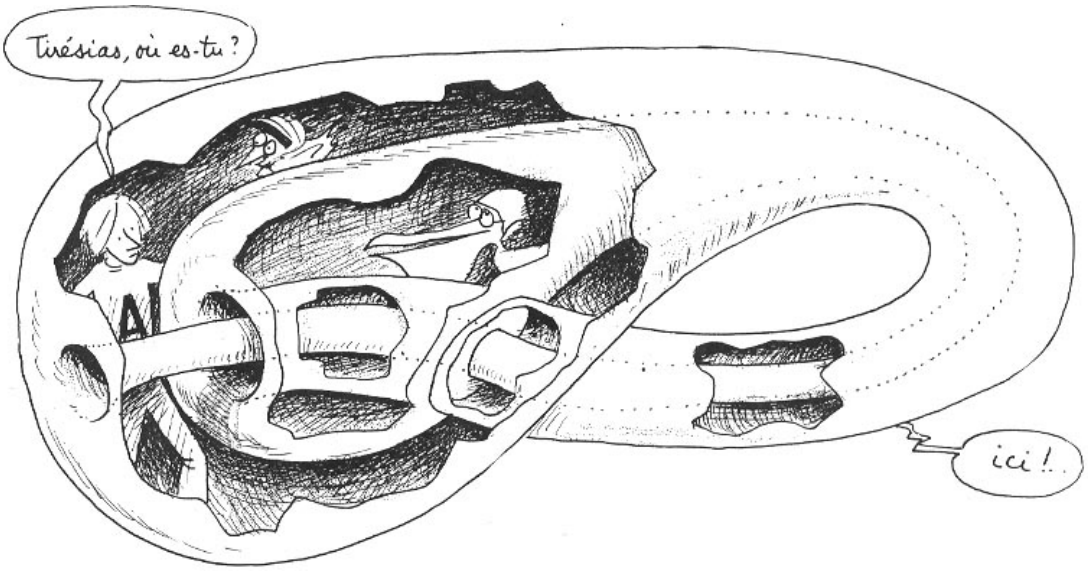
TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Curso 2006/2007



Prof. Marta Macho Stadler

Marta Macho Stadler
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad del País Vasco–Euskal Herriko Unibertsitatea
Barrio Sarriena s/n, 48940 Leioa
e-mail: *marta.macho@ehu.es*
http://www.ehu.es/˜mtwmastm
Tlf: 946015352 Fax: 946012516

Portada: *El toro es un revestimiento de dos hojas de la botella de Klein*
© Jean-Pierre Petit, **http://www.jp-petit.com**
Las aventuras de Anselmo Lanturlu. El Topologicón
http://www.savoir-sans-frontieres.com/

Índice general

Introducción **7**
0.1. ¿Por qué la Topología Algebraica? 7
0.2. Estructura del curso 9
0.3. ¿Dónde se aplica la Topología Algebraica? 9
0.3.1. Teoría de grafos 9
0.3.2. La teoría de nudos 11
0.3.3. Otras aplicaciones 13

1. Preliminares **1**
1.1. Categorías y functores 1
1.2. Conexión por caminos 5
1.3. Algunas nociones sobre grupos 6
1.3.1. Grupo (no abeliano) libre con dos generadores 6
1.3.2. Grupo libre sobre un conjunto 7
1.3.3. Producto libre de dos grupos 7
1.3.4. Producto amalgamado de dos grupos 7
1.3.5. Presentaciones de grupos 8
1.4. Clasificación de superficies compactas 9
1.4.1. Definición de superficie y ejemplos 9
1.4.2. Regiones poligonales 11
1.4.3. Suma conexa de superficies 12
1.5. Problemas 17
1.6. Problemas adicionales 18

2. Homotopía de aplicaciones **27**
2.1. Homotopía de aplicaciones 27
2.2. La categoría de espacios topológicos y homotopías 29

2.3. Problemas 31
2.4. Problemas adicionales 34

3. El grupo fundamental 37
3.1. Homotopía de caminos 37
3.2. El grupo fundamental 39
3.3. Teorema de Seifert–Van Kampen 41
3.4. Grupo fundamental de la esfera 42
3.5. Grupos de homotopía superiores 45
3.6. Problemas 47
3.7. Problemas adicionales 50

4. Estudio de los espacios de revestimiento 55
4.1. Espacios de revestimiento 56
4.2. Propiedades de levantamiento 58
4.3. Aplicaciones de revestimiento y grupo fundamental 59
4.4. El grupo de las transformaciones de revestimiento 60
4.5. Homomorfismos de revestimiento 63
4.6. El espacio de revestimiento universal 64
4.7. Acciones propiamente discontinuas y revestimientos 65
4.8. El teorema de clasificación de los espacios de revestimiento 66
4.9. Problemas 67
4.10. Problemas adicionales 68

5. Homología Singular 71
5.1. Preliminares afines 74
5.2. Teoría singular 77
5.3. El teorema de invarianza por homotopía 81
5.4. El teorema de Hurewicz 82
5.5. Homología relativa 83
5.6. Sucesión exacta larga de homología 85
5.6.1. Aplicaciones a retractos 86
5.6.2. Homotopías en pares 87
5.6.3. Una interpretación de la homología relativa 88
5.7. Teorema de excisión 88
5.7.1. Caso simplicial 88
5.7.2. Caso general 90
5.7.3. Un ejemplo de aplicación 91
5.8. La sucesión de Mayer–Vietoris 91
5.9. Algunas aplicaciones de la Homología 94

5.9.1. Grado de una aplicación entre esferas 94
5.9.2. Teoremas de Jordan–Brouwer 95
5.9.3. Homología en algunos cocientes 96
5.10. Problemas 97
5.11. Problemas adicionales 99

Bibliografía **103**

Introducción

Un libro, un sueño les revela
que son formas de un sueño que fue soñado
en tierras de Bretaña.
Otro libro hará que los hombres,
sueños también, los sueñen.

"Inferno, V, 129"
Jorge Luis Borges (1899–1986)

0.1. ¿Por qué la Topología Algebraica?

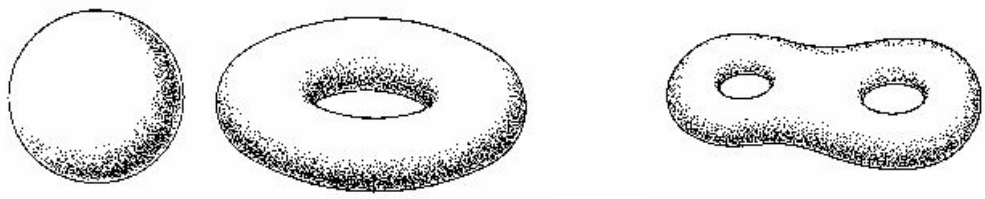
Uno de los problemas básicos de la *topología* es el de determinar cuando dos espacios son o no homeomorfos. No hay un método general para resolver este problema, pero existen técnicas que se pueden aplicar en casos particulares.

Probar que dos espacios *son* homeomorfos consiste en encontrar una función continua de uno de los espacios sobre el otro, que tenga una inversa continua. Pero, la construcción de funciones continuas no es un problema sencillo en general.

