presiento terrible, de si esa será tu última sobre la Tierra.

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad. Sin embargo, ***sorpresa***, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día **13** (era **martes**), el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado. La sentencia se cumple literalmente.

¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?

Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que *el* ***mes***. Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes. El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es tan irreprochable como el estudio paso por paso de la carrera de Aquiles. El defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto ***este mes*** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes (***cada día***), no advirtiendo que el conjunto ***mes*** ha incorporado nuevas características, como por ejemplo la de contener ***días sorpresa***.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres:
el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la *esencia* de la paradoja del condenado.

8. Paradojas físicas

Si un pequeño porcentaje de los *billones* de estrellas en la galaxia fueran el hogar de civilizaciones con tecnología avanzada, capaces de colonizar a distancias interestelares, la galaxia completa estaría completamente *invadida* en unos pocos millones de años. La ausencia de tales civilizaciones extraterrestres visitando la tierra es *la paradoja de Fermi*. *¿Pero, dónde están?*

Existen dos corrientes principales en la visión de la vida:

- la de los *copérnicos* que afirman la tierra es un planeta *cualquiera* alrededor de una estrella cualquiera de la galaxia, la vida es un fenómeno *corriente* y lleva algún día a la aparición de civilizaciones con tecnología;
- la de los *geocéntricos* que propone que el lugar del *Hombre* es la conquista de una galaxia *vacía* de civilizaciones.

Los geocéntricos se han equivocado *tanto* a lo largo de la historia, que vamos optar por la primera de la opciones.

Existe una fórmula debida al astrónomo Frank Drake (1930-) que permite estimar el número de civilizaciones inteligentes con tecnología avanzada, susceptibles de estar presentes en nuestra galaxia. Está basada en conocimientos que van desde la astrofísica hasta la biología, y es el producto:

$$N = E \times P \times F \times V \times I \times C \times L,$$

donde:

- E es número de estrellas en nuestra galaxia: unas *400.000.000.000*.
- P es número medio de planetas alrededor de las estrellas: *valor estimado entre 5 y 20*. Los científicos piensan que los planetas se forman corrientemente alrededor de las estrellas, a pesar de las dificultades teóricas que se tienen aún para modelizar estos procesos. Además, el número de exo-planetas no cesa de crecer de año en año, por lo que los pequeños planetas aún no detectables serán probablemente más numerosos.
- F es porcentaje de planetas favorables a la vida: *valor estimado entre el 20 y el 50%*. Juega a favor el hecho de que el agua es una molécula muy abundante y en contra el que la *zona habitable* en un sistema varía en función de numerosos parámetros, no siempre muy estables.
- V es la probabilidad de aparición de la vida: *valor estimado entre el 20 y el 50%*. Los bioquímicos estiman que la vida es un fenómeno *muy común* una vez que las circunstancias son favorables, aunque muchas catástrofes pueden matar una vida frágil y naciente.
- I es la probabilidad de emergencia de seres inteligentes: *valor estimado entre el 20 y el 50%*. A favor de esta cantidad está la evolución biológica y en contra el factor tiempo.
- C es la probabilidad de aparición de una civilización tecnológica con capacidad de comunicación: *valor estimado entre el 20 y el 50%*. La información es sinónimo de desarrollo, pero ¿todas las civilizaciones experimentan la necesidad de comunicarse con otros seres en el cosmos?
- L es duración de la vida de una civilización avanzada: *valor estimado entre 100 y 10.000.000 años*. ¿Dispone una civilización de los medios tecnológicos necesarios para un contacto extraterrestre durante un breve instante antes de autodestruirse?

Por ejemplo, usando esta fórmula, el número de civilizaciones con 400.000.000.000 estrellas, 10 planetas alrededor de cada estrella, 50% de planetas favorables a la vida, 50% de probabilidad de vida, 50% de probabilidad de vida inteligente, 50% de probabilidad de civilización técnica y 10.000.000 años de duración de una civilización sería de 250.000.000.000.

