# La conjetura de Baum-Connes en la teoría de foliaciones

Marta Macho Stadler*

## 1 Introducción

En el "mundo conmutativo", las herramientas más inmediatas y potentes son la homología y el grupo fundamental. Pero, no poseen generalizaciones claras "no conmutativas". La K-teoría topológica [A] (que posee una descripción simple a partir de fibrados vectoriales complejos de dimensión finita y localmente triviales sobre $M$) es el instrumento más fructífero y además pasa inmediatamente al mundo no conmutativo.

Es de sobra conocido que, para cada espacio localmente compacto $M$, la C*-álgebra $C_0(M)$ de las funciones continuas nulas en el infinito, permite "reconstruir" $M$, y que existe un isomorfismo entre la *K-teoría topológica* de $M$ y la *K-teoría analítica* de $C_0(M)$.

La *conjetura de Baum-Connes*, independientemente de su significado en el marco de la teoría del índice, busca establecer un análogo de este isomorfismo para ciertos espacios "singulares": los espacios de hojas de foliaciones. De manera más precisa, si $\mathcal{F}$ es una foliación de clase $C^\infty$ sobre una variedad $M$, $M/\mathcal{F}$ es un mal cociente en muchos casos y por ello, para obtener información sobre la estructura transversa de la foliación, es preciso usar otro tipo de objetos:

(i) la dinámica de $\mathcal{F}$ viene descrita por su grupoide de holonomía $G$, que es un grupoide de Lie, que se puede considerar como una desingularización del espacio de las hojas $M/\mathcal{F}$. A $G$, como a todo grupoide de Lie, se le asocia una C*-álgebra de funciones $C^*_{red}(G)$ - que denotaremos por $C^*(M,\mathcal{F})$ -, que se interpreta como el "espacio de las funciones continuas nulas en el infinito" sobre $M/\mathcal{F}$. Y la K-teoría analítica del espacio de hojas, $K_{an}(M/\mathcal{F})$, se define como la de esta C*-álgebra, $K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$;

*Investigación financiada por UPV 127.310-EA 146/98

(ii) además, procediendo por analogía con el caso de grupos, se puede construir para $G$ un *espacio clasificante* $BG$, sobre el cual $G$ actúa libre y propiamente, pero que no es en general una variedad (y ni siquiera posee el tipo de homotopía de una variedad!). $BG$ debe pensarse como el espacio de las hojas, módulo homotopía. En [BC], se introduce una K-teoría $G$-equivariante generalizada asociada a este objeto, $K_{*,\tau}(BG)$, que se define como la K-teoría topológica, $K_{top}(M/\mathcal{F})$, del espacio de hojas.

Intuitivamente, $G$, $C^*(M, \mathcal{F})$ y $BG$ son objetos completamente determinados por $\mathcal{F}$ y portadores de la misma "información". Los operadores elípticos proporcionan una aplicación entre los dos grupos de K-teoría arriba descritos,

$$\mu: K_{top}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow K_{an}(M/\mathcal{F}).$$

La conjetura de Baum-Connes afirma que $\mu$ es un isomorfismo de grupos, cuando los grupos de holonomía son libres de torsión.

La prueba de la conjetura proporcionaría una relación entre la información dada por la estructura transversa de la foliación (a través de $G$) y la geometría dada por $BG$, en otras palabras, daría una interpretación geométrica del objeto analítico $K_*(C^*_{red}(G))$.

A continuación, pasamos a describir todos los objetos involucrados en el enunciado de la conjetura e indicamos los casos en los que se conoce su solución.

# 2 El "mundo" no conmutativo

## 2.1 Motivación física

Tenemos un sistema físico, cuyas propiedades queremos estudiar. Su descripción se realiza por medio de ciertas observaciones del sistema. Deseamos obtener un formalismo matemático en términos de estas observaciones.

Sea $V$ un espacio vectorial complejo de dimensión 2, sean $P$ y $Q$ dos elementos de $V$, que forman una base. Consideramos el álgebra asociativa

$$O = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots,$$

esto es, excepto por la inclusión de $\mathbb{C}$, $O$ es un álgebra asociativa libre sobre el espacio vectorial $V$: un elemento de $O$ es un *polinomio en $P$ y en $Q$, en el cual el orden de $P$ y en $Q$ de cada término, es relevante.*

Esta descripción pretende representar la siguiente situación física: pensamos que $Q$ representa una cierta *observación de configuración (o posición)* que puede hacerse sobre el sistema y $P$ se interpreta como una *observación del momento $p$*. Suponemos además, que conocemos, dadas dos observaciones que pueden hacerse sobre nuestro sistema, como construir físicamente una nueva observación, que pueda mirarse como una *combinación lineal de dos observaciones* y otra que pueda pensarse como *producto de dos observaciones*. Así, formamos un álgebra asociativa a partir de los elementos básicos $P$ y $Q$. Si denotamos por $*$ la aplicación $*\colon O \longrightarrow O$, satisfaciendo las siguientes propiedades, para $A, B \in O$ y $a \in \mathbb{C}$:

(i) $(A + aB)^* = A^* + \overline{a}B^*$,

(ii) $(AB)^* = B^*A^*$,

(iii) $Q^* = Q$ y $P^* = P$,

entonces, estas tres condiciones definen la aplicación $*$ completa y únicamente. Los *observables del sistema físico* son aquellos elementos $A$ de $O$, que verifican precisamente la identidad $A^* = A$.

Supongamos, en primer lugar, que nuestro sistema está sujeto a las leyes de la Mecánica Clásica. En este caso, las *observaciones pueden hacerse sobre un sistema físico de tal modo que las perturbaciones del sistema por la observación es despreciable*. En otras palabras, el orden en que las observaciones (y en particular, nuestras observaciones fundamentales $P$ y $Q$) se hacen, son irrelevantes. Así, en la descripción clásica, esperaríamos tener $PQ = QP$.

Si nuestro sistema está sujeto a las leyes de la Mecánica Cuántica, una *observación tiene un efecto no despreciable sobre el sistema observado*, un hecho que se refleja dentro del formalismo de la Mecánica Cuántica, por la *relación de conmutación canónica (de Heisenberg)* sobre los observables fundamentales,

$$QP - PQ = i\hbar,$$

donde $\hbar \in \mathbb{R}$ es la constante de Plank.

Así, "el mundo en el que viven" los físicos es no conmutativo en muchos casos. Existen además muchos ejemplos de espacios que surgen de manera natural (como los espacios de hojas de una foliación) para los cuales las herramientas clásicas del Análisis no son adecuadas, pero que se corresponden de una manera muy natural con un álgebra no conmutativa.

## 2.2 La geometría no conmutativa

El "esquema" de funcionamiento de la Geometría no conmutativa es el siguiente:

(i) dado un objeto geométrico "singular" $\mathcal{G}$, se empieza encontrando una "desingularización" $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$,

(ii) es de esperar que $\widetilde{\mathcal{G}}$ tenga suficiente estructura como, a partir de él, encontrar una C*-álgebra $C^*(\mathcal{G})$, cuya complejidad refleje la estructura de $\mathcal{G}$,

(iii) utilizando métodos de Geometría no conmutativa, se trata de investigar el anillo no conmutativo $C^*(\mathcal{G})$.

Por ejemplo, para la conjetura de Baum-Connes, $M/\mathcal{F}$ hace el papel de espacio de parámetros de una familia de operadores elípticos. Como el espacio de hojas es muy singular a veces, una manera de evitarlo es introducir el grupoide de la foliación $G$, que es una desingularización natural, y reemplazar $M/\mathcal{F}$ por el espacio no conmutativo $C^*_{red}(G) = C^*(M, \mathcal{F})$.

# 3 ¿Qué es un grupoide?

## 3.1 Grupoides algebraicos

**Definición 1** Un *grupoide algebraico* está definido por:

(i) un par de conjuntos $(M, G)$, donde $M \subset G$ es el *espacio de las unidades* y $G$ es el *espacio total*,

(ii) dos aplicaciones sobreyectivas, $\alpha, \beta \colon G \longrightarrow M$, las *proyecciones*, llamadas *origen* y *extremo* respectivamente, donde si $x \in M$, $\alpha(x) = \beta(x) = x$,

(iii) una biyección $i \colon G \longrightarrow G$, llamada *inversión*, tal que $i = i^{-1}$ (se suele denotar $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, para simplificar),

(iv) una ley de composición parcial, $. \colon G^2 \longrightarrow G$, llamada *multiplicación*, donde $G^2$ es el conjunto de los *pares componibles*, es decir

$$G^2 = \{(\gamma_2, \gamma_1) \in G \times G : \alpha(\gamma_2) = \beta(\gamma_1)\},$$

denotada del modo $\gamma_2.\gamma_1$, y, verificando las siguientes propiedades:

(1) *Asociatividad:* si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in G$ son tales que $((\gamma_2, \gamma_1) \in G^2$ y $(\gamma_3, \gamma_2.\gamma_1) \in G^2)$ ó $((\gamma_3, \gamma_2) \in G^2$ y $(\gamma_3.\gamma_2, \gamma_1) \in G^2)$, entonces son ciertas las identidades $\gamma_3.(\gamma_2.\gamma_1) = (\gamma_3.\gamma_2).\gamma_1$,

(2) *Unidades:* para cada $\gamma \in G$, se verifica que $(\gamma, \alpha(\gamma)) \in G^2$ y $(\beta(\gamma), \gamma) \in G^2$, y entonces $\gamma.\alpha(\gamma) = \gamma = \beta(\gamma).\gamma$,

(3) *Inversión:* para cada $\gamma \in G$, se cumple $(\gamma, \gamma^{-1}) \in G^2$, $(\gamma^{-1}, \gamma) \in G^2$, y son válidas las identidades $\gamma.\gamma^{-1} = \beta(\gamma)$ y $\gamma^{-1}.\gamma = \alpha(\gamma)$.

Se suele denotar por $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$.

**Ejemplos 1** (1) si $M$ es un punto, el grupoide se reduce a un *grupo*;

(2) si $M = G$, $\alpha(\gamma) = \beta(\gamma) = \gamma$ e $\gamma^{-1} = \gamma$, entonces $G^2$ es la diagonal de $G \times G$ y se obtiene el llamado *grupoide trivial*;

(3) dado un conjunto arbitrario $X$, se considera $G = X \times X$, el espacio de unidades es la diagonal de $G$ (identificada con $X$), y se definen las operaciones $\alpha(y, x) = x$, $\beta(y, x) = y$ e $(x, y)^{-1} = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((y, x), (x, z)) : x, y, z \in X\}$ y la multiplicación está dada por $(y, x).(x, z) = (y, z)$. Este grupoide se denomina el *grupoide grosero*;

(4) el *grafo de una relación de equivalencia* $R$ sobre un conjunto $X$ es un grupoide, donde el espacio de unidades es la diagonal, y las operaciones se definen por $\alpha(x, y) = x$, $\beta(x, y) = y$ e $i(x, y) = (y, x)$. El conjunto de los pares componibles es $G^2 = \{((x, y)(y, z)) \in G \times G : x, y, z \in X\}$ y $(x, y).(y, z) = (x, z)$.