Probar que dos espacios *no son* homeomorfos es un asunto diferente: para ello, debemos probar que no existe ninguna función continua con inversa continua entre ambos espacios. Si encontramos una propiedad topológica verificada por uno de los espacios pero no por el otro, entonces el problema está resuelto, y los espacios no pueden ser homeomorfos. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1]$ no puede ser homeomorfo al intervalo abierto $(0, 1)$ (ambos provistos de la topología inducida por la de la recta real), porque el primer espacio es compacto y el segundo no. También sabemos que los espacios euclídeos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no pueden ser homeomorfos, porque si se elimina un punto de $\mathbb{R}^2$ el espacio resultante sigue siendo conexo, pero éste no es el caso si se priva a $\mathbb{R}$ de un punto.

Las herramientas topológicas que conocemos de un curso de topología general no son demasiado útiles para solucionar este problema de *detectar* la equivalencia topológica de dos espacios. Por ejemplo, ¿podemos probar que el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo al espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$? Si pasamos revista a las propiedades topológicas que conocemos – compacidad, conexión, metrizabilidad, etc. – no encontramos ninguna particularidad que nos permita distinguirlos.

Otro ejemplo ilustrativo se obtiene al considerar superficies como la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$ o la superficie compacta de género dos $\mathbb{T}_2$. De nuevo, ninguna de las propiedades topológicas que conocemos nos permiten distinguirlos: los tres espacios son compactos, conexos y metrizables.



Así, debemos introducir nuevas propiedades y técnicas para resolver este problema. Una de las herramientas más naturales entre éstas es la de *conexión simple*: de manera informal, un espacio X es simplemente conexo, cuando toda curva cerrada en X puede contraerse a un punto en el espacio. Esta cualidad permite distinguir $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^3$: si se elimina un punto de $\mathbb{R}^3$, el espacio resultante es simplemente conexo, pero éste no es el caso si se considera $\mathbb{R}^2$ privado de un punto. Esta propiedad también diferencia $\mathbb{S}^2$, que es simplemente conexo, de $\mathbb{T}^2$ que no lo es. Pero, por ejemplo, no distingue entre $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{T}_2$, porque ninguno de los dos espacios posee este atributo.

Hay una idea, más general que la de conexión simple, un concepto que engloba a ésta como un caso particular. Tiene relación con un cierto grupo, llamado *el grupo fundamental* del espacio. Dos espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos; y la condición de conexión simple consiste precisamente en que el grupo fundamental sea trivial. La prueba de que $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{T}^2$ no son homeomorfos puede reformularse, diciendo que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^2$ es trivial y que el de $\mathbb{T}^2$ no lo es. El grupo fundamental distingue *mejor* los espacios que la condición de conexión simple. Puede usarse, por ejemplo, para probar que $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{T}_2$ no son homeomorfos, argumentando que $\mathbb{T}^2$ tiene grupo fundamental abeliano, mientras que el de $\mathbb{T}_2$ no lo es.

Pero, con estas herramientas, tampoco somos capaces de probar que, por ejemplo, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^n$ para $n > 2$ no son homeomorfos: para demostrarlo, en este curso, recurriremos a propiedades de *homología singular*.

0.2. Estructura del curso

Este curso está estructurado en dos bloques distintos. En el primero se estudia la homotopía y las propiedades relacionadas: homotopía de aplicaciones, grupo fundamental y espacios de revestimiento, descritos someramente en los párrafos anteriores. En la segunda parte, nos centraremos en la homología singular. Para comprender ambas teorías, estudiaremos gran cantidad de ejemplos, siendo uno de los objetivos primordiales el de distinguir espacios no homeomorfos, como se ha indicado antes.

Al final de cada tema aparece una relación de ejercicios que solucionaremos en su mayoría en el aula, y una relación de *problemas adicionales* que son más complicados en algunos casos, en otros se trata simplemente de introducir ejemplos conocidos de espacios y de estudiar sus propiedades esenciales.

La Bibliografía que aparece al final de esta Memoria es muy amplia, aunque no exhaustiva. Se indican con * los textos más recomendables, por su sencillez en algunos casos, o por tratarse de textos básicos y *clásicos* en otras ocasiones.

0.3. ¿Dónde se aplica la Topología Algebraica?

Los resultados que veremos en este curso, que son tan sólo una pequeña parte de lo que se denomina **topología algebraica**, se aplican en primer lugar a otras ramas de las matemáticas: son, sin duda alguna, esenciales en muchos de los razonamientos de geometría diferencial, análisis y álgebra.

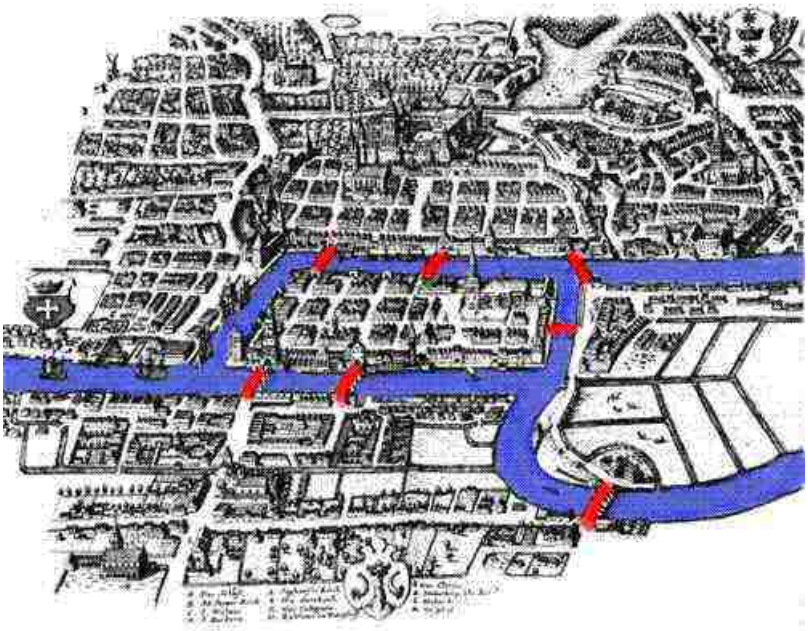
Pero es además una herramienta indispensable en física, química y biología; se utiliza en análisis numérico, investigación operativa y hasta en psiquiatría. A continuación, se citan brevemente algunas de estas aplicaciones.

0.3.1. Teoría de grafos

El estudio de grafos está ligado habitualmente a la topología, convirtiéndose en una valiosa herramienta matemática en campos tan dispares como la investigación operativa, la lingüística, la química, la física, la genética y la teoría de redes. Un *grafo* es un conjunto de puntos, los *vértices*, algunos de los cuales están ligados entre sí por medio de líneas, las *aristas*. La naturaleza geométrica de estos arcos no tiene importancia, sólo cuenta la manera en la que los vértices están conectados. Un buen texto para profundizar en esta materia es: R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2000.