El factor preponderante en la ecuación de Drake es el *tiempo*, es decir la fórmula tiene una gran dependencia del factor L, que impone que:

- si las civilizaciones tecnológicas viven un ***breve instante*** de tiempo antes de autodestruirse, entonces el número de civilizaciones en el universo es cercano a ...1;
- al contrario, si la duración de la vida de estas civilizaciones se cuenta en ***millones de años***, entonces el universo debería estar *invadido* por mensajes de radio.

Para L = 10.000 años (*¿modelo terrestre?*) existirían según esta fórmula unas 10.000 civilizaciones, y si estuvieran repartidas de manera aleatoria por las estrellas de la galaxia, la más cercana a nosotros estaría a 1.000 años-luz. Nuestras emisiones de radio comenzaron hace unos 50 años, por lo que aún estaríamos a muchos años de ser encontrados (y estudiados).

¿Estamos solos? No... estamos muy lejos.

9. Paradojas de la teoría de la probabilidad

Esta paradoja trata sobre el cálculo de probabilidades y el concepto abstracto de esperanza matemática. Se debe a Nicolás Bernoulli (1695-1726).

La pieza del dramaturgo inglés Tom Stoppard *Rosencrantz y Guildenstern han muerto* (1966) se abre con una escena en donde los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a cara y cruz: el desafortunado Guildenstern ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han regresado, como lo manda el juego, a Rosencrantz. A pesar de la gran improbabilidad de una tal serie, los dos saben que es posible. Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, Rosencrantz propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara: si esto sucede en la primera tirada, dará 1 moneda a Guildenstern, en la segunda tirada, 2 monedas, en la tercera, 4 monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la pieza cae en cruz.

¿Cuánto dinero debería pagar Guildenstern a Rosencrantz para que el juego sea equitativo?

El problema se resuelve fácilmente en términos de esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento cara aparece en la tirada n es de

$$1/2^{n-1}\,(1/2) = 1/2^n.$$

La *esperanza* de ganar de Guildenstern es, pues, la suma

$$1/2 + 2(1/2)2 + 4(1/2)3 + 8(1/2)4 +...+ 2n\text{-}1(1/2)n +\ldots=$$
$$1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 +...+ 1/2 +\ldots= \infty$$

Así, en honor a la ***equidad***, el juego no debería tener lugar.

La progresión de ganadas es muy rápida: es la serie geométrica de razón 2. Se podría reemplazar el 2 por un número inferior q y retomar los cálculos: en este caso, la esperanza de ganada de Guildenstern sería

$$1/2 + q(1/2)2 + q2(1/2)3 + q3(1/2)4 + ... + qn\text{-}1(1/2)n + \ldots=$$
$$1/2(1 + q/2 + (q/2)2 +...+ (q/2)n +\ldots)= 1/(2 - q).$$

La ***ganada infinita*** de Guildenstern aparece como caso límite cuando q tiende a 2. Haciendo variar q, se puede establecer la lista de ganadas de Guildenstern y el dinero que deberá ceder a Rosencrantz al principio del juego. En todos los casos, y en ausencia de cualquier otra condición, parece preferible renunciar a este juego tan azaroso, tanto en el papel de Guildenstern como de Rosencrantz.

10. Paradojas topológicas

10.1. La banda de Möbius

La *banda de Möbius* se obtiene al identificar dos de los lados opuestos de un cuadrado, girando previamente uno de ellos, como se muestra en el dibujo de Tim Hunkin.

Es una superficie (variedad de dimensión dos) con ***una*** única cara, ***un*** solo borde y ***no orientable***. Estos hechos son ya paradójicos al fijarse en un cilindro, obtenido al identificar dos de los lados opuestos de un cuadrado: es una superficie con ***dos*** caras, ***dos*** bordes y ***orientable***.