**Definición 2** Dado un grupoide $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ y $x, y \in M$, se definen la *$\alpha$-fibra sobre $x$*, por $G_x = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma) = x\}$ y la *$\beta$-fibra sobre $y$*, por $G^y = \{\gamma \in G : \beta(\gamma) = y\}$.

**Definición 3** El conjunto $G_x^y = G_x \cap G^y$ puede ser vacío. Sin embargo, para cada $x \in M$, $G_x^x$ es un grupo (cuyo elemento neutro es el punto $x$), llamado *grupo de isotropía* de $G$ sobre $x$. El grupoide de isotropía de $G$ es $Is(G) = \bigcup_{x \in M} G_x^x \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$, que es un subgrupoide de $G$ en el sentido obvio.

**Definición 4** Dados dos grupoides $G_1 \overset{\alpha_1}{\underset{\beta_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \overset{\alpha_2}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} M_2$ un *homomorfismo de grupoides* de $G_1$ en $G_2$ es una aplicación $f \colon G_1 \longrightarrow G_2$, tal que si $(\gamma_2, \gamma_1) \in G_1^2$, entonces $(f(\gamma_2), f(\gamma_1)) \in G_2^2$, y en tal caso, se verifica la igualdad $f(\gamma_2.\gamma_1) = f(\gamma_2).f(\gamma_1)$.

## 3.2 Grupoides de Lie

**Definición 5** $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es un *grupoide topológico (respectivamente, de Lie)* (donde "diferenciable" significa de clase $C^\infty$), si:

(i) $G$ y $M$ son espacios topológicos (respectivamente, variedades diferenciables), donde $M$ es además separado,

(ii) las aplicaciones $\alpha, \beta, i$ y . son continuas (respectivamente, diferenciables); $\alpha, \beta$ son abiertas (respectivamente, submersiones) e $i$ es un homeomorfismo (respectivamente, difeomorfismo).

**Ejemplos 2** (i) *Acción de un grupo de Lie sobre una variedad*
Sea una acción diferenciable de un grupo de Lie conexo $H$ sobre la variedad $M$,

$$\Phi\colon H \times M \longrightarrow M.$$

Se define de este modo un grupoide de Lie, de espacio total $G = H \times M$, espacio de unidades $M$ y con las operaciones, $\alpha(g, x) = x$, $\beta(g, x) = \Phi(g, x)$, $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \Phi(g, x))$ y si $x_2 = \Phi(g_1, x_1)$, la multiplicación está dada por $(g_2, x_2).(g_1, x_1) = (g_2 g_1, x_1)$.

(ii) *Grupoide de homotopía de una variedad*
Dada $M$ una variedad diferenciable, se considera $\mathcal{P}(M)$, el conjunto de los caminos sobre $M$, provisto de la topología compacto-abierta. Sobre $\mathcal{P}(M)$, se da relación de equivalencia abierta siguiente:

$$\gamma \sim \gamma' \textit{ si } \gamma \textit{ es homotópa a } \gamma' \textit{ con extremidades fijas.}$$

El cociente por esta relación de equivalencia, $\Pi_1(M) = \mathcal{P}(M)/\sim$, es un grupoide topológico localmente compacto, cuyo espacio de unidades es la variedad $M$ (identificada con el conjunto de las clases de los caminos constantes) y donde la estructura de grupoide queda definida a través de las aplicaciones $\alpha(\gamma) = \gamma(0)$, $\beta(\gamma) = \gamma(1)$, y la multiplicación y la inversión del grupoide se obtienen a partir de la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. La aplicación $(\alpha, \beta)\colon \Pi_1(M) \longrightarrow M \times M$ es un revestimiento, y así sobre $\Pi_1(M)$ queda definida una estructura de variedad diferenciable, compatible con la topología cociente, que hace de $\Pi_1(M)$ un grupoide de Lie. Si $x \in M$, $\alpha\colon \Pi_1(M)^x \longrightarrow M$ y $\beta\colon \Pi_1(M)_x \longrightarrow M$ son revestimientos universales de $M$. Para cada $x \in M$, se verifica $\Pi_1(M)_x^x = \pi_1(M, x)$. El grupoide de Lie $\Pi_1(M) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$, se llama *grupoide fundamental* o *de homotopía* de $M$.

**Definición 6** Dados dos grupoides topológicos (respectivamente, de Lie) $G_1 \overset{\alpha_1}{\underset{\beta_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \overset{\alpha_2}{\underset{\beta_2}{\rightrightarrows}} M_2$ un *homomorfismo* $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$, es una aplicación continua (respectivamente, diferenciable), que es además un homomorfismo de grupoides.

## 3.3 $G$-acciones diferenciables

Sea $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ un grupoide de Lie y $Z$ una variedad localmente compacta, no separada (eventualmente), diferenciable y provista de una aplicación diferenciable, $\rho\colon Z \longrightarrow M$. Se considera el conjunto

$$Z *_M G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = \beta(\gamma)\}.$$

**Definición 7** Una *acción diferenciable a la derecha* de $G$ sobre $Z$ (una $G$-*acción diferenciable a la derecha*) es una aplicación diferenciable $\Phi\colon Z *_M G \longrightarrow Z$, denotada por $\Phi(z,\gamma) = z.\gamma$, y tal que:

(i) $\rho(z.\gamma) = \alpha(\gamma)$, para cada $(z,\gamma) \in Z *_M G$,

(ii) si una de las expresiones $(z.\gamma).\gamma'$ ó $z.(\gamma.\gamma')$ está definida, la otra también lo está y coinciden,

(iii) para cada $z \in Z$, se tiene $z.\rho(z) = z$.

La órbita de $z \in Z$, bajo esta acción, $\{z.\gamma : \gamma \in G\}$, se denota por $G(z)$.

**Definición 8** Se dice que $Z$ es un $G$-*espacio a la derecha* diferenciable, si $Z$ es una variedad, eventualmente no separada, diferenciable, con una $G$-acción diferenciable a la derecha dada.

**Definición 9** Dados dos $G$-espacios diferenciables a la derecha $Z_1$ y $Z_2$, una $G$-*aplicación diferenciable*, $f\colon Z_1 \longrightarrow Z_2$, es una función diferenciable y $G$-equivariante (es decir, si $(z_1,\gamma) \in Z_1 *_M G$, entonces $(f(z_1),\gamma) \in Z_2 *_M G$ y $f(z_1.\gamma) = f(z_1).\gamma$).

**Definición 10** Si $Z$ es un $G$-espacio, un $G$-*fibrado vectorial* sobre $Z$ está definido por un $G$-espacio $E$ y una $G$-aplicación, la *proyección*, $p\colon E \longrightarrow Z$, tales que:

(i) $p\colon E \longrightarrow Z$ es un fibrado vectorial complejo,

(ii) para cada par $(z,\gamma) \in Z *_M G$, la aplicación $\phi\colon E_z \longrightarrow E_{z.\gamma}$ dada por $\phi(u) = u.\gamma$ es lineal.

**Definición 11** La acción de $G$ sobre $Z$ es *libre*, si dado $(z,\gamma) \in Z *_M G$, es $\gamma.z = z$ si y sólo si $\gamma \in M$.

**Definición 12** Un $G$-espacio $Z$ se dice *principal* si:

(i) la aplicación $\Psi\colon Z *_M G \longrightarrow Z \times Z$, definida por $\Psi(z,\gamma) = (z, z.\gamma)$ es propia (es decir, la imagen inversa de todo conjunto compacto es compacto), y

(ii) la acción es libre.

En este caso, la proyección canónica $\pi\colon Z \longrightarrow {}^{Z}/_{G}$ es una submersión y el cociente ${}^{Z}/_{G}$ es un espacio localmente compacto y separado.

**Ejemplo 1** Si $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$ es un grupoide de Lie y se eligen $Z = G$ y $\rho = \alpha$, entonces $Z *_M G = G^2$. La multiplicación del grupoide es una $G$-acción natural a la derecha de $G$ sobre sí mismo. Esta acción es libre y $G$ es un $G$-espacio principal. Si $x \in M$, la órbita de este punto por la acción es $G(x) = G^x$.

## 3.4 Equivalencias de Morita entre grupoides

La siguiente noción de equivalencia entre grupoides es la idónea para estudiar posteriormente las C*-álgebras asociadas y la K-teoría inducida.

**Definición 13** Una *equivalencia de Morita* entre dos grupoides de Lie $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$ está dada por:

(1) una variedad $Z_f$, eventualmente no separada, localmente compacta y diferenciable, provista de dos submersiones $r\colon Z_f \longrightarrow M_1$ y $s\colon Z_f \longrightarrow M_2$;

(2) $Z_f$ es un $G_1$-espacio principal a izquierda y un $G_2$-espacio principal a derecha respecto a las aplicaciones anteriores;

(3) las dos acciones conmutan;

(4) $r$ induce un difeomorfismo entre $Z_f/G_2$ y $M_1$ y $s$ induce un difeomorfismo entre $G_1\backslash Z_f$ y $M_2$.

# 4 La relación entre foliaciones y grupoides

## 4.1 Grupoides realizando una foliación

**Definición 14** Dado un grupoide de Lie $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, para cada $\gamma \in G$, la aplicación $L_\gamma\colon G^{\alpha(\gamma)} \longrightarrow G^{\beta(\gamma)}$, definida por $L_\gamma(\lambda) = \gamma.\lambda$, es un difeomorfismo de $\beta$-fibras, de inversa $L_{i(\gamma)}$. Es la *translación a izquierda* por $\gamma$.

Se define, de manera análoga, la *translación a derecha*, $R_\gamma\colon G_{\beta(\gamma)} \longrightarrow G_{\alpha(\gamma)}$, por $R_\gamma(\lambda) = \lambda.\gamma$, que resulta ser un difeomorfismo de $\alpha$-fibras. Evidentemente, las translaciones a izquierda y a derecha conmutan.

Por lo tanto, la projección por $\alpha$ de las $\beta$-fibras (respectivamente, la projección por $\beta$ de las $\alpha$-fibras) es una partición de $M$ y ambas coinciden: para cada $x \in M$,

$$\Phi(x) = \beta(G_x) = \alpha(G^x)$$

es el elemento de la partición que lo contiene. De hecho, las componentes conexas de los elementos de la partición así definida son las hojas de una foliación singular (de Stefan) $\mathcal{S}$ sobre $M$. Esta foliación es regular si se imponen algunas restricciones sobre la acción del grupoide: si la intersección de las $\alpha$-fibras y de las $\beta$-fibras es de dimensión constante (es decir, si el grupoide de isotropía $Is(G)$ es una variedad), lo mismo sucede para la dimensión de las hojas de $\mathcal{S}$, que será entonces una foliación regular.