Uno de los problemas clásicos de matemáticas resueltos con esta teoría es el conocido *problema de los siete puentes de Könisberg*: en 1700, los habitantes de Könisberg, se preguntaban si era posible recorrer esta ciudad pasando una vez y sólo una por cada uno de los puentes sobre el río Pregel, y volviendo al punto de partida. En aquella época,

Könisberg tenía siete puentes, uniendo las cuatro partes de la ciudad separadas por las aguas, y dispuestas como se muestra en la figura.



En 1736, L. Euler probó que la respuesta a esta pregunta era negativa, usando un grafo con cuatro vértices simbolizando las cuatro partes separadas de la ciudad y trazando entre estos vértices las aristas, representando los puentes: este grafo no es *euleriano*, condición probada como necesaria y suficiente para que el problema tenga respuesta positiva.

En 1847, G. Kirchhoff analizó un tipo especial de grafo llamado *árbol* y utilizó este concepto en ciertas aplicaciones de redes eléctricas, al formular su extensión de las leyes de Ohm para flujos eléctricos. Diez años después, A. Cayley usó el mismo tipo de grafos para contar los distintos isómeros de hidrocarburos saturados del tipo C_nH_{2n+2}, para n entero positivo.

El *teorema de los cuatro colores* (ver el texto de R. A. Wilson, *Four colors suffice: how the map problem was solved*, Penguin Books, 2002) tiene también estrecha relación con esta teoría. En 1852, F. Guthrie plantea la siguiente conjetura: *para colorear cualquier mapa geopolítico plano (suponiendo cada país formado por un único trozo), de tal modo que dos países con frontera común sean de distinto color, basta (como máximo) con cuatro colores*. Si se elige un punto en cada país representado y se traza una línea uniendo dos puntos cada vez que correspondan a dos países adyacentes, se obtiene un grafo. El problema del coloreado consiste entonces en atribuir un color a cada vértice del grafo, de manera que dos vértices conectados tengan siempre un color diferente.

En 1976, K. Appel y W. Haken dan una prueba del teorema de los cuatro colores, demostrando mediante un complicado programa de ordenador que, efectivamente, cuatro

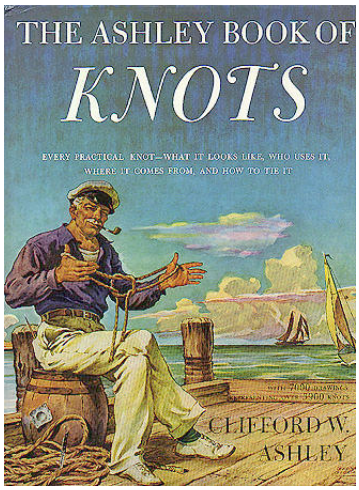
colores son suficientes para colorear cualquier mapa plano. Algunos matemáticos tienen muchas reservas con respecto a esta demostración. Pero, en 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas, publican una nueva prueba, sin los inconvenientes de la demostración de Appel y Haken, como el elevado número de configuraciones a estudiar y el tiempo que todo este procedimiento requiere.

El teorema de los cuatro colores es igualmente cierto para mapas esféricos. Sobre otras superficies, el número de colores necesarios varía, por ejemplo un mapa tórico precisa como mínimo siete colores.

Los grafos no sólo interesan a los matemáticos puros. Se usan también para representar circuitos eléctricos, para realizar cálculos teóricos relativos a partículas elementales, etc. La teoría de grafos tiene igualmente una importancia económica directa, por sus numerosas aplicaciones en investigación operativa. Por ejemplo, para determinar el trayecto óptimo (el menos costoso, el más rápido) de camiones que deben repartir y recoger productos a numerosos clientes esparcidos por un país determinado, la red de carreteras puede modelizarse por un grafo, cuyas aristas son las carreteras de una ciudad a otra, a cada arista se le asocian varios números: longitud del camino correspondiente, tiempo de recorrido, coste del peaje, etc. Usando cálculos y algoritmos a veces complejos, se determinan una o varias soluciones, y se trata entonces de encontrar la mejor de ellas: se está estudiando la llamada *topología de la red*.

0.3.2. La teoría de nudos

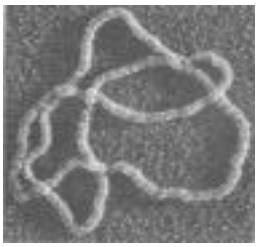
La técnica de tejido, que precisa cruces y anudados de hilos, se conoce ya en el neolítico. Aún en épocas anteriores, existen métodos que permiten unir una lámina de sílex a su mango, con tripas, nervios de animales o fibras vegetales. Lamentablemente, la descomposición de todas estas ligaduras orgánicas no permitirá nunca conocer con precisión la edad de los primeros nudos. En la época actual, los marinos se han apropiado de esta técnica, esencial para su trabajo. En 1944, el pintor C.W. Ashley describe y dibuja en su libro *The Ashley Book of Knots* exactamente 3.854 nudos.



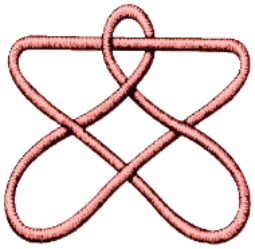
Los nudos están presentes en ámbitos tan dispares como la decoración, la industria textil, la magia, el alpinismo o la cirugía. Su estudio matemático permite además ver su relación con la física, la química o la biología molecular.

El ADN, el material genético más importante en la mayoría de los organismos, se ve habitualmente como una *doble hélice*, en la que dos cadenas de nucleótidos complementarios se enrollan a lo largo de un eje curvo común. La doble hélice puede moverse en

el espacio para formar una nueva hélice de orden mayor; en este caso se habla de ADN *sobreenrollado*. Una gran parte de los ADN conocidos se muestran de esta manera sobreenrollada en algún momento del ciclo de su vida. Cada propiedad física, química y biológica del ADN (comportamiento hidrodinámico, energético, ...) está influenciado por las deformaciones asociadas al sobreenrollamiento.



Fotografía ADN



Nudo que la representa

La comprensión del mecanismo del sobreenrollamiento y las consecuencias de estas características estructurales para el ADN es un problema matemático bastante complejo, que hace intervenir dos ramas de la matemática: la topología algebraica y la geometría diferencial. Para estudiar matemáticamente el sobreenrrollamiento, hay que construir un modelo en el que la estructura se represente como un estrecho lazo torcido de espesor infinitesimal. Por ello, es necesario describir los nudos, encontrar características esenciales que permitan distinguirlos, en otras palabras, clasificarlos sin riesgo a confusión. Esta propiedades, que deben permanecer inalterables a lo largo de la deformación, se llaman *invariantes del nudo*.

En el estudio de la replicación del ADN celular, se encuentran *sacos de nudos*: el ADN está más o menos enrollado sobre sí mismo y en el momento de la replicación se forman nudos controlados por ciertas proteínas. Un mejor conocimiento de estas proteínas y de su interacción con el ADN, abriría nuevas perspectivas en la lucha contra las enfermedades genéticas, los virus, las bacterias o el cáncer.

Combinando la teoría de nudos con la *teoría física de cuerdas*, ha sido posible dar una descripción unificada de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravedad, electromagnetismo y las interacciones fuertes y débiles entre partículas.