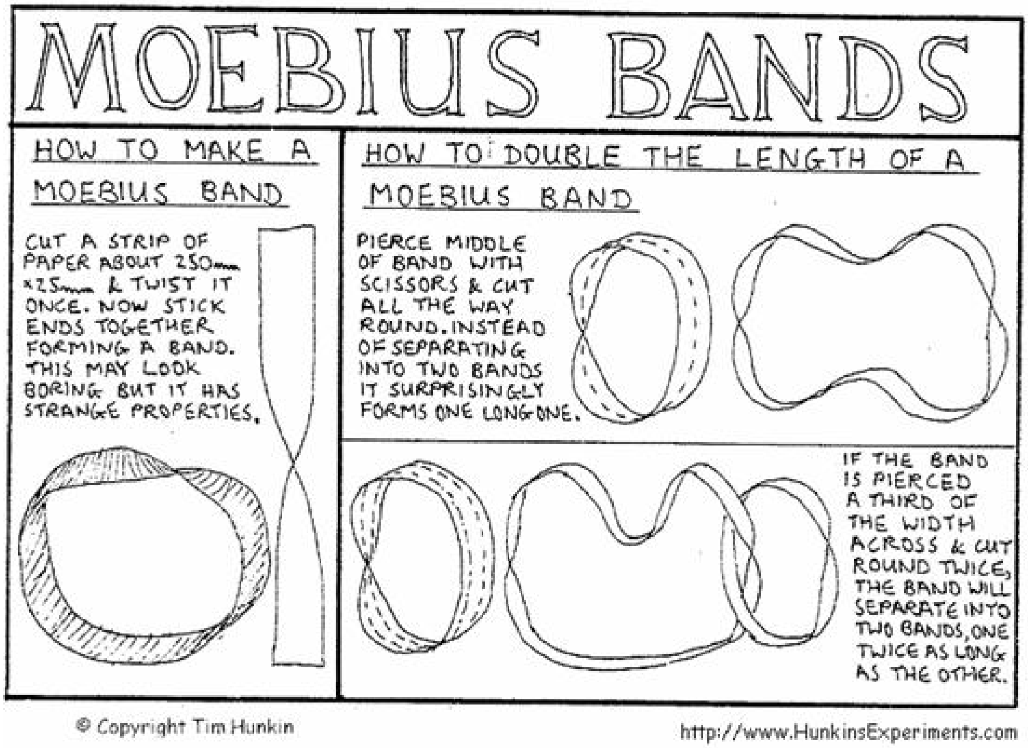


Figura 41.

Se pueden realizar algunas experiencias con la banda de Möbius, que dan resultados paradójicos:

- Si se corta la banda por su mitad, como muestra la Figura 41, aparece una cinta el doble de larga, que contiene 4 semivueltas, dos caras y dos bordes, luego no es una banda de Möbius, sino un cilindro;
- Si se corta la banda de Möbius a la altura 1/3, se obtienen dos bandas de Möbius entrelazadas, una más larga que otra: la altura 1/2 es la única ***especial***.

La banda de Möbius ha inspirado a artistas y científicos, como muestran los ejemplos que siguen.

El dibujante e ilustrador Jean Giraud *Möbius* (1938-), y su autocaricatura, portada del libro *Mi doble y yo*.

Las hormigas de Escher.

Elisabeth Zimmermann y sus bufandas de Möbius.

Figura 42.

Fábrica de construcciones metálicas en Wittenbach (Suiza). Meister Stahlbau *Bigen ist eine Kunst*.

Banda de Möbius de LEGO, de Andrew Lipson.

El matemático Cliff Long (1931-2002) y su banda de Möbius como base de esta escultura de madera *Bug on a band*.

The infinity climber.

Figura 43.

Una variante de la banda de Möbius es un juego de niños diseñado por Gerald Harnett: el *Möbius Climber Lands* (Figura 44) consiste en 64 triángulos enlazados y montados de manera que, en cada punto, se observa la estructura torcida. Está situado en el *Sugar Sand Science Playground*, parque de la Ciencia situado en Boca Ratón (Florida), y fue creado con ayuda del programa *Mathematica*.