**Definición 15** Un grupoide de Lie $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ se dice *regular* cuando:

(i) las $\alpha$-fibras son conexas,

(ii) los grupos de isotropía son discretos (luego, $dim(G_x^x) = 0$, para cada $x \in M$).

Y se dice *orientado* si la foliación inducida es orientable.

La inversión $i$ intercambia las $\alpha$-fibras y las $\beta$-fibras, luego, en este caso, las $\beta$-fibras son también conexas y según la discusión anterior, $M$ está provisto de una foliación regular $\mathcal{F}$, que se dice *definida por la acción de $G$ sobre $M$*. Por ejemplo, el grupoide de homotopía de una variedad es regular (e induce una foliación sobre la variedad, que consta de una única hoja).

**Definición 16** Se dice que un grupoide regular $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ *realiza* una foliación $\mathcal{F}$ sobre $M$, si las órbitas de la acción del grupoide son las hojas de $\mathcal{F}$.

Recíprocamente, toda foliación regular puede definirse a través de un grupoide de Lie regular, los más importantes son los grupoides de homotopía y holonomía, los demás "están en medio" (el de holonomía es el mayor, el de homotopía es el menor y los demás se construyen como cocientes del de holonomía). Pasamos a describirlos:

## 4.2 Grupoide de homotopía de una foliación

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación de dimensión $p$ y codimensión $q$ sobre una variedad $M$ de dimensión $n = p + q$. Se considera $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ el conjunto de los caminos tangentes a $\mathcal{F}$ (es decir, de los caminos cuya imagen está contenida en una hoja), provisto de la topología compacto-abierta. Se define la relación de equivalencia (abierta) siguiente:

$\gamma \sim \gamma'$ *si* $\gamma$ *es homótopo (con extremidades fijas) a* $\gamma'$ *en la hoja que los contiene.*

El cociente por esta acción $\Pi_1(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim$, es un grupoide algebraico: el espacio de unidades es $M$ (identificado con la clase de los caminos constantes) y la estructura de grupoide está definida por las proyecciones $\alpha(\gamma) = \gamma(0)$, $\beta(\gamma) = \gamma(1)$ y la multiplicación y la inversión del grupoide están inducidas por la composición y la inversión usual de caminos, respectivamente. La topología de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ determina sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$ la topología cociente, para la que $\alpha$, $\beta$, $i$ y . son aplicaciones continuas, $\alpha$ y $\beta$ son abiertas e $i$ es un homeomorfismo. Se tiene así un grupoide topológico localmente compacto. Si $x \in M$, $\beta\colon \Pi_1(\mathcal{F})_x \longrightarrow L_x$ y $\alpha\colon \Pi_1(\mathcal{F})^x \longrightarrow L_x$ son revestimientos universales de $L_x$, la hoja que pasa por $x$. Y además $\Pi_1(\mathcal{F})_x^x = \pi_1(L_x, x)$.

La estructura diferenciable se da con todo detalle en [W]. Pero, de manera concisa, se puede describir del modo siguiente: si $\gamma$ es un camino tangente a $\mathcal{F}$, se consideran dos cubos distinguidos ($i \in \{0,1\}$) $U_i = P_i \times T_i$, donde $U_i$ es entorno de $\gamma(i)$, $P_i$ es una placa y $T_i$ es una transversal de $\mathcal{F}$. Salvo posibles restricciones de $T_0$ y $T_1$, la trivialidad local de la foliación permite definir un difeomorfismo de holonomía $h_\gamma\colon T_0 \longrightarrow T_1$, representado por un "tubo de caminos tangentes a $\mathcal{F}$", $\widehat{h_\gamma}\colon T_0 \times [0,1] \longrightarrow M$. Este tubo está parametrizado por $T_0$ y la aplicación $h_\gamma$ consiste en pasar del origen al extremo de cada uno de estos caminos. Por otro lado, $\widehat{h_\gamma}$ se extiende a una familia diferenciable de caminos tangentes a $\mathcal{F}$, familia parametrizada por $P_0 \times T_0 \times P_1$, y que induce un difeomorfismo de $U_0$ sobre $U_1$. Tras el paso a las clases de homotopía, se obtiene una carta local sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$. El atlas así construido, induce sobre $\Pi_1(\mathcal{F})$ una estructura de variedad diferenciable de dimensión $2p+q$. Como todos los objetos que definen la estructura de grupoide sobre $\Pi_1(\mathcal{F}) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ son diferenciables, se trata de un grupoide de Lie, llamado *grupoide de homotopía o fundamental* de la foliación. Es la "versión foliada" del grupoide de homotopía de una variedad.

## 4.3 Grupoide de holonomía de una foliación

Si sobre $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, se define una relación de equivalencia abierta "$\sim_h$", más fina que la anterior:

$$\gamma \sim_h \gamma' \text{ si el gérmen de holonomía del lazo } (\gamma')^{-1}.\gamma \text{ es trivial,}$$

se obtiene un grupoide de Lie (de la misma dimensión) $Hol(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(\mathcal{F})/\sim_h \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$, llamado *grupoide de holonomía o grafo de la foliación.* Y si $x \in M$, $Hol(\mathcal{F})_x^x = h(\pi_1(L_x, x))$, donde $h\colon \pi_1(L_x, x) \longrightarrow Diff(T_0, x)$ (se define $h([\gamma]) = h_\gamma$), es la representación de holonomía de la hoja $L_x$ pasando por $x$. Las fibras de este grupoide son los revestimientos de holonomía de las hojas de la foliación $\mathcal{F}$. Observar que el cociente $Hol(\mathcal{F})^x / Hol(\mathcal{F})_x^x$ es difeomorfo a $L_x$, con lo que $Hol(\mathcal{F})$ es el desingularizado natural de $M/\mathcal{F}$, y de hecho "desenvuelve" todas la hojas de $\mathcal{F}$ a la vez!

La propiedad de levantamiento de caminos, permite construir un homomorfismo sobreyectivo de grupoides de Lie, $\psi\colon \Pi_1(\mathcal{F}) \longrightarrow Hol(\mathcal{F})$. A diferencia de $\Pi_1(\mathcal{F})$, el grupoide de holonomía $Hol(\mathcal{F})$ "olvida" la estructura de las hojas y lleva únicamente información sobre el comportamiento transverso de $\mathcal{F}$.

En general, ni $\Pi_1(\mathcal{F})$ ni $Hol(\mathcal{F})$ son variedades separadas. En [W], se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que estos grupoides sean de Hausdorff.

Por otro lado, si se considera la foliación $\mathcal{F}_U$, restringida a un cubo distinguido, $U = P \times T$, donde $P$ es una placa y $T$ una transversal, los dos grupoides anteriormente definidos coinciden:

$$\Pi_1(\mathcal{F}_U) = Hol(\mathcal{F}_U) = P \times P \times T.$$

De hecho, se tiene una familia parametrizada por $T$ de grupoides groseros: ésta es la propiedad de trivialidad local de los grupoides de homotopía y de holonomía de la foliación.

Se puede probar que cualquier grupoide regular de dimensión $2p+q$ y que realiza una foliación $\mathcal{F}$, es el cociente de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ por una relación de equivalencia más fina que la homotopía y menos fina que la holonomía.

## 4.4 Propiedades transversas

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación de dimensión $p$ y codimensión $q$ sobre una variedad $M$ de dimensión $n = p+q$. El estudio del espacio de las hojas es un estudio de propiedades transversas de la foliación, por ello es útil introducir el siguiente concepto:

**Definición 17** Una subvariedad transversa $T$ es una subvariedad inmersa de $M$, de dimensión $q$, tal que $T$ es transversa a cada hoja, es decir, en cada punto de $T$ el espacio tangente de $T$ es suplementario al espacio tangente a la hoja que pasa por este punto.

**Definición 18** Sean $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ un grupoide regular realizando la foliación $\mathcal{F}$ sobre $M$ y $T$ una subvariedad transversa que corta cada hoja (es decir, una *transversal total*), eventualmente no conexa. Sea el conjunto

$$G_T^T = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in T\}.$$

Si se denotan por $\alpha_T$ y $\beta_T$ (que son difeomorfismos locales) la restricciones de $\alpha$ y $\beta$ a $G_T^T$, entonces $G_T^T \overset{\alpha_T}{\underset{\beta_T}{\rightrightarrows}} T$ es un grupoide diferenciable, llamado *grupoide transverso* asociado a la transversal $T$.

Además, existe una relación estrecha entre estos dos grupoides, expresada por:

**Proposición 1** *La inmersión natural de la transversal en la variedad, $i_T\colon T \longrightarrow M$, induce una equivalencia de Morita entre los grupoides $G$ y $G_T^T$.*

## 4.5 Clasificante de un grupoide

Dada una variedad foliada, $(M, \mathcal{F})$, si $G \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} M$ es su grupoide de holonomía, un teorema debido a Buffet-Lor [BL] prueba que existe un espacio topológico $BG$ y una aplicación continua $i\colon BG \longrightarrow M/\mathcal{F}$, con la propiedad universal de que para cada $X$ y $f\colon X \longrightarrow M/\mathcal{F}$, existe $g\colon X \longrightarrow BG$ definida salvo homotopía y tal que $f = i \circ g$. $BG$ es CW-complejo y existe un $G$-fibrado principal $EG$ (que es un espacio contráctil) sobre $BG$ tal que para cada $X$ y $G$-fibrado principal $E$ sobre $X$, existe $f\colon X \longrightarrow BG$ tal que $E = f^*(EG)$. $BG$ es único salvo equivalencias de homotopía.

Se puede pensar en $BG$ (que es un objeto transverso) como un espacio foliado $(W, \mathcal{F}_W)$, donde la foliación $\mathcal{F}_W$ posee todas sus hojas contráctiles y cuyos grupoides de holonomía transversos son localmente isomorfos al grupoide inicial [Ha].

# 5 ¿Qué es una C*-álgebra?

Las C*-álgebras corresponden a una nueva idea de espacio: uno "no conmutativo". El hecho es que muchos espacios singulares que se utilizan en varias áreas de la Matemática se pueden reemplazar con éxito por C*-álgebras no conmutativas.