Los químicos crean en el laboratorio moléculas anudadas, cuyas propiedades les permiten modificar su forma o desplazarse en función de factores eléctricos, químicos o luminosos, decididos por la persona que dirige la experiencia. Estas nuevas moléculas se parecen en algunas ocasiones a aquellas que, en la naturaleza, estuvieron en el origen de la vida. Otras, permiten imaginar memorias para futuros *ordenadores moleculares*, ya no electrónicos.

0.3.3. Otras aplicaciones

La teoría de homotopía se ha descubierto con una herramienta indispensable en *física de la materia condensada*

(i) para clasificar formas de objetos como *solitones*, *vórtices*,...

(ii) en estudio de *cristales líquidos*, sustancias que exhiben la dualidad sólido-líquido, es decir, que, simultáneamente, poseen propiedades de los líquidos (fluidez y viscosidad) y propiedades ópticas que se parecen de modo asombroso a las de los cristales;

(iii) para la clasificación de defectos y texturas en medios ordenados, como los cristales.

Químicos y físicos se centran en la teoría de *casi-cristales*, aleaciones metálicas, donde la disposición de los átomos es regular, como en un cristal, pero aperiódica. Las teorías de grafos y de mosaicos proporcionan modelos de difracción para los sólidos casi-cristalinos.

La *teoría cuántica de campos* emplea las teorías de homotopía y homología como herramientas básicas, la *teoría de fibrados* es esencial en estudios *electromagnéticos*, etc. Sin duda, se descubrirán en el futuro otras muchas maneras de aplicar las teorías topológicas a otros campos de la Ciencia.

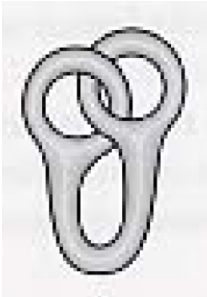
Y sorprendentemente, también se usa en psicología. Se recoge debajo parte del panel *Clínica y topología* (1997), por Eva Lerner de Escuela Freudiana de Buenos Aires:

El interés que me presta la topología de Jacques Lacan – y lo aclaro porque no es el del matemático – estriba en la posibilidad que la topología nos brinda, de pasar de la particularidad del caso a la universalidad...
De este modo con las estructuras topológicas construimos rasgos invariantes que se mantienen aunque acontezcan transformaciones en la estructura...
Cuando usamos la topología en psicoanálisis no se trata de una topología aplicada sino que – como en la escritura del japonés – los caracteres por separado o reunidos tienen otra significación. Esta escritura permite un hablar bilingüe, es decir, decimos lo mismo en otro lenguaje...

Leioa, septiembre de 2006

Al acabar el curso, deberíamos ser capaces de demostrar

Teorema 0.1. *Las dos figuras que aparecen debajo son equivalentes "desde el punto de vista de la Topología Algebraica"*



Preliminares

La vida sin más. La vida ciega
que quiere ser vivida sin mayores consecuencias,
sin hacer aspavientos, sin históricas histerias,
sin dolores trascendentes ni alegrías triunfales,
ligera, sólo ligera, sencillamente bella
o lo que así solemos llamar en la tierra.

"La vida nada más"
Gabriel Celaya (1911-1991)

En este capítulo, repasamos algunos conceptos y estudiamos otros que utilizaremos constantemente durante el curso.

1.1. Categorías y functores

Intuitivamente, una *categoría* puede pensarse como una colección de conjuntos dotados de estructuras de la misma especie y aplicaciones que preservan estas estructuras. De manera más precisa

Definición 1.1. Una *categoría* $\mathfrak{C}$ está formada por

(1) una clase de *objetos*, *Obj*($\mathfrak{C}$),

(2) a cada par ordenado de objetos (X, Y), le corresponde un conjunto de *morfismos*, denotado $hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, siendo las familias $hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ y $hom_{\mathfrak{C}}(X', Y')$ disjuntas si el par (X, Y) es distinto del par (X', Y'). Un morfismo cualquiera $f \in hom_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ se escribe usualmente del modo $f\colon X \longrightarrow Y$,

(3) dada una terna de objetos de la categoría (X, Y, Z), se define una aplicación

$$\circ : hom_{\mathfrak{C}}(X, Y) \times hom_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \longrightarrow hom_{\mathfrak{C}}(X, Z),$$

llamada *composición*, que cumple los dos axiomas siguientes

- Asociatividad: si $f \in hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, $g \in hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z)$ y $h \in hom_{\mathfrak{C}}(Z,W)$, es $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
- Identidad: a cada objeto Y en la categoría se le puede asociar el *morfismo identidad* (que es único, debido a los axiomas), $1_Y \in hom_{\mathfrak{C}}(Y,Y)$, tal que si $f \in hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ y $g \in hom_{\mathfrak{C}}(Y,Z)$, entonces $g \circ 1_Y = g$ y $1_Y \circ f = f$.

Ejemplos 1.1. Algunos ejemplos de categorías son

(i) $\mathfrak{Set}$, la categoría de conjuntos y aplicaciones;

(ii) $\mathfrak{Group}$, la categoría de grupos y homomorfismos de grupos;

(iii) $\mathfrak{Ab}$, la categoría de grupos abelianos y homomorfismos de grupos;

(iv) $\mathfrak{Ring}$, la categoría de anillos conmutativos con unidad y homomorfismos de anillos;

(v) $\mathfrak{Top}$, la categoría de espacios topológicos y aplicaciones continuas;

(vi) $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$, la categoría de espacios vectoriales reales y aplicaciones $\mathbb{R}$–lineales;

(vii) $\mathfrak{Diff}^{\infty}$, la categoría de variedades diferenciales de clase C^{∞} y aplicaciones diferenciables de clase C^{∞};

(viii) $\mathfrak{Top}_*$, la categoría de pares de espacios topológicos con punto base $(X, \{x_0\})$ (donde $x_0 \in X$) y aplicaciones continuas $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $f(x_0) = y_0$;

(ix) $\mathfrak{ParTop}$, la categoría de pares de espacios topológicos (X, A) (donde $A \subset X$) y aplicaciones continuas $f\colon X \longrightarrow Y$ tales que $f(A) \subset B$.

Definición 1.2. Si $f \in hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ y existe $g \in hom_{\mathfrak{C}}(Y,X)$, tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, se dice que f es una *equivalencia* en la categoría $\mathfrak{C}$. Se dice que g es la inversa de f y se denota por $g = f^{-1}$.

Definición 1.3. Un *functor covariante* T de una categoría $\mathfrak{C}_1$ en una categoría $\mathfrak{C}_2$, denotado $T\colon \mathfrak{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{C}_2$, está definido por

(i) una función T que asocia a cada objeto X en $\mathfrak{C}_1$, un objeto $T(X)$ en $\mathfrak{C}_2$,

(ii) una función, denotada también T, que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathfrak{C}_2}(T(X), T(Y))$, de tal modo que

(1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,

(2) si $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X,Y)$ y $g \in hom_{\mathfrak{C}_1}(Y,Z)$, es $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Definición 1.4. Un *functor contravariante* $T\colon \mathfrak{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{C}_2$, está definido por

(i) una función T que asocia a cada objeto X en $\mathfrak{C}_1$, un objeto $T(X)$ en $\mathfrak{C}_2$,

(ii) una función, denotada también T, que asocia a cada morfismo $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ un morfismo $T(f) \in hom_{\mathfrak{C}_2}(T(Y), T(X))$, de tal modo que

(1) $T(1_X) = 1_{T(X)}$,

(2) si $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$ y $g \in hom_{\mathfrak{C}_1}(Y, Z)$, es $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$.