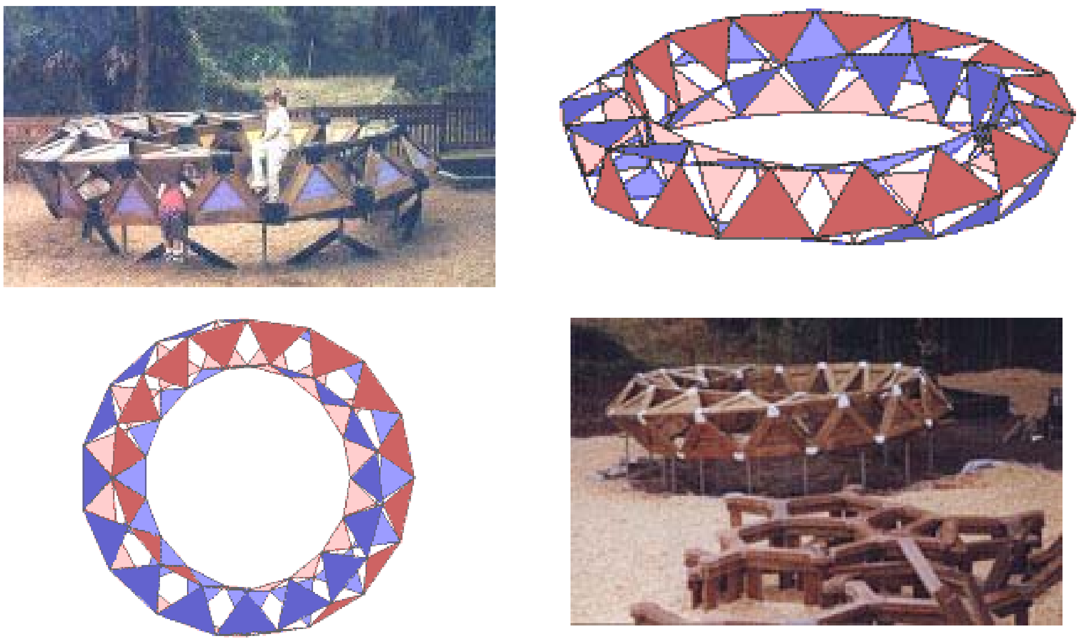


Figura 44.

10.2. La botella de Klein

La *botella de Klein* es una superficie obtenida al identificar los lados de un cuadrado como muestra la Figura 45:

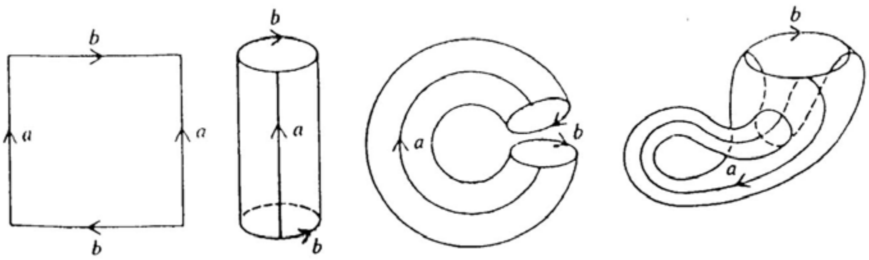
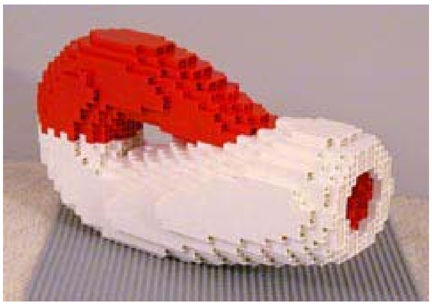


Figura 45.

Esta figura no puede construirse en el espacio de dimensión tres sin autointersecarse, pero sí que está contenida en el espacio de dimensión cuatro.

La botella de Klein presenta varias propiedades paradójicas: posee ***un*** solo lado (no tiene cara interior ni cara interior) y ***no*** tiene borde: de hecho, puede obtenerse esta superficie a partir de dos bandas de Möbius, y por ello hereda sus ***extrañas*** propiedades.

La botella de Klein ha servido de modelo para muchas construcciones extraordinarias, como muestran las imágenes que aparecen a continuación.



La botella de Klein de LEGO de Andrew Lipson.

La botella de Klein de origami de Robert Lang.

Figura 46.

En la Figura 47 aparecen algunas botellas de Klein de Cliff Stoll, de la *Acme Klein Bottle*.

Figura 47.