## 5.1 Algunos resultados básicos sobre C*-álgebras

**Definición 19** Una *C*-álgebra* $A$ es un álgebra de Banach compleja $A$, dotada de una involución $*\colon A \longrightarrow A$, verificando con respecto a la norma de espacio de Banach, la relación $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

**Ejemplos 3** (1) Si $M$ es un espacio localmente compacto y separado, el álgebra de las funciones continuas sobre $M$, con valores complejos y nulas en el infinito,

$$C_0(M) = \{f\colon M \longrightarrow \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon \text{ compacto:} |f(x)| < \epsilon, \text{ si } x \notin K_\epsilon\},$$

con la involución dada por $f^*(x) = \overline{f(x)}$ (para $x \in M$), es una C*-álgebra conmutativa.

(2) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ el álgebra de los operadores lineales acotados, actuando sobre $\mathcal{H}$, con la involución dada por la operación de adjunción usual ($T^*$ es el adjunto de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, si $\langle Th, h\rangle = \langle h, T^*h\rangle$, para $h \in \mathcal{H}$), $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una C*-álgebra. Toda subálgebra autoadjunta, cerrada para la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, es también una C*-álgebra. Por ejemplo, la subálgebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores compactos (los que pueden aproximarse por operadores de rango finito), es una C*-álgebra.

Las C*-álgebras forman una categoría, cuyos objetos son las C*-álgebras y cuyos morfismos $Hom(A, B)$ son las aplicaciones lineales $f\colon A \longrightarrow B$ que son multiplicativas ($f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2)$) y preservan la involución ($f(a^*) = f(a)^*$): son los *$*$-homomorfismos*. Son siempre contractivos e isométricos si y sólo si son inyectivos. De hecho, toda C*-álgebra puede pensarse como una subálgebra autoadjunta y cerrada para la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

El teorema central de esta teoría, prueba que la categoría de las C*-álgebras conmutativas y $*$-homomorfismos es dual de la de los espacios localmente compactos y aplicaciones continuas propias, en el siguiente sentido:

**Teorema 1 (de Gelfand-Naimark)** *Toda C*-álgebra conmutativa $A$ es de la forma $C_0(M)$, para un cierto espacio localmente compacto y separado $M$.*

Así, todas las propiedades de $M$ pueden leerse a través de propiedades de su álgebra de funciones. Presentamos aquí hay un diccionario (no exhaustivo):

| **Mundo conmutativo** | **Mundo no conmutativo** |
|---|---|
| $M \equiv C_0(M)$ | $A$ C*-álgebra no commutativa |
| aplicación propia | morfismo |
| homeomorfismo | automorfismo |
| abierto en $M$ | ideal en $A$ |
| punto en $M$ | ideal maximal en $A$ |
| abierto denso en $M$ | ideal esencial en $A$ |
| cerrado en $M$ | cociente en $A$ |
| medida sobre $M$ | estado sobre $A$ |
| compacto en $M$ | unitario de $A$ |
| compactificación | adjunción de unidad |
| $C_{II}$ | separabilidad |
| conexión | existe idempotente no trivial |
| fibrado vectorial sobre $M$ | módulo proyectivo de tipo finito sobre $A$ |
| forma diferenciable de grado $k$ | ciclo de Hochschild de dimensión $k$ |
| "DeRham current" de dimensión $k$ | cociclo de Hochschild de dimensión $k$ |
| homología de DeRham | cohomología cíclica de $A$ |

Más ejemplos de C*-álgebras conmutativas y no conmutativas son los siguientes:

**Ejemplos 4** (1) La C*-álgebra universal engendrada por un único generador $u$ con las relaciones $u^*u = uu^* = 1$, $C^*(u)$ es isomorfa a $C(\mathbb{S}^1)$;

(2) la C*-álgebra universal engendrada por $\{u_1, \cdots, u_n\}$, con las relaciones $u_i^* u_i = u_i u_i^* = 1$ y $u_i u_j = u_j u_i$, $C^*(u_1, \cdots, u_n)$, es precisamente $C(\mathbb{T}^n)$;

(3) la C*-álgebra universal engendrada por $\{h_0, \cdots, h_n\}$, con las relaciones $h_i = h_i^*$, $h_i h_j = h_j h_i$ y $\sum_{i=0}^{n} h_i^2 = 1$, $C^*(h_0, \cdots, h_n)$, es $C(\mathbb{S}^n)$;

(4) si $\Gamma$ es un grupo discreto, la C*-álgebra $C^*(\Gamma)$ que tiene por generadores $\{u_g : g \in \Gamma\}$ y relaciones $u_{g^{-1}} = u_g^*$, $u_{gh} = u_g u_h$, se llama C*-álgebra del grupo $\Gamma$;

(5) si $\Gamma$ es un grupo discreto que actúa por automorfismos $\{\alpha_g : g \in \Gamma\}$ sobre una C*-álgebra $A$, el producto cruzado $A \rtimes_\alpha \Gamma$ es el ideal engendrado por $A$ en la

C*-álgebra $C^*(A, \Gamma)$, con generadores $\{a \in A, u_g : g \in \Gamma\}$, y relaciones las de $A$, las de $C^*(\Gamma)$ y además $u_g a u_g^* = \alpha_g(a)$, si $a \in A$ y $g \in \Gamma$.

Los siguientes son ya ejemplos más elaborados de C*-álgebras:

## 5.2 La C*-álgebra de un grupo localmente compacto

Se considera el álgebra involutiva $C_c(G)$ de las funciones continuas con valores complejas y soporte compacto sobre $G$. La involución está definida por $a^*(s) = \overline{a(s^{-1})}\Delta(s)^{-1}$ y la multiplicación está dada por el producto convolución $a * b(s) = \int_G a(t)b(t^{-1}s)dt$, donde $ds$ es la medida de Haar a izquierda sobre $G$ y $\Delta$ es la función modular (es decir, $\Delta: G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ es uniformemente continua y $\int_G a(s)ds = \Delta(t)\int_G a(ts)ds$). Se define en primer lugar el álgebra de Banach $L^1(G)$ (que no es una C*-álgebra) como la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la norma $\|a\|_1 = \int_G \|a(s)\|ds$.

**Definición 20** La *C*-álgebra del grupo* $C^*_{max}(G)$, es la compleción de $L^1(G)$ con respecto a la norma $\|a\| = \sup_\pi \|\pi(a)\|$, donde $\pi$ recorre el conjunto de todas las $*$-representaciones no degeneradas, $\pi: L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, de $L^1(G)$.

¿Por qué se estudia $C^*_{max}(G)$ en vez de $L^1(G)$? $L^1(G)$ lleva únicamente información sobre las representaciones uniformes acotadas (difíciles de comprender). Pero $C^*_{max}(G)$ utiliza todas las representaciones unitarias (y se trata de un buen sustituto del dual $\widehat{G}$ de $G$ en el caso no conmutativo).

$C^*_{max}(G)$ es demasiado grande, incluso en el caso de buenos grupos, libres de torsión. Existe una "versión reducida" de la C*-álgebra $C^*_{max}(G)$, notada por $C^*_{red}(G)$, y que describimos a continuación: se considera la *representación regular izquierda* de $L^1(G)$, $\lambda: L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(G))$, dada por $\lambda(a)\xi = a * \xi$, para $a \in L^1(G)$ y $\xi \in L^2(G)$. Está bien definida porque $L^1(G) * L^2(G) \subset L^2(G)$ y $\|a * \xi\|_2 \leq \|a\|_1\|\xi\|_2$. La representación regular izquierda es inyectiva.

**Definición 21** La *C*-álgebra reducida* del grupo $C^*_{red}(G)$ es la C*-subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(G))$ generada por $\lambda(L^1(G))$.

La aplicación identidad de $L^1(G)$ induce una sobreyección canónica de $C^*_{max}(G)$ en $C^*_{red}(G)$, que es un isomorfismo si y sólo si $G$ es un grupo "*amenable*", es decir, si existe un funcional continuo no nulo $F$ sobre $L^\infty(G)$, que es invariante a izquierda ($F(f_s) = F(f)$, donde $f_s(t) = f(s^{-1}t)$). Los grupos abelianos, los compactos y los resolubles son "amenables". Los grupos de Lie semisimples no compactos y los grupos libres no abelianos no son "amenables".

## 5.3 C*-álgebra asociada a la acción de un grupo

Si $M$ es localmente compacto y separado y $G$ es un grupo actuando sobre $M$, con una acción suficientemente simple, se puede poner la topología cociente sobre el espacio de las órbitas $M/G$ y entonces, se "captura" la estructura orbital de una manera óptima. Pero, si la acción se hace más complicada, la topología cociente falla en su objetivo de separar las órbitas. La aproximación no conmutativa consiste en reemplazar primero $M$ por $C_0(M)$ (que, gracias al famoso teorema de Gelfand-Naimark, "atrapa" completamente la topología del espacio). Después, se reemplaza la topología cociente, no por un álgebra menor $C_0(M/G)$, sino por otra mayor $C_0(M) \rtimes G$. Este álgebra es no conmutativa y puede completarse de una cierta manera. Cuando se hace, da lugar a una herramienta potente para el estudio del cociente. En el contexto de las álgebras de operadores, no hay patología en torno a $C_0(M) \rtimes G$, que puede pensarse como una desingularización de $M/G$.

**Definición 22** Un *sistema dinámico (no conmutativo)* es una terna $(A, G, \alpha)$, donde $A$ es una C*-álgebra, $G$ un grupo localmente compacto y $\alpha\colon G \longrightarrow Aut(A)$ un homomorfismo de grupos ($\alpha$ es una representación de $G$ como $*$-automorfismos de $A$), tales que para cada $a \in A$, la aplicación $e_a\colon G \longrightarrow A$ dada por $e_a(s) = \alpha_s(a)$ sea continua.

Esta definición está motivada por el hecho de que una acción continua $\alpha$ de un grupo $G$ sobre un espacio localmente compacto $M$, da lugar a una acción continua de $G$ sobre la C*-álgebra conmutativa $C_0(M)$. En este caso, $G$ tiene una representación natural como grupo de automorfismos de $C_0(M)$, $\widehat{\alpha}\colon G \longrightarrow Aut(C_0(M))$, donde $\widehat{\alpha}(g)(f)(x) = f(xg)$, para $g \in G$, $f \in C_0(M)$ y $x \in M$. Y, se pueden expresar ciertas propiedades del sistema dinámico $(M, G, \alpha)$ en términos del sistema dinámico (no conmutativo) $(C_0(M), G, \widehat{\alpha})$. La C*-álgebra *producto cruzado* $A \rtimes_\alpha G$ es una especie de álgebra de grupo "torcida" con coeficientes en $A$: se define $C_c(G, A)$ como el espacio lineal de las funciones continuas de $G$ en $A$ con soporte compacto. Se hace de $C_c(G, A)$ una $*$-álgebra definiendo el producto $a * b(s) = \int_G a(t)\alpha_t(b(t^{-1}s))dt$ y la involución $a^*(s) = \alpha_s(a(s^{-1})^*)\Delta(s^{-1})$. La norma $L^1$ sobre $C_c(G, A)$ está dada por $\|a\|_1 = \int_G \|a(t)\|dt$. La compleción de $C_c(G, A)$ con respecto a la norma $L^1$ se denota por $L^1(G, A)$, y se trata de un álgebra de Banach involutiva (que no es una C*-álgebra).