El gran problema de la topología algebraica es el de encontrar y estudiar una suficiente cantidad de functores, de modo que la solución de una cuestión topológica *complicada* equivalga a la de un problema algebraico más simple. Es decir, se trata de encontrar functores de $\mathfrak{Top}$ en $\mathfrak{Group}$, o de $\mathfrak{Top}$ en $\mathfrak{Ab}$, etc.

Ejemplos 1.2. Algunos ejemplos de functores son

(i) el functor *identidad* de cualquier categoría $\mathfrak{C}$ en sí misma, definido de la manera obvia;

(ii) el functor *de olvido*, de la categoría $\mathfrak{Top}$ en la categoría de conjuntos $\mathfrak{Set}$, que asigna a cada espacio topológico X el conjunto base X (sin estructura) y a cada aplicación continua la misma aplicación *olvidando* su continuidad. Existen también functores de olvido entre otras muchas categorías, por ejemplo de $\mathfrak{Group}$ en $\mathfrak{Set}$, de $\mathfrak{Ab}$ en $\mathfrak{Group}$, etc;

(iii) si M es un espacio topológico, se define el functor covariante $(- \times M)\colon \mathfrak{Top} \longrightarrow \mathfrak{Top}$, donde $(- \times M)(X) = X \times M$ para cada espacio topológico X y si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, $(- \times M)(f) = f \times 1_M$;

(iv) el functor *espacio dual*, $(-)^*\colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$, que asigna a cada espacio vectorial real V, su dual V^* (espacio vectorial de las aplicaciones lineales $V \to \mathbb{R}$) y a cada aplicación lineal $\varphi\colon V \longrightarrow W$ la aplicación dual $\varphi^*\colon W^* \longrightarrow V^*$ definida por $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$, es un ejemplo de functor contravariante;

(v) el functor contravariante $C^\infty(-;\mathbb{R})\colon \mathfrak{Diff}^\infty \longrightarrow \mathfrak{Ring}$, que asocia a una variedad diferenciable M el anillo de las funciones reales diferenciables en M y a la aplicación de clase C^∞ $f\colon M \longrightarrow N$ el homomorfismo $f^*\colon C^\infty(N;\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M;\mathbb{R})$, dado por $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposición 1.1. *Si $T\colon \mathfrak{C}_1 \longrightarrow \mathfrak{C}_2$ es un functor y f es una equivalencia en $\mathfrak{C}_1$, entonces $T(f)$ es una equivalencia en $\mathfrak{C}_2$, tal que $(T(f))^{-1} = T(f^{-1})$.*

Definición 1.5. Si T yS son dos functores de la categoría $\mathfrak{C}_1$ en la categoría $\mathfrak{C}_2$, una *transformación natural* Φ de S en T, denotada $\Phi\colon S \longrightarrow T$, es un sistema de morfismos en $\mathfrak{C}_2$, $\Phi_X \in hom_{\mathfrak{C}_2}(S(X), T(X))$ para cada objeto X en $\mathfrak{C}_1$, que hace conmutativo el siguiente diagrama, para cada $f \in hom_{\mathfrak{C}_1}(X, Y)$

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\Phi_X"'] & S(Y) \arrow[d, "\Phi_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"] & T(Y) \end{tikzcd}$$

Si cada Φ_X es una equivalencia, Φ se llama una *equivalencia natural*. En tal caso, se cumple $\psi = \Phi^{-1}$ (es decir, $\psi_X = \Phi_X^{-1}$, para cada objeto X en $\mathfrak{C}_1$), y es también una equivalencia natural (invirtiendo las flechas verticales en el diagrama anterior), llamada *equivalencia natural inversa*.

Ejemplos 1.3. Algunos ejemplos de transformaciones naturales son

(i) consideremos los siguientes functores

- $(-)^X\colon \mathfrak{Ring} \longrightarrow \mathfrak{Group}$, que asocia a un anillo R el grupo multiplicativo R^X de los elementos inversibles del anillo, y a un homomorfismo $f\colon R \longrightarrow S$ su restricción al subconjunto de los elementos inversibles $f|_{R^X}\colon R^X \longrightarrow S$;
- $GL(n; -)\colon \mathfrak{Ring} \longrightarrow \mathfrak{Group}$, que asocia a un anillo R el grupo $GL(n; R)$ de las matrices $n \times n$, inversibles y con valores en el anillo R, y a un homomorfismo $f\colon R \longrightarrow S$ el homomorfismo de grupos $f^*\colon GL(n; R) \longrightarrow GL(n; S)$, definido por $f^*((a_{ij})_{i,j}) = (f(a_{ij}))_{i,j}$.

Entonces, $det_R\colon GL(n; R) \longrightarrow R^X$, que asocia a cada matriz inversible su determinante, es una transformación natural entre estos dos functores;

(ii) consideremos los functores

- identidad $Id\colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$,
- el functor doble dual $(-)^{**}\colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Entonces, $\Phi\colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$, definido por $\Phi_V(v) = (f \to f(v))$, para el espacio vectorial real V y $f \in V^*$, es una transformación natural entre estos dos functores. Si restringimos Φ a la subcategoría de los espacios vectoriales de dimensión finita, se obtiene una equivalencia natural.

1.2. Conexión por caminos

La conexión es una propiedad difícil de manejar, al tratarse de una propiedad en sentido negativo: un espacio topológico es conexo si no existe una separación no trivial por abiertos disjuntos. La conexión por caminos posee la ventaja de ser una propiedad *algebraica* y en sentido positivo.

Definición 1.6. Dado un espacio topológico X, un *camino* en X es una aplicación continua $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$. Si $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, se dice que σ es un camino de a a b.

Definición 1.7. X es *conexo por caminos*, si para todo par de puntos $a, b \in X$ existe un camino que los une.

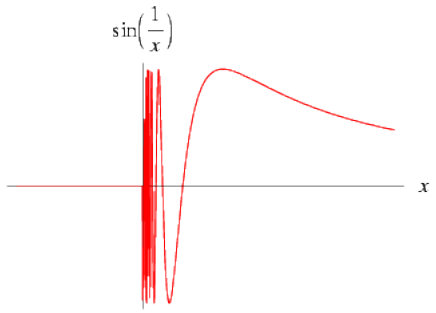
Proposición 1.2. *Si X es conexo por caminos, es conexo.*

El recíproco no es cierto:

Ejemplo 1.1. La *curva seno topológico* es el subespacio del plano euclídeo

$$A = ((-\infty, 0] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0 \right\}.$$

A es conexo, pero no es conexo por caminos.