11. Paradojas epigramáticas

Los epigramas primitivos, como indica su etimología griega (*epi*, sobre y *gramma*, escritura) eran textos breves destinados a figurar como inscripción en un sepulcro, una base de estatua, etc. El epigrama literario, muy difundido en época helenística, tiene su origen en estas inscripciones y de ellas toma gran parte de las características del género: brevedad, concisión, ingenio y vivacidad expresiva. El epigrama literario, concebido para ser leído o recitado, extiende su temática y pasa a expresar la más variada gama de sentimientos; se encuentran epigramas eróticos, satíricos, costumbristas, festivos y, por supuesto, fúnebres.

Aquí se destacan sólo tres de las ***paradojas epigramáticas*** que aparecen en los textos breves de Oscar Wilde (1854-1900):

Y, sin embargo, cada hombre mata lo que ama, sépanlo todos:
unos lo hacen con una mirada de odio;
otros con palabras cariñosas;
el cobarde con un beso;
¡el hombre valiente, con una espada!
Balada de la cárcel de Reading, 1896

- Gerardo: *Supongo que se divertirá uno extraordinariamente en sociedad.*
- Lord Illingworth: *Formar simplemente parte de ella es insoportable. Estar excluido de ella es sencillamente una tragedia.*
Una mujer sin importancia, 1893

... Es tonto por su parte, pues sólo hay en el mundo una cosa peor que el que hablen de uno, y es que no hablen.
El retrato de Dorian Gray, 1890

Referencias

[Ba] **J. Baltrusaitis:** *Anamorphoses: les perspectives dépravées II*. Flammarion, 1996.

[Bl] **J.R. Block:** *Seeing double*. Routledge, 2002.

[BS] **B. Bolzano, H. Sinaceur:** *Les paradoxes de l'infini*. Seuil, 1999.

[EF] **G.W. Erickson, J.A. Fossa:** *Dictionary of paradox*. University Press of America, 1998.

[F] **N. Falleta:** *Paradoxicon*. Doubleday and Co., 1983.

[G] **A.R. Garciadiego Dantán:** *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*. Alianza, 1992.

[GR] **M. Gooding, J. Rothenstein:** *The playful eye*. Chronicle Books, 2000.

[L] **F. Leeman:** *Hidden images. Games of perception. Anamorphic art. Illusion*. Harry N. Abrahams, 1975.

[Lo] **S. Loyd:** *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with answers)*. Lamb. Publishing Co., 1914.

[Mc] **McLoughlin Bros.:** *The magic mirror. An antique optical toy*. Dover, 1979.

[Mo] **S. Moretti:** *La "terza via" alla scultura. The"third way" to sculpture.* Comunicare Ed., 2004.

[N] **J. Ninio:** *The science of illusions.* Cornell University Press, 2001.

[Se1] **A. Shekel:** *La mirada fantástica.* Onlybook, 2002.

[Se2] **A. Shekel:** *El ojo habla.* Onlybook, 2002.

[Se3] **A. Seckel:** *Masters of deception: Escher, Dalí & the artists of optical illusion.* Sterling Publishing Co., 2004.

[Sh] **R.N. Shepard:** *Mind sights.* Freeman, 1990.

[St] **T. Stoppard:** *Rosencrantz y Guildenstern han muerto.* Edicusa, 1969.

[W] **O. Wilde:** *Obras completas.* Aguilar, 1994.

Los siguientes enlaces a páginas web están ordenados por orden de aparición de cada concepto en el texto, para facilitar la búsqueda.

William Hogarth, http://www.haleysteele.com/hogarth

The Hogarth archive, http://www.lamp.ac.uk/hogarth

Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums (with answers), http://www.mathpuzzle.com/loyd

Art of Anamorphosis, http://www.anamorphosis.com

Art of Anamorphosis (shown at the Arts Centre Washington, Tyne & Wear), http://myweb.tiscali.co.uk/artofanamorphosis/exhibition/index.html

Anamorphic art, http://nths.newtrier.k12.il.us/academics/math/Connections/perception/anamorph.htm

Anamorphic art, http://www.counton.org/explorer/anamorphic/cylmirror.html

The Anamorphic Art of Kelly M. Houle, http://www.kellymhoule.com/anamorphic_art_frameset.htm