**Definición 23** El producto cruzado $A \rtimes_\alpha G$ es la compleción de $L^1(G, A)$ con respecto a la norma $\|a\| = \sup_\pi \|\pi(a)\|$, donde $\pi$ recorre el conjunto de las representaciones $\pi\colon L^1(G, A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de $L^1(G, A)$. En general, la C*-álgebra producto cruzado no contiene ni a $C^*_{max}(G)$ ni a $A$.

El análogo de la C*-álgebra reducida de un grupo es el *producto cruzado reducido*, $A \rtimes_{\alpha,red} G$, pero obviamos en estas líneas su definición. Existe una sobreyección canónica del producto cruzado en el producto cruzado reducido, y se trata de un isomorfismo si y sólo si la acción es *"amenable"* (en particular, una acción lo es si $G$ es "amenable").

**Ejemplos 5** (1) si $G$ actúa por homeomorfismos sobre un espacio localmente compacto $M$ (por lo tanto, por $*$-automorfismos sobre $C_0(M)$), $C_0(M) \rtimes G$ es la C*-álgebra *grupo de transformaciones.* Si la acción es libre y propia, $C_0(M) \rtimes G$ es isomorfa a $C_0(M/G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$;

(2) si $A = \mathbb{C}$ y $\alpha$ es trivial, el producto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_\alpha G$ es $C^*_{max}(G)$;

(3) si $A$ y $G$ son arbitrarias y $\alpha$ es trivial, el producto cruzado es el producto tensorial maximal $A \otimes C^*(G)$.

## 5.4 La C*-álgebra de un grupoide

La construcción que vamos a realizar a continuación es válida para muchos grupoides regulares $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} M$, pero por simplificar la argumentación, vamos a suponer que $G$ es el grupoide de holonomía de una foliación regular y orientable $(M, \mathcal{F})$.

Como $G$ no es en general separado, es preciso adaptar la definición del álgebra de las funciones continuas con soporte compacto sobre $G$ a esta situación: $C_c(G)$ [C1] es el espacio vectorial engendrado por las sumas finitas de las funciones de la forma $f = \varphi \circ \chi$, donde:

(i) $\chi: U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una carta local para la estructura de variedad sobre $G$,

(ii) $\varphi$ es una función continua con soporte compacto sobre $\chi(U)$, es decir, $f = \varphi \circ \chi$ sobre $U$ y $f$ es idénticamente nula sobre $G - U$.

Si $G$ es un espacio separado, es fácil comprobar que esta definición coincide con la usual de $C_c(G)$.

La elección de una métrica de Riemann sobre $M$ define una descomposición ortogonal del fibrado tangente $T(M) = \nu(\mathcal{F}) \oplus T(\mathcal{F})$. Se considera una forma pura $\omega$, de tipo $(0, p)$ sobre $M$ (siendo $p$ la dimensión de la foliación), que define por restricción a las hojas, el volumen asociado a la métrica inducida (el elemento de volumen $\omega$ varía diferenciablemente a lo largo de $M$).

Si $x \in M$ y $L_x$ es la hoja que contiene al punto $x$, la restricción $\omega|_{L_x} = \omega_x$ es una forma volumen sobre $L_x$. Además, $\alpha: G^x \longrightarrow L_x$ es una aplicación de revestimiento (correspondiente al núcleo de la representación de holonomía), y es entonces posible levantar $\omega_x$ en $\lambda^x$ sobre $G^x$. De manera global, se levanta $\omega$ por $\alpha$, en una forma volumen $\lambda = \alpha^*(\omega)$ sobre $G$, que define un volumen por restricción a las $\beta$-fibras.

Este volumen es invariante por translaciones a izquierda:

**Proposición 2** *Si $f \in C_c(G^x)$ y $\gamma_0 \in G_x$, entonces se verifica la identidad:*

$$\int_{G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma) = \int_{G^{\beta(\gamma_0)}} f(L_{\gamma_0}(\gamma)) d\lambda^{\beta(\gamma_0)}(\gamma),$$

*y se dice que $\{\lambda^x\}_{x \in M}$ es un* sistema de Haar a la izquierda*, para $G$ (éste es un objeto de naturaleza métrica, que juega el papel de medida de Haar para grupos).*

Además,

**Proposición 3** *Para cada $f \in C_c(G)$, la aplicación $\lambda(f) \colon M \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $\lambda(f)(x) = \int_{G^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$, es continua y de soporte compacto.*

En las condiciones anteriores, $C_c(G)$ es una $*$-álgebra para las siguientes operaciones, si $f, g \in C_c(G)$:

(1) Involución: $f^* \in C_c(G)$ se define por $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$, para $\gamma \in G$;

(2) Convolución: el producto usual de funciones de $C_c(G)$ no está en general en $C_c(G)$, por ello se define el producto convolución, para $\gamma \in G$, por

$$f * g(\gamma) = \int_{G^{\beta(\gamma)}} f(\gamma_1) g(\gamma_1^{-1}.\gamma) d\lambda^{\beta(\gamma)}(\gamma_1).$$

**Definición 24** La *C*-álgebra maximal* de $G$, $C^*_{max}(G)$, es la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la mayor norma de C*-álgebra $\| f \|_{max} = \sup_{\pi} \| \pi(f) \|$, donde $\pi$ recorre el conjunto de todas las representaciones unitarias de la $*$-álgebra $C_c(G)$.

Hay también una "versión reducida" de esta C*-álgebra. Se considera la representación no degenerada de $C_c(G)$, $R_x \colon C_c(G) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(G^x))$, definida para $x \in M$ por:

$$R_x(f)(\xi)(\gamma) = \int_{G^x} f(\gamma^{-1}.\gamma_1) \xi(\gamma_1) d\lambda^x(\gamma_1),$$

para $f \in C_c(G)$, $\xi \in L^2(G^x)$ y $\gamma \in G^x$. Si $f \in C_c(G)$ y $x \in M$, el operador $R_x(f) \colon L^2(G^x) \longrightarrow L^2(G^x)$ es regularizante, de núcleo acotado en $L^2(G^x)$.

**Definición 25** La *C*-álgebra reducida* de $G$, $C^*_{red}(G)$, es la compleción de $C_c(G)$ con respecto a la norma de C*-álgebra $\| f \| = \sup_{x \in M} \| R_x(f) \|$.

Las construcciones anteriores dependen de la elección de la métrica de Riemann sobre $M$. Si $\lambda$ y $\lambda_1$ son dos volúmenes sobre $G$ obtenidos como antes, a partir de diferentes métricas de Riemann, éstos últimos están relacionados a través de la identidad $\lambda_1 = f.\lambda$, donde $f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, que es constante sobre las fibras de la aplicación $h \colon G \longrightarrow M \times M$, definida por $h(\gamma) = (\beta(\gamma), \alpha(\gamma))$.

Las C*-álgebras $C^*_\lambda(G)$ y $C^*_{\lambda_1}(G)$ coinciden desde el punto de vista conjuntista, es decir, las mismas funciones son acotadas para cada una de las dos normas. Además, para cada $x \in M$, la medida $\lambda^x$ es absolutamente continua con respecto a $\lambda_1^x$, es decir, existe una única función (la derivada de Radom-Nykodym) $f \geq 0$, $\lambda$-medible, tal que $\lambda_1(E) = \int_E f d\lambda$.

Así pues, las C*-álgebras $C^*_{red}(G)$ y $C^*_{max}(G)$ no dependen de la elección de $\lambda$ ó de $\lambda_1$. Luego, las construcciones anteriores se han realizado de manera intrínseca.

## 5.5 Equivalencias de Morita entre C*-álgebras

**Definición 26** Sea $A$ una C*-álgebra y $\mathcal{E}$ un $A$-módulo a derecha. Se dice que $\mathcal{E}$ es un *$A$-módulo de Hilbert*, si está provisto de un producto interior con valores en $A$, $\langle , \rangle_A : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow A$, lineal con respecto a la segunda variable (es decir, $\lambda\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \xi, \lambda\eta\rangle_A$) y antilineal con respecto a la primera (es decir, $\lambda\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \overline{\lambda}\xi, \eta\rangle_A$), tal que, si $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ y $a \in A$, entonces:

(i) $\langle \xi, \eta\rangle_A = \langle \eta, \xi\rangle_A^*$;

(ii) $\langle \xi, \eta a\rangle_A = \langle \xi, \eta\rangle_A a$ y $\langle \xi a, \eta\rangle_A = a^*\langle \xi, \eta\rangle_A$;

(iii) $\langle \xi, \xi\rangle_A \geq 0$ (es decir, $\langle \xi, \xi\rangle_A$ es positivo como elemento de $A$) y $\langle \xi, \xi\rangle_A = 0$ si y sólo si $\xi = 0$;

(iv) la aplicación $n : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $n(\xi) = \|\langle \xi, \xi\rangle_A\|^{1/2}$, es una norma de espacio vectorial completo sobre $\mathcal{E}$.

**Definición 27** Un $A$-módulo de Hilbert $\mathcal{E}$ es *lleno*, si el producto interior sobre $\mathcal{E}$ con valores en $A$, $\langle , \rangle_A$, genera $A$ como ideal bilátero cerrado.

**Definición 28** Dos C*-álgebras $A$ y $B$ son *Morita-equivalentes*, si existe un $B$-módulo de Hilbert lleno $\mathcal{E}$, tal que $A$ es isomorfo a $\mathcal{K}_B(\mathcal{E})$.

Además, se puede comprobar que:

**Proposición 4** *Si $G_1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightrightarrows}} M_1$ y $G_2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightrightarrows}} M_2$ son grupoides Morita-equivalentes, entonces $C^*_{red}(G_1)$ y $C^*_{red}(G_2)$ son C*-álgebras Morita-equivalentes.*

## 5.6 La C*-álgebra de una foliación

La C*-álgebra de la foliación, $C^*(M, \mathcal{F})$, se define precisamente como la C*-álgebra reducida del grupoide de holonomía, $C^*_{red}(G)$.