Ejemplos 1.4. A continuación se dan algunos ejemplos de espacios conexos por caminos

(i) los espacios indiscretos son conexos por caminos;

(ii) en la recta real, los conjuntos conexos y los conexos por caminos coinciden;

(iii) para $A \subset \mathbb{R}^n$, se verifica

- si A es conexo y abierto, es conexo por caminos;
- si A es convexo, es conexo por caminos;
- si A es contable y $n > 1$, $\mathbb{R}^n - A$ es conexo por caminos.

Teorema 1.3. *La imagen continua de un espacio conexo por caminos, es conexa por caminos.*

Por lo tanto, la conexión por caminos es una propiedad topológica, pasa al cociente, etc. Pero, no es una propiedad hereditaria.

Teorema 1.4. *El producto finito de espacios conexos por caminos, es conexo por caminos.*

Se define sobre X la relación binaria $x \sim y$ si y sólo si existe un camino en X que une x e y. Se trata de una relación de equivalencia, cuyas clases son las *c*omponentes conexas por caminos de X. Se denota usualmente por $\pi_0(X)$ a la familia de estas clases. La componente conexa por caminos de un punto x es el mayor conjunto conexo por caminos de X que lo contiene.

Definición 1.8. X es *localmente conexo por caminos*, si cada punto de X posee una base local formada por conjuntos conexos por caminos.

A pesar del ejemplo 1.1, existe un recíproco parcial de la proposición 1.2

Proposición 1.5. *Si X es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.*

1.3. Algunas nociones sobre grupos

1.3.1. Grupo (no abeliano) libre con dos generadores

Sea E el conjunto de las palabras finitas (incluida la palabra vacía) que se pueden formar al yuxtaponer los símbolos a^p y b^q, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una palabra, está permitido efectuar las siguientes reducciones

- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $a^p a^q$ por el símbolo a^{p+q};
- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $b^p b^q$ por el símbolo b^{p+q};
- suprimir a^0 y b^0.

Una palabra para la que toda reducción es imposible, es una *palabra reducida*. Está formada por una sucesión de símbolos alternativamente de la forma a^p y b^q, con exponentes no nulos. Se verifica fácilmente que toda palabra admite una única reducción.

Se denota por $L(a, b)$ o $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, al conjunto de las palabras reducidas dotado de la ley de composición siguiente: *el producto $m.m'$ de dos palabras, es la palabra reducida asociada a la palabra (no necesariamente reducida) obtenida al escribir m y m' consecutivamente*.

Para esta ley, $L(a, b)$ es un grupo para el que la palabra vacía es el elemento neutro y $(a^{-p_n} b^{-q_n} \dots a^{-p_1} b^{-q_1})$ es la inversa de la palabra $(b^{q_1} a^{p_1} \dots b^{q_n} a^{p_n})$.

Las aplicaciones $\widetilde{a}, \widetilde{b} \colon \mathbb{Z} \longrightarrow L(a, b)$ definidas por $\widetilde{a}(p) = (a^p)$ y $\widetilde{b}(q) = (b^q)$ son dos homomorfismos inyectivos.

Además, si G es un grupo y $\varphi, \psi \colon \mathbb{Z} \longrightarrow G$ son dos homomorfismos, existe un único homomorfismo $\theta \colon L(a, b) \longrightarrow G$ tal que $\theta \circ \widetilde{a} = \varphi$ y $\theta \circ \widetilde{b} = \psi$, y dado por $\theta(a^p) = \varphi(p)$ y $\theta(b^q) = \psi(q)$.

1.3.2. Grupo libre sobre un conjunto

Es una generalización de la noción anterior: en vez de formar palabras con la ayuda de letras a y b, se utilizan todos los elementos del conjunto S. En particular, si S es un conjunto finito de n elementos, se obtiene el grupo libre de n generadores, que se denota $L(S)$.

1.3.3. Producto libre de dos grupos

Es otra generalización de la primera noción: sean G_1 y G_2 dos grupos; se considera el conjunto de las palabras finitas constituidas por elementos de G_1 y de G_2. Se permite a reemplazar dos letras consecutivas g_1 y g_1' si están en el mismo grupo G_1 por la única letra $g_1.g_1' \in G_1$, y lo mismo con G_2. Además, se suprimen los elementos neutros. Como antes, una palabra reducida es una sucesión finita de elementos provenientes alternativamente de G_1 y G_2. El conjunto de las palabras reducidas, dotado de la ley de composición evidente, constituye el grupo $G_1 * G_2$, *producto libre* de ambos grupos.

Para $i \in \{1, 2\}$, las aplicaciones $\theta_i \colon G_i \longrightarrow G_1 * G_2$ dadas por $\theta_i(g_i) = (g_i)$, son homomorfismos inyectivos. Además, si G es un grupo y se tienen los homomorfismos $\mu_i \colon G_i \longrightarrow G$, existe un único homomorfismo $\mu \colon G_1 * G_2 \longrightarrow G$ tal que $\mu \circ \theta_i = \mu_i$. Se habla de esta propiedad como de la *propiedad universal* del producto libre de dos grupos.

Observaciones 1.1. Para el producto libre de grupos, se verifica que

(i) la anterior propiedad *universal* caracteriza el producto libre $G_1 * G_2$, salvo isomorfismos;

(ii) si G_2 se reduce al elemento neutro, entonces θ_1 es un isomorfismo;

(iii) si G_1 y G_2 son los grupos generados por los símbolos a y b respectivamente estamos en el caso del apartado 1.3.1.

1.3.4. Producto amalgamado de dos grupos

Recordemos que si H es un grupo y N un subgrupo, se dice que N es *normal* en H, si para cada $h \in H$ y $x \in N$, es $h^{-1}xh \in N$. Si K es un subgrupo de H, se denota por $\overline{K}$ a la intersección de todos los subgrupos normales en H que contienen a K: este grupo está constituido por la familia de los elementos $h^{-1}kh$ con $h \in H$ y $k \in K$ y por todos sus productos, y es el menor subgrupo normal de H que contiene a K. Se dice que $\overline{K}$ es la *clausura normal* de K en H.

Sean G_0, G_1 y G_2 grupos y para $i \in \{1, 2\}$ homomorfismos $\varphi_i \colon G_0 \longrightarrow G_i$. Sea N el menor subgrupo normal en $G_1 * G_2$ que contiene todos los elementos de la forma

$$\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\},$$

y sea $\mu\colon G_1 * G_2 \longrightarrow G_1 * G_2/N$ la sobreyección canónica. Se denota al grupo cociente por $G_1 * G_2/N = G_1 *_{G_0} G_2$, y se dice que es el *producto de G_1 y G_2 amalgamado por G_0*.

Para $i \in \{1, 2\}$, los homomorfismos $\mu_i = \mu \circ \theta_i$ satisfacen la relación $\mu_1 \circ \varphi_1 = \mu_2 \circ \varphi_2$, ya que para $g \in G_0$ los elementos $\theta_1(\varphi_1(g))$ y $\theta_2(\varphi_2(g))$ difieren en un elemento que está en $N = ker(\mu)$.