Anamorphic photographs, http://www.physics.uoguelph.ca/morph/main.html

István Orosz's, http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716

Erhard Shön, http://math.truman.edu/~thammond/history/Schon.html

Los Embajadores de Holbein, http://www.math.nus.edu.sg/%7Emathelmr/teaching/holbein.html

Ilusiones ópticas, http://www.psicoactiva.com/ilusion.htm

Amazing Art: Illusions, hidden and impossible images, http://members.lycos.nl/amazingart

Masters of Deception (entrevistas, fotos y videos), del libro Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion, Sterling Publishing Co., 2004, http://neuro.caltech.edu/~seckel/mod

Un mondo di illusioni ottiche, http://www.illuweb.it

Unmögliche Konstructionen und andere optische Illusionen,
http://www.kayestler.de/illusions

Roger Shepard, http://www.rr0.org/ShepardRogerN.html

Sandro del Prete,
http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses Material/www.illusionworks.com/html/art_of_sandro_del_prete.html

Maurits Cornelius Escher, http://www.mcescher.com

Gef's ambigram gallery, http://www2.iap.fr/users/esposito/ambigallery.html

Scott Kim, http://www.scottkim.com/

Akiyoshi Kitaoka, http://www.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/index-e.html

Bridget Riley, http://www.artguide.org/uk/AG.pl?Action=281047A&Axis=904980055P

Guido Moretti, http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm

Jos de Mey, http://www.arsetmathesis.nl/demey.htm

Sergio Buratto, http://ilusaodeotica.fateback.com/Thsergio.html

Shigeo Fukuda, http://members.aol.com/webcarlos2/Optical/Artists/Fukuda.htm

Meter Newell, http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html

Gustave Verbeck, http://cartoons.osu.edu/newspaper_artists/verbeck/verbeck.html

Gustave Verbeck, http://www.lambiek.net/verbeck.htm

Rex Whistler, http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html

Salvador Dalí, http://www.salvador-dali.org/esp/

René Magritte, http://www.magritte.com/

Giuseppe Arcimboldo, http://www.illumin.co.uk/svank/biog/arcim/arcidx.html

Octavio Ocampo,
http://www.visionsfineart.com/Merchant2/merchant.mv?Screen=CTGY&Store_Code=VFAG&Category_Code=oo

Paradoja de Aquiles y la tortuga,
http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/zeno_tort/index.asp

Paradoja de la flecha de Zenón,
http://faculty.washington.edu/smcohen/320/ZenoArrow.html

Paradoja de Russell, http://plato.stanford.edu/entries/russell-paradox

Paradoja del mentiroso, http://www.iep.utm.edu/p/par-liar.htm

Paradojas de Sorites, http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/

Paradoja de Hempel, http://en.wikipedia.org/wiki/Hempel's_paradox

Paradoja de Fermi, http://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_paradox

Ecuación de Drake, http://personal.telefonica.terra.es/web/sagan/ecdrake.htm

Ecuación de Drake,
http://webs.demasiado.com/setihispano/Documentacion/Ecuacion/ecuacion.htm

Ecuación de Drake, http://contact-themovie.warnerbros.com/cmp/int-drake.html

Paradoja de San Petesburgo, http://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg

Tom Stoppard, http://www.imagi-nation.com/moonstruck/clsc46.html

Homemade Topological Shapes, http://web.meson.org/topology

Andrew Lipson's LEGO® Page,
http://web.archive.org/web/20040211064801/www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/lego.htm

Tim Hunkin, http://www.timhunkin.com/

Jean Giraud, http://www.bpib.com/illustrat/giraud.htm

Banda de Móbius en movimiento (short looping animation by Vlad Holst of the endless cycle of reincarnation), http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/strip.mov

How to Knit a Möbius Strip, http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbknitmobius.htm

Crocheted Mobius scarf instructions,
http://home.att.net/~susanBinKC/patterns/mobius.html

Acme Klein Bottles, http://www.kleinbottle.com/classicalklein.htm

Instrucciones para hacer una botella de Klein,
http://www.math.gatech.edu/~berglund/OneSided/KBHat.pdf

Oscar Wilde, http://www.booksfactory.com/writers/wilde_es.htm