La construcción de $C^*(M, \mathcal{F})$ es local en el siguiente sentido:

**Proposición 5** *Si $U \subset M$ es abierto y $\mathcal{F}_U$ es la restricción de $\mathcal{F}$ a $U$, $G_U$ (el grafo de $(U, \mathcal{F}_U)$) es un subgrupoide abierto de $G$ y la inclusión $C_c(G_U) \subset C_c(G)$, se extiende a un $*$-isomorfismo isométrico de $C^*(U, \mathcal{F}_U)$ en $C^*(M, \mathcal{F})$.*

La C*-álgebra de una foliación es estable, es decir:

**Proposición 6** $C^*(M, \mathcal{F}) \otimes \mathcal{K} \cong C^*(M, \mathcal{F})$.

Utilizando las proposiciones 1 y 4, se prueba que la C*-álgebra de una foliación no depende, salvo isomorfismos, más que de su estructura transversa:

**Teorema 2** *Si $(M, \mathcal{F})$ es una variedad foliada y $T$ es una transversal fiel, entonces las C*-álgebras $C^*(M, \mathcal{F})$ y $C^*_{red}(G_T^T)$ son Morita-equivalentes.*

Además, se prueba que:

**Teorema 3** *Si $(M_1, \mathcal{F}_1)$ y $(M_2, \mathcal{F}_2)$ son foliaciones topológicamente equivalentes, entonces,*

$$C^*(M_1, \mathcal{F}_1) \otimes \mathcal{K} \cong C^*(M_2, \mathcal{F}_2) \otimes \mathcal{K}.$$

Algunas de las propiedades de una variedad foliada están reflejadas en la estructura de la C*-álgebra asociada, por ejemplo, si el grafo es separado, se puede probar:

**Proposición 7** *(i) $C^*(M, \mathcal{F})$ es simple (es decir, no posee ideales no triviales) si y sólo si toda hoja de $\mathcal{F}$ es densa,*

*(ii) $C^*(M, \mathcal{F})$ posee una representación irreducible inyectiva si y sólo si existe una hoja densa,*

*(iii) la foliación $\mathcal{F}$ es cerrada si y sólo si $C^*(M, \mathcal{F})$ posee a los operadores compactos como cociente.*

**Observación:** En el caso no separado, por ejemplo, el que la foliación sea minimal, no implica que la C*-álgebra sea simple.

Finalizamos este apartado, estudiando algunos ejemplos:

**Ejemplos 6** (1) Si $M$ es localmente compacto y está foliado por puntos, entonces $G = M$ y $C^*(M, \mathcal{F}) = C_0(M)$;

(2) si $M$ es localmente compacto y $M$ es una variedad foliada por una única hoja, entonces $G = M \times M$ es su grupoide de holonomía. Un sistema de Haar es simplemente una medida $\lambda$ sobre $M$, de soporte $M$. Evidentemente, los elementos de la subálgebra densa de la definición pueden realizarse como operadores integrales con

núcleo de soporte compacto sobre $L^2(M, \lambda)$. Su compleción es obviamente la familia de los operadores compactos $\mathcal{K}$ sobre $L^2(M, \lambda)$;

(3) si la foliación viene dada por una fibración $F^p \to M \to B^q$, con $F$ conexo, entonces $M$ está foliada por las imágenes inversas de los puntos de $B$. Todas las hojas son cerradas y difeomorfas a $F$. En este caso, el grupoide de holonomía es el grafo de la relación de equivalencia correspondiente a la partición de $M$ en hojas y la C*-álgebra $C^*(M, \mathcal{F})$ es isomorfa a $C_0(B, \mathcal{K}(L^2(F)))$;

(4) si la foliación proviene de una acción de un grupo de Lie $\Gamma$, de tal modo que el grafo sea idéntico a $M \times \Gamma$ (esto no siempre es cierto), entonces la C*-álgebra de la foliación es el producto cruzado reducido $C_0(M) \rtimes_{red} \Gamma$.

# 6 K-teorías topológica y analítica

## 6.1 La K-teoría topológica

Sea $M$ un espacio compacto. Si se denota por $V(M)$ el conjunto de las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales complejos localmente triviales de base $M$, es bien conocido que $V$ es un functor contravariante de la categoría de los espacios compactos en la categoría de los semigrupos abelianos, invariante por homotopía. $K^0(M)$ se define como el grupo de Grothendieck de $V(M)$, y continúa siendo un functor contravariante, ahora de la categoría de los espacios compactos en la de los grupos abelianos. Esta definición se generaliza a $M$ localmente compacto.

La *suspensión reducida* de orden $n$ de $M$ se define como el espacio no compacto $S^n(M) = M \times \mathbb{R}^n$. El *K-grupo* de orden $n$ de $M$, $K^n(M)$, está definido por $K^n(M) = K^0(S^n(M))$.

Si $M$ es un espacio localmente compacto, y $E$ es un fibrado vectorial complejo sobre $M$, se denota por $\Gamma(M, E)$ el conjunto de las secciones continuas de $E$. Entonces:

(i) $\Gamma(M, E)$ es un módulo sobre el anillo de las funciones continuas de $M$ con valores en $\mathbb{C}$, $C(M)$;

(ii) un isomorfismo de fibrados vectoriales complejos induce un isomorfismo entre los módulos de secciones correspondientes;

(iii) si $E$ es un fibrado trivial de dimensión $n$, entonces $\Gamma(M, E) \simeq C(M)^n$;

(iv) si $M$ es compacto, entonces $\Gamma(M, E)$ es un módulo proyectivo de tipo finito.

Por lo tanto, $\Gamma$ es un functor covariante de la categoría de los fibrados vectoriales complejos sobre un espacio $M$ compacto y separado dado, en la categoría de los módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$, y se puede incluso probar que $\Gamma$ es biyectiva, éste es el *Teorema de Swan*.

Según lo anterior, si $M$ es compacta, $K^0(M)$ se puede también describir como el grupo de las diferencias formales $[P]-[Q]$ de clases de isomorfismo de módulos proyectivos de tipo finito sobre $C(M)$. Este resultado tiene una importancia enorme, puesto que existe una generalización natural en el caso no conmutativo.

## 6.2 La K-teoría analítica

Si $A$ es una C*-álgebra, se define $K_0$, que es un functor covariante de la categoría de las C*-álgebras en la categoría de los grupos abelianos, de modo que los elementos de $K_0(A)$ pueden pensarse como diferencias formales $[p]-[q]$, donde $p$ y $q$ son proyectores en $\mathbb{M}_k(\widetilde{A})$ ($\widetilde{A}$ es el álgebra unitaria asociada a la C*-álgebra $A$, de la manera usual), para un cierto $k \in \mathbb{N}$ y $p-q \in \mathbb{M}_k(A)$.

Cuando $A$ es unitaria, también es posible (y a veces muy útil) pensar $K_0(A)$ como las diferencias formales $[\mathcal{E}]-[\mathcal{F}]$, de clases de equivalencia de $A$-módulos proyectivos de tipo finito, con la suma directa exterior.

El functor $K_0$ verifica las propiedades siguientes:

(i) es invariante por homotopía;

(ii) verifica la propiedad de excisión;

(iii) preserva límites inductivos;

(iv) es estable, es decir, $K_0(A) \simeq K_0(A \otimes \mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es el álgebra de los operadores compactos;

(v) es un functor semiexacto, es decir, si $J$ es un ideal en $A$, entonces la sucesión exacta de C*-álgebras $0 \to J \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/J \to 0$, induce una sucesión exacta corta de K-grupos $K_0(J) \xrightarrow{i_*} K_0(A) \xrightarrow{\pi_*} K_0(A/J)$.

Además, si se definen los grupos de K-teoría de orden superior generalizando la noción de suspensión a C*-álgebras, se prueba el teorema fundamental de la K-teoría, que es el *teorema de periodicidad de Bott* [Bl], que es la herramienta más eficaz para el cálculo de los K-grupos de un espacio dado:

**Teorema 4 (de Bott)** *Para cada C*-álgebra $A$, se tiene un isomorfismo natural $K_n(A) \simeq K_{n+2}(A)$.*

**Observación:** El teorema de Swan prueba que para $A = C_0(M)$ (donde $M$ es un espacio localmente compacto), su grupo de $K$-teoría analítica $K_j(A)$ es de modo natural isomorfo al grupo de K-teoría topológica $K^j(M)$.

Además, se prueba:

**Proposición 8** *Si A y B son $C^*$-álgebras Morita-equivalentes, sus grupos de K-teoría son isomorfos.*

En particular, con las notaciones anteriores, y como consecuencia del teorema 2 y la proposición 8, se deduce:

**Corolario 1** *Si $T$ es una transversal total en $(M,\mathcal{F})$, entonces $K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$ y $K_*(C^*_{red}(G_T^T))$ son grupos isomorfos.*

## 6.3 K-orietnación

La K-teoría es una teoría compleja, con soporte compacto. Al trabajar con fibrados reales (fibrados tangentes, fibrados tangentes a espacios foliados, ...), se precisa de una estructura adicional para "complexificarlos". La K-orientación, definida a través de estructuras *spin*$^c$, es la orientación natural que garantiza la existencia de teoremas del índice, de dualidad, de isomorfismo de Thom, ..., para esta teoría de cohomología.

**Definición 29** Sea $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ el grupo $\mathrm{Ml_n}(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathrm{U}(1)$, donde $\mathrm{Ml_n}(\mathbb{R})$ es el grupo met-alineal, es decir, el revestimiento no trivial de dos hojas del grupo de las matrices reales con determinante positivo $\mathrm{Gl}_\mathrm{n}^+(\mathbb{R})$. El compacto maximal de $\mathrm{Ml}_\mathrm{n}^\mathrm{c}$ es *spin*$^c(n)$.

Una estructura *spin*$^c$ es el análogo complejo de estructura *spin* en variedades (una estructura *spin*$^c$ sobre un fibrado vectorial real $E$ es una orientación para $E$ con un poco más de estructura extra!). En un sentido *spin* y *spin*$^c$ son generalizaciones de orientaciones.

**Definición 30** Una variedad $M$ se dice *spin*$^c$, si $TM$ tiene una estructura *spin*$^c$.

**Definición 31** Si $(M,\mathcal{F})$ es una variedad foliada, su grupoide de holonomía $G$ se dice *K-orientado*, si el grupo estructural del fibrado tangente a la foliación $T(\mathcal{F})$, se reduce a *spin*$^c$.

**Definición 32** En las mismas condiciones de antes, si $X$ es una $G$-variedad y $\nu$ es el fibrado normal a la foliación, una aplicación $f\colon X \longrightarrow BG$ se dice *K-orientable*, si el fibrado $T(X) \oplus f^*(\nu)$ posee una estructura *spin*$^c$. Y cuando se elige una de ellas, se dice que $f$ es *K-orientada*.