Además, si H es un grupo y para $i \in \{1, 2\}$ los homomorfismos $\psi_i\colon G_i \longrightarrow H$ verifican la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$, existe un único homomorfismo $\psi\colon G_1 *_{G_0} G_2 \longrightarrow H$ tal que $\psi_i = \psi \circ \mu_i$. En efecto, por la propiedad universal del producto libre, existe un único homomorfismo $\psi'\colon G_1 * G_2 \longrightarrow H$ tal que $\psi_i = \psi' \circ \theta_i$; pero la identidad $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$ prueba que $\{(\varphi_1(g)\varphi_2(g)^{-1}), (\varphi_2(g)\varphi_1(g)^{-1}) : g \in G_0\} \subset ker(\psi')$, y por lo tanto, es también $N \subset ker(\psi')$, con lo que ψ' pasa al cociente por N.

¿Cómo se caracterizan los elementos de N? Para que una palabra (no necesariamente reducida) represente un elemento de $G_1 * G_2$ que está en N, es necesario y suficiente que se pueda reducir al neutro (la palabra vacía) por una sucesión de manipulaciones de los tipos siguientes

(i) reemplazar una letra $\varphi_1(g)$ por $\varphi_2(g)$, para $g \in G_0$ y recíprocamente;

(ii) reemplazar dos letras consecutivas g_i y g_i' (donde $g_i, g_i' \in G_i$, $i \in \{1, 2\}$), por la letra $g_i'' = g_i.g_i' \in G_i$, y recíprocamente, descomponer una letra g_i'' en una sucesión $g_i\, g_i'$, si $g_i'' = g_i.g_i'$.

Estas manipulaciones no cambian el elemento correspondiente de $G_1 * G_2$ y permiten alcanzar la palabra reducida deseada.

Observaciones 1.2. Como casos particulares, tenemos

(i) si G_0 se reduce al elemento neutro, N es el grupo trivial y el producto amalgamado $G_1 *_{G_0} G_2$ es isomorfo a $G_1 * G_2$;

(ii) si G_2 se reduce al elemento neutro, entonces N es el subgrupo normal engendrado por el conjunto $\varphi_1(G_0) = \{\varphi_1(g) : g \in G_0\}$. Además, $G_1 * G_2$ es isomorfo a G_1, por la observación 1.1 (i). El producto amalgamado es entonces el cociente de G_1 por el menor subgrupo normal $\overline{\varphi_1(G_0)}$, que contiene a $\varphi_1(G_0)$.

1.3.5. Presentaciones de grupos

A veces, es conveniente describir un grupo dando un conjunto de generadores y una lista de reglas que describan como se multiplican estos generadores. Por ejemplo, el grupo cíclico de orden n generado por g puede describirse como el grupo generado por g, con la única relación $g^n = 1$: cualquier otra relación del grupo, como $g^{2n} = 1$ o $g^{3-n} = g^3$ se deriva de la primera. Pero es preciso expresar con precisión estas nociones.

Definición 1.9. Una *presentación* de un grupo es un par ordenado, $\langle S|R\rangle$, donde S es un conjunto arbitrario y R es un conjunto de elementos del grupo libre $L(S)$. Los elementos de S y R se llaman *generadores* y *relaciones* de la presentación, respectivamente. Una presentación de grupos define un grupo, denotado también $\langle S|R\rangle$, como el cociente $\langle S|R\rangle = L(S)/\overline{R}$, donde $\overline{R}$ es la clausura normal de R en $L(S)$.

Cada generador $s \in S$ determina un elemento en $\langle S|R\rangle$ y toda relación $r \in R$ representa un producto particular de generadores y sus inversos, que es igual a 1 en el cociente. En cierto sentido, $\langle S|R\rangle$ es el mayor grupo generado por S en el que todos los productos representados por los elementos de R son iguales a 1.

Si G es un grupo y existe un isomorfismo $G \simeq \langle S|R\rangle$, se dice que $\langle S|R\rangle$ es una presentación del grupo G. Todo grupo admite una presentación, pero lo importante es encontrar una *eficaz*, es decir, con los conjuntos S y R lo menores posible.

Si G admite una presentación $\langle S|R\rangle$, para $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ conjuntos finitos, se dice que G tiene una *p*resentación finita. Y la presentación se escribe de la forma $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n | r_1, \ldots, r_m\rangle$ o también $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n | r_1 = 1, \ldots, r_m = 1\rangle$. A veces, se escribe $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n | r_1 = q_1, \ldots, r_m = q_m\rangle$ para expresar la presentación $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n | r_1 q_1^{-1}, \ldots, r_m q_m^{-1}\rangle$.

Ejemplos 1.5. Algunos ejemplos de presentaciones de grupos son

(i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g_1, g_2 | g_1 g_2 = g_2 g_1\rangle$;

(ii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g | g^n = 1\rangle$;

(iii) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tiene como presentación $\langle g_1, g_2 | g_1^n = 1, g_2^m = 1, g_1 g_2 = g_2 g_1\rangle$.

1.4. Clasificación de superficies compactas

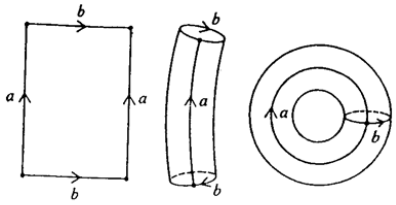
1.4.1. Definición de superficie y ejemplos

Definición 1.10. Una *variedad topológica de dimensión* n es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable, donde cada punto posee un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, a una bola abierta euclídea de dimensión n). Es decir, se trata de un espacio *modelado* por el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Una *superficie topológica* es una variedad de dimensión dos. Los primeros ejemplos de superficies son el plano $\mathbb{R}^2$, la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro $\mathbb{T}^2$, y en general, cualquier abierto de una superficie sigue siendo una superficie.

La descripción de las superficies no compactas es muy complicada. Aquí, vamos a dar únicamente un breve repaso de las propiedades de las superficies compactas. Para su estudio, es conveniente tener una manera uniforme de representarlas.

El prototipo es el toro $\mathbb{T}^2$, que se define como el cociente de un cuadrado en $\mathbb{R}^2$, identificando aristas por pares de una determinada manera, como se muestra en la figura



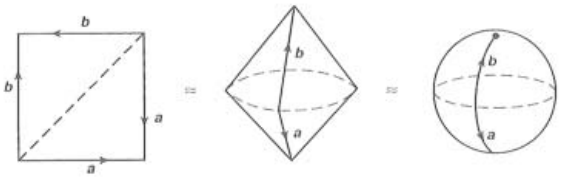
Definición 1.11. El toro $\mathbb{T}^2$ es el cociente de $[0,1]^2$, por la relación de equivalencia $(0,t) \sim (1,t)$ y $(t,0) \sim (t,1)$, si $0 \leq t \leq 1$.