# 7 La Conjetura de Baum-Connes

A. Connes conjetura la existencia de una fórmula del índice K-teórica entre la K-teoría topológica y analítica de variedades foliadas. Puede verse como una última versión de una generalización del teorema del índice de Atiyah y Singer [AS]. Hablando con precisión, su conjetura dice que dada una variedad foliada, su K-teoría topológica es isomorfa a la analítica vía la aplicación K-índice.

Sea $(M,\mathcal{F})$ una variedad foliada y $G$ el grupoide de holonomía de la foliación. Una manera puramente geométrica de definir la K-teoría es la siguiente: sea $X$ una $G$-variedad cerrada propia y $\tilde{\nu}^*$ el fibrado dual del fibrado normal $\tilde{\nu}$ de la $G$-foliación orbital de $X$. Sea $\rho\colon X \longrightarrow M$ la aplicación canónica $G$-equivariante y $\rho^*(\nu^*)$ el pull-back del fibrado dual $\nu^*$ del fibrado normal $\nu$ de $\mathcal{F}$. Consideramos el par $(X,\xi)$ de $X$ y $\xi$ un $G$-fibrado vectorial sobre $\widetilde{\nu}^* \oplus \rho^*(\nu^*)$, que se llama un *K-cociclo* de $(M,\mathcal{F})$. Sea $\Gamma(M/\mathcal{F})$ el conjunto de los K-cociclos de $(M,\mathcal{F})$. Sobre $\Gamma(M/\mathcal{F})$ se introduce la relación de equivalencia $(X_1,\xi_1) \sim (X_2,\xi_2)$, si existe una $G$-variedad propia $X$ y una $G$-aplicación $\varphi_j\colon X_j \longrightarrow X$, tales que:

(1) $\rho_j = \rho \circ \varphi_j$, para $j = 1,2$,

(2) $\varphi_1!(\xi_1) = \varphi_2!(\xi_2)$,

donde $\rho, \rho_j$ son las $G$-aplicaciones canónicas de $X$, $X_j$ en $M$ respectivamente y $\varphi_j!$ son las aplicaciones de Thom-Gysin de $G$-fibrados vectoriales sobre $\widetilde{\nu_j}^* \oplus \rho_j^*(\nu^*)$ en $G$-fibrados vectoriales sobre $\tilde{\nu}^* \oplus \rho^*(\nu^*)$.

**Definición 33** $K_{top}(M/\mathcal{F})$ es el cociente $\Gamma(M/\mathcal{F})/\sim$; es un grupo abeliano equipado con la unión disjunta de $G$-fibrados vectoriales y se llama la *K-teoría topológica* de $(M,\mathcal{F})$.

¿Cómo definir la aplicación K-índice $\mu$ de $K_{top}(M/\mathcal{F})$ en $K_{an}(M/\mathcal{F})$? Dada $(X,\xi) \in \Gamma(M/\mathcal{F})$, sea la $G$-aplicación $j\colon X \longrightarrow X \times M$ dada por $j(x) = (x,\rho(x))$ y $\pi\colon X \times M \longrightarrow M$ la proyección. Entonces, $\rho = \pi \circ j$. Sea $\widetilde{j}$ la $G$-aplicación canónica de $\widetilde{\nu_X}^* \oplus \rho^*(\nu^*)$ en $\nu_{\widetilde{X\times M}}^* \oplus \pi^*(\nu^*)$ asociada con $j$.

Sea $\widetilde{j}!$ la aplicación de Thom-Gysin de $\widetilde{j}$ de $G$-fibrados vectoriales sobre $\widetilde{\nu_X}^* \oplus \rho^*(\nu^*)$ en aquellos sobre $\nu_{\widetilde{X\times M}}^* \oplus \pi^*(\nu^*)$ y pongamos $\widetilde{\xi} = \widetilde{j}!(\xi)$.

Sea $\tau_m$ el fibrado cotangente $T^*_{\pi^{-1}(m)}$ de $\pi^{-1}(m)$ para cada $m \in M$ y $\tau = \bigcup_{m\in M} \tau_m$. Como $\pi$ es una submersión, el $G$-espacio $\nu_{\widetilde{X\times M}}^* \oplus \pi^*(\nu^*)$ es el espacio total del fibrado sobre $\tau$ bajo la proyección canónica $\widetilde{\pi}$, cuyas fibras son $\nu^* \oplus \nu^*$.

Así del teorema de Thom-Gysin, $\widetilde{\xi}$ puede verse como un $G$-fibrado vectorial sobre $\tau$ bajo la aplicación de Thom-Gysin $\widetilde{\pi}!$ de $\widetilde{\pi}$. Sea $\widetilde{\xi_m} = \widetilde{\xi}|_{\tau_m}$. Por la definición de

$\widetilde{\xi}$, existen operadores diferenciales elípticos $D_m$ de $\pi^{-1}(m)$ cuyos símbolos $\sigma(D_m)$ son iguales a $\widetilde{\xi_m}$. Sea $D$ el campo $G$-equivariante $\{D_m\}_{m\in M}$, considerado como un operador diferencial $G$-equivariante sobre $X \times M$, donde:

(1) los $D_m$ son elípticos sobre $\pi^{-1}(m)$, para $m \in M$,

(2) $\tilde{\xi}$ es el símbolo $\sigma(D)$ de $D$.

Se define el índice K-teórico $ind(D)$ de $D$ en $K_{an}(M/\mathcal{F})$, por

$$ind(D) = [Ker(D)] - [Coker(D)],$$

donde [.] significa "$C^*_{red}(G)$-módulo generado por .". Además, éstos son módulos proyectivos de tipo finito, salvo pequeñas perturbaciones de $D$.

Se define entonces $\mu\colon K_{top}(M/\mathcal{F}) \longrightarrow K_{an}(M/\mathcal{F})$ por $\mu(X,\xi) = Ind(D)$, que depende sólo de la clase de equivalencia de $(X,\xi)$.

Y entonces para espacios foliados, se deduce:

**Conjetura 1 (de Baum-Connes)** *Dada una variedad foliada $(M,\mathcal{F})$, la aplicación K-índice es un isomorfismo de $K_{top}(M/\mathcal{F})$ en $K_{an}(M/\mathcal{F})$ (si los grupos de holonomía son libres de torsión).*

Hay una manera alternativa de definir la K-teoría topológica de la foliación [BC]: se consideran ternas $(X,E,f)$ (llamadas también *K-ciclos*), donde:

(1) $X$ es una variedad cerrada y $E$ un $G$-fibrado vectorial complejo sobre $X$,

(2) $f\colon X \longrightarrow BG$ es una aplicación K-orientada (es decir, se ha elegido una estructura $spin^c$ sobre $T(X) \oplus f^*(\nu)$).

No se supone $X$ conexa y $E$ puede tener distintos rangos sobre distintas componentes conexas de $M$. Se define una relación de equivalencia $\sim$ sobre estos K-ciclos, a través de ciertas condiciones de suma disjunta, de bordismo y de modificación de fibrados vectoriales (relación liada con la multiplicatividad del índice de los operadores elípticos sobre fibrados vectoriales). Y se define $K_{*,\tau}(BG)$ como el cociente de los K-ciclos por esta relación de equivalencia (el subíndice $\tau$ significa "twist" por el fibrado transverso a la foliación).

**Ejemplos 7** (1) Si $\nu = 0$ (caso de una foliación por una única hoja), $K_{*,\tau}(BG) \simeq K^*(BG)$;

(2) si $M$ está foliado por puntos, entonces $BG$ tiene el tipo de homotopía de $M$, $\nu \simeq T(M)$ y $K_{*,\tau}(BG) \simeq K^*(M)$.

El teorema longitudinal del índice ayuda a construir $\mu\colon K_{*,\tau}(BG) \longrightarrow K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$, y entonces tenemos otra versión de la conjetura de Baum-Connes:

**Conjetura 2 (de Baum-Connes)** *Dada una variedad foliada*$(M,\mathcal{F})$*, la aplicación* $K$*-índice* $\mu\colon K_{*,\tau}(BG) \longrightarrow K_*(C^*(M,\mathcal{F}))$ *es un isomorfismo de grupos.*

**Observación:** Se puede probar que $K_{top}(M/\mathcal{F})$ y $K_{*,\tau}(BG)$ son isomorfos, cuando los grupos de holonomía son libres de torsión, con lo que ambos enunciados son equivalentes.

# 8 Un ejemplo: el flujo de Kronecker

Damos un ejemplo sencillo, pero fundamental, donde se aprecia todo el poder de esta teoría.

Para $\theta \in \mathbb{R}$, las curvas integrales del campo de vectores $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \theta \dfrac{\partial}{\partial x_2}$, definen una foliación $\mathcal{F}_\theta$ sobre el toro $\mathbb{T}^2$. Si $\theta \in \mathbb{Q}$, cada hoja es una circunferencia, en otro caso, cada hoja es densa, de hecho, una copia de $\mathbb{R}$, puesta de manera densa en el toro.

**Definición 34** Para $\theta \in \mathbb{I}$, la foliación inducida sobre el toro del modo anterior, es la *foliación de Kronecker* $\mathcal{F}_\theta$.

El espacio de hojas de esta foliación, $X = \mathbb{T}^2/\mathcal{F}_\theta$, es un espacio indiscreto, sin ningún interés. Pero existe la C*-álgebra asociada a la foliación, $C^*(\mathbb{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$, que es no trivial y que describe las propiedades topológicas de este espacio de hojas.

**Definición 35** Sea $\mathcal{A}_\theta$ la C*-álgebra universal engendrada por dos generadores unitarios $u$ y $v$, con la relación de conmutación (que es la forma unitaria de la famosa relación de conmutación de Heisenberg $QP - PQ = i\hbar$ de la Mecánica Cuántica) $uv = e^{-2i\pi\theta} vu$; es el *álgebra de rotación irracional* o *toro no conmutativo.*

Tiene muchas propiedades en común con $\mathbb{T}^2$, aunque se trata de una C*-álgebra no conmutativa. Este álgebra $\mathcal{A}_\theta$ se escribe también como un producto cruzado $C(\mathbb{S}^1) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ actúa sobre $C(\mathbb{S}^1) \simeq C^*(v)$ por la rotación de ángulo $\theta$ sobre $\mathbb{S}^1$ ($\alpha^n(f)(z) = f(e^{-2i\pi n\theta} z)$, para $z \in \mathbb{S}^1$). Esta es justamente $C^*(\mathbb{T}^2,\mathcal{F}_\theta)$.

Los elementos de $\mathcal{A}_\theta$, tienen como elemento genérico el del tipo $\sum\limits_{n,m finito} a_{mn}u^m v^n$ y esto forma una subálgebra densa en él. Pero, hay otros elementos que no pueden escribirse de este modo!

Este álgebra es mucho más complicada que $C(\mathbb{T}^2)$ (cuyos elementos son funciones continuas), citamos a continuación algunas de sus diferencias:

(1) $C(\mathbb{T}^2)$ tiene muchos ideales, $\mathcal{A}_\theta$ es simple;

(2) $C(\mathbb{T}^2)$ es conmutativa y $\mathcal{A}_\theta$ no. De hecho, su centro está formado justamente por los escalares (los únicos elementos que conmutan con todos los elementos de $\mathcal{A}_\theta$ son justo los múltiplos de la identidad),

(3) $\mathcal{A}_\theta$ tiene una única aplicación traza y $C(\mathbb{T}^2)$ (a diferencia de las álgebras de matrices $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$) posee muchas trazas normalizadas:

$$\tau(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})dsdt,$$

con $g$ función de probabilidad sobre $\mathbb{T}^2$, es decir, es una función positiva sobre $\mathbb{T}^2$ tal que $\int_0^1 \int_0^1 g(e^{2\pi is}, e^{2\pi it})dsdt = 1$;

(4) $\mathcal{A}_\theta$ tiene muchos proyectores y $C(\mathbb{T}^2)$ sólo dos (el 0 y el 1).

Así, tenemos la familia de álgebras de operadores $\{\mathcal{A}_\theta : \theta \in \mathbb{I}\}$; ¿cómo clasificarlas? ¿son todas distintas? ¿cuáles son isomorfas? Para resolver ésto, hay que recurrir a la estructura proyectiva, es decir, a $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ y calcular las trazas de estos proyectores (que son un "código" o invariante para el álgebra, como en el caso de álgebras de matrices).

En 1980, Pimsner y Voiculescu [PV] prueban que $K_0(\mathcal{A}_\theta) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. En ese mismo año, Rieffel [R] prueba que existe un proyector $e_\theta \in \mathcal{A}_\theta$, tal que $\tau(e_\theta) = \theta$, y lo construye imponiendo la condición $e_\theta = v^* g(u) + f(u) + g(u)v$ con $f$ y $g$ funciones apropiadas para que $e_\theta^2 = e_\theta = e_\theta^*$, y entonces $\tau(e_\theta) = \int_0^1 f(t)dt = \theta$. Y se deduce la propiedad de Pimsner-Rieffel-Voiculescu:

$$\tau(Proy(\mathcal{A}_\theta)) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta) \cap [0, 1],$$

donde $\tau$ es la única aplicación traza normalizada. Así, ésto da el invariante más algebraico, a saber, $\tau_*(K_0(\mathcal{A}_\theta)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta$.

Luego, las $\mathcal{A}_\theta$ no son todas iguales: si $\mathcal{A}_\theta$ es isomorfa a $\mathcal{A}_{\theta'}$ (para $0 < \theta, \theta' < 1$), entonces $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta'$ con lo que $\theta = \theta'$ ó $\theta' = 1 - \theta$ (si se relaciona $\theta$ con la constante de Plank por $\hbar = 2\pi\theta$, este álgebra es muy distinta si se hacen pequeñas variaciones o aproximaciones de $\hbar$!)

# 9 Nuestro trabajo en este campo

Alrededor de 1980, A. Connes [C2] pone en evidencia que se puede relacionar la teoría de álgebras de operadores con la de foliaciones, y se puede usar ésta para desarrollar una teoría del índice para operadores asociados con variedades foliadas: en un primer momento, operadores que son elípticos a lo largo de las hojas (los operadores de Dirac y signatura a lo largo de las hojas [CS]) y más adelante, algunos operadores transversalmente elípticos (es decir, operadores elípticos sobre "el espacio de las hojas" [C4]).

La conjetura de Baum-Connes se ha demostrado ya en algunos ejemplos de foliaciones:

(1) fibraciones localmente triviales $F^p \to M \to B^q$: en este caso $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(B) \otimes \mathcal{K}$ y $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^*(B)$, donde la base de la fibración $B$ es el espacio de hojas;

(2) basándose en el isomorfismo de Thom de A. Connes [C1], para foliaciones inducidas por acciones libres de $\mathbb{R}^n$: en este caso $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(M) \rtimes \mathbb{R}^n$ y su K-teoría es $K^*(M)$ si $n$ par y $K^{*+1}(M)$ si $n$ es impar. Y para foliaciones inducidas por acciones libres de grupos de Lie $\Gamma$ resolubles simplemente conexos, se obtiene $K_*(C^*(M,\mathcal{F})) \simeq K^{*+dim(\Gamma)}(M)$;

(3) para los casos de suspensiones ($\pi_1(B)$ es un grupo discreto y se tiene una representación inyectiva $R\colon \Gamma \longrightarrow Diff(F)$), puede tomarse $F$ como una transversal fiel, las hojas son revestimientos de $B$, el grupoide transverso es $G_F^F \simeq F \times \pi_1(B)$ y $C^*(M,\mathcal{F}) \simeq C_0(F) \rtimes_{red} \pi_1(B)$;

(4) foliaciones de Reeb sobre $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^3$ [To];

(5) foliaciones sin holonomía (T. Natsume [N] el caso $C^\infty$ y M. Macho-Stadler [M1] el caso topológico): es este caso, $BG$ puede verse como un toro $\mathbb{T}^n$ ($n$ es el orden del grupo de holonomía de la foliación), dotado de una foliación lineal, y nos remitimos al caso (2);

(6) foliaciones casi sin holonomía y foliaciones donde es posible hacer funcionar un cierto "esquema en abiertos y cerrados" ([HM] y [M2]).

En todos estos casos, $BG$ tiene el tipo de homotopía de una variedad, situación que no siempre sucede!!

Una situación particularmente "favorable" es la de una foliación $(M,\mathcal{F})$ para la cual el grupoide de holonomía $G$ tiene fibras ($\alpha$ ó $\beta$-fibras) contráctiles (foliación *clasificante*). En este caso, $BG$ se identifica con la variedad $M$ y la K-teoría topológica del espacio de hojas se reduce a la K-teoría de $M$ (o de $C_0(M)$). Incluso en este caso simple, no se puede dar una formulación inmediata de la conjetura de Baum-Connes, puesto que el isomorfismo "previsto" está definido en términos de una *flecha K-orientada* entre espacios de hojas (o de grupoides), que puede verse intuitivamente como la proyección de $M$ sobre $M/\mathcal{F}$.

Nuestro estudio (casos (5) y (6)) se centra en las foliaciones clasificantes, o más generalmente en ciertas foliaciones que se pueden llevar a foliaciones clasificantes mediante manipulaciones topológicas simples (como equivalencias topológicas, equivalencias de Morita, ...): foliaciones casi sin holonomía y algunos otros ejemplos no triviales de foliaciones (foliación de Sacksteder, foliación de Hirsch, foliaciones $\mathbb{Z}$-periódicas, ...). En estos casos, hemos probado la "formulación reducida" de la conjetura de Baum-Connes, enunciada en los siguientes términos:

**Conjetura 3 (de Baum-Connes "reducida")** *Si el grupoide de holonomía $G$ es clasificante y K-orientado, existe un isomorfismo entre $K^*(M)$ y $K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$.*

Además, actualmente, junto con el profesor M. O'uchi (Japón) estudiamos propiedades de grupoides [MO] que nos ayuden a deducir más casos de dicha conjetura.

# 10 Bibliografía


[A] **M.F. Atiyah**, *K-theory*, Advanced Book Classics Series, Addison-Wesley Pub. Co., Inc, 1989.

[AS] **M.F. Atiyah and Singer**, *The index of elliptic operators*, Annals of Maths 87, 1971.

[BC] **P. Baum and A. Connes**, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint, 1982.

[Bl] **B. Blackadar**, *K-theory for Operator Algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 5, Springer-Verlag New York Inc., 1986.

[BL] **J.P. Buffet et J.C. Lor**, *Une construction d'un universel pour une classe assez large de $\Gamma$-structures*, C.R. Acad. Sc. Paris 270, 640-642, 1970.

[C1] **A. Connes**, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a $C^*$-algebra by an action of* $\mathbb{R}$, Advances in Mathematics 39, 31-55, 1981.

[C2] **A. Connes**, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. in Pure Maths. 38, 521-628, 1982.

[C3] **A. Connes**, *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

[C4] **A. Connes**, *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation* Proc. US-Japan Sem., 1983.

[CS] **A. Connes and G. Skandalis**, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. RIMS Kyoto Univ. 20, 1139-1183, 1984.

[Co] **R. Coquereaux**, *Non-commutative geometry: a physicist's brief survey*, Jour. Geometry and Physics 11, 307-324, 1993.
[D] **M. Dădărlat**, *C*-algebras and applications*, Contemp. Maths. 145, 393-421, 1993.
[Ha] **A. Haefliger**, *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes*, Comm. Math. Helv. 32, 248-329, 1958.
[H] **G. Hector**, *Groupoïdes, feuilletages et C*-algèbres (quelques aspects de la conjecture de Baum-Connes)*, Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), World Sci. Publ., 3-34, 1994.
[HM] **G. Hector et M. Macho Stadler**, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, Comptes Rendues de l'Académie des Sciences, Série I, 325 (9), 1015-1018, 1998.
[Hi] **N. Higson**, *The Baum-Connes conjecture*, Documenta Math. extra volume ICM II, 637-646, 1998.
[M1] **M. Macho Stadler**, *La Conjecture de Baum-Connes pour un feuilletage sans holonomie de codimension un sur une variété fermée*, Publicacions Matemàtiques 33, 445-457, 1989.
[M2] **M. Macho Stadler**, *Isomorphisme de Thom et feuilletages presque sans holonomie*, C. R. Acad. Sci. Paris 325, Série I, 1015-1018, 1997.
[MO] **M. Macho Stadler and M. O'uchi**, *Correspondances of groupoid C*-algebras*, aceptado en Journal of Operator Theory, 1998.
[N] **T. Natsume**, *Topological K-theory for codimension one foliations without holonomy*, Proc. Symposium Foliations, Tokyo 1983, Adv. Stud. Pure Math. 5, 15-27, 1985.
[PV] **M. Pimsner and D. Voiculescu**, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C*-algebras*, J. Operator Theory 4, 93-118, 1980.
[R] **M.A. Rieffel**, *Morita equivalence for operator algebras*, Proc. Symposia Pure Maths. Vol 38, part I, 285-298, 1982.
[Ta] **H. Takai**, *On the Baum-Connes conjecture*, Progress in Maths. 84, 183-197, 1990.
[To] **A.M. Torpe** *K-theory for the leaf space of foliations by Reeb components*, J. of Funct. Analysis 61, 15-71, 1985.
[W] **H.E. Winkelkemper** *The graph of a foliation*, Ann. Global Analysis and Geometry 3, 51-75, 1983.

**Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea**
**Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas**
**Apartado 644. 48080 Bilbao**
**mtpmastm@lg.ehu.es**