Nuestro objetivo es probar que toda superficie compacta se puede representar como el cociente de una región poligonal en el plano por una relación de equivalencia que identifica los lados a pares. Como ejemplos básicos, tenemos

Lema 1.6. *La esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfa a cualquiera de los cocientes siguientes*

(i) el cociente del disco unidad $\mathbb{D}^2$, bajo la relación de equivalencia $(x,y) \simeq (-x,y)$, si $(x,y) \in fr(\mathbb{D}^2)$;

(ii) el cociente de $[0,1]^2$, por la relación de equivalencia $(0,t) \sim (t,0)$ y $(1,t) \sim (t,1)$, si $0 \leq t \leq 1$.

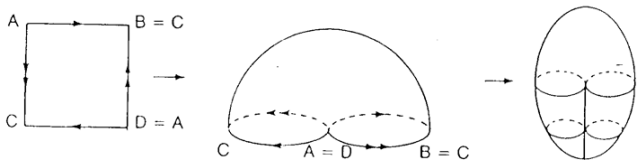


Lema 1.7. *El plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo a cualquiera de los cocientes siguientes*

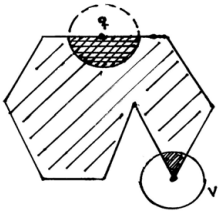
(i) el cociente de $\mathbb{S}^2$, obtenido tras identificar puntos antipodales;

(ii) el cociente de $\mathbb{D}^2$, bajo la relación $(x,y) \simeq (-x,-y)$, si $(x,y) \in fr(\mathbb{D}^2)$;

(iii) el cociente del cuadrado $[0,1]^2$, por la relación de equivalencia $(0,t) \sim (1,1-t)$ y $(t,1) \sim (1-t,0)$, si $0 \leq t \leq 1$.



1.4.2. Regiones poligonales



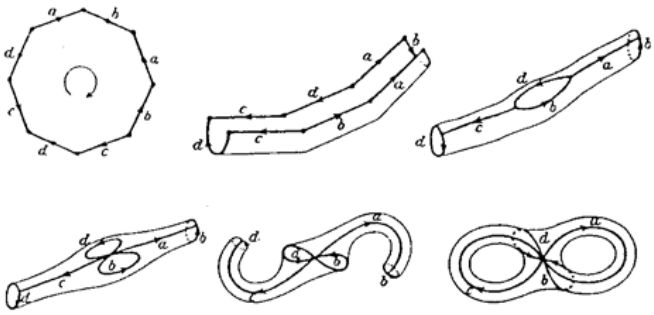
Definición 1.12. Una *región poligonal* P en el plano es un conjunto compacto, cuya frontera topológica es unión de una familia finita de segmentos cerrados llamados *aristas*, con puntos finales denominados *vértices*, tales que

(i) para cada punto q en una arista que no sea un vértice, existe un entorno U en $\mathbb{R}^2$, tal que $P \cap U = U \cap H$, donde $H = \{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$ es un cierto semiplano cerrado;

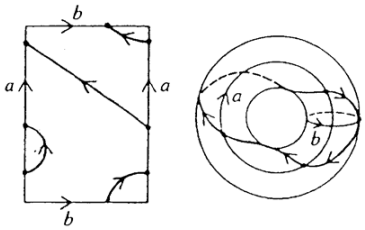
(ii) cada vértice v posee un entorno V en $\mathbb{R}^2$, tal que $P \cap V = V \cap \widehat{H}$, donde $\widehat{H}$ es la unión de dos semiplanos cerrados cuyas fronteras se cortan en v.

El siguiente resultado es clave en todo lo que sigue (ver [Lee]).

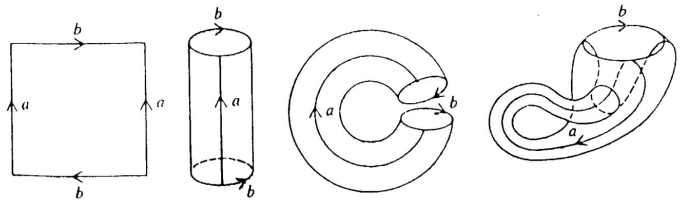
Proposición 1.8. *Sea P una región poligonal en el plano con un número par de aristas y sea $\sim$ una relación de equivalencia que identifica cada arista con exactamente otra, por medio de un homeomorfismo lineal que envía los puntos finales de una arista en los puntos finales de la otra. El cociente resultante es una superficie compacta.*



La importancia de esta *representación plana* para una superficie, es que en muchas ocasiones, es más sencillo manipular objetos sobre la región poligonal que la representa. Por ejemplo, esto sucede al estudiar caminos sobre $\mathbb{T}^2$



Definición 1.13. La botella de Klein $\mathbb{K}^2$ se define como el cociente de $[0, 1]^2$ por la relación de equivalencia $\simeq$ que identifica $(0, t) \simeq (1, t)$ y $(t, 1) \simeq (1 - t, 0)$, si $0 \leq t \leq 1$.



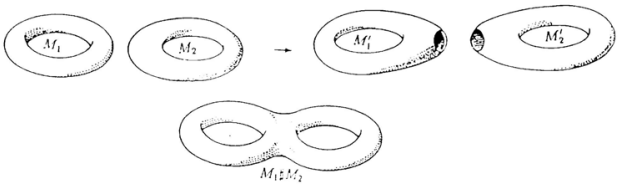
Para visualizarlo, pensar primero en pegar las aristas izquierda y derecha para formar un cilindro, y después pasar la tapa superior del cilindro a través de su pared, con el fin de pegar el círculo superior con el inferior *d*esde dentro. Desde luego, esto no puede realizarse con un modelo físico; de hecho la superficie de Klein no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, la proposición 1.8 prueba que es una superficie.

1.4.3. Suma conexa de superficies

Para construir otros ejemplos de superficies, vamos a introducir una manera estándar de *fabricar* variedades, *pegando* otras más sencillas, procedimiento que será válido en cualquier dimensión.

Sean M_1 y M_2 dos variedades topológicas de dimensión n y conexas. Para $i \in \{1, 2\}$, sean $U_i \subset M_i$ subconjuntos homeomorfos a bolas abiertas euclídeas de un cierto radio fijado r. En cada conjunto U_i se considera B_i, el subconjunto correspondiente bajo el citado homeomorfismo a la bola abierta de radio $r/2$. Elegimos un homeomorfismo $\sigma\colon fr(B_1) \longrightarrow fr(B_2)$ (que existe porque ambas fronteras son homeomorfas a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$). Si $M_i' = M_i - B_i$, se define el espacio cociente de la suma disjunta $M_1' \sqcup M_2'$, identificando cada $q \in fr(B_1)$ con su imagen $\sigma(q) \in fr(B_2)$.

Definición 1.14. El cociente resultante se llama la *suma conexa* de M_1 y M_2, y se denota por $M_1 \sharp M_2$. Geométricamente, la suma conexa se obtiene cortando una pequeña bola abierta de cada una de las variedades y pegando los espacios resultantes, a través de sus esferas frontera.

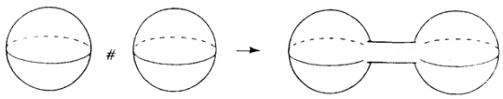


Proposición 1.9. *Si M_1 y M_2 son variedades de dimensión n y conexas, cualquier suma conexa $M_1 \sharp M_2$ es una variedad de dimensión n y conexa.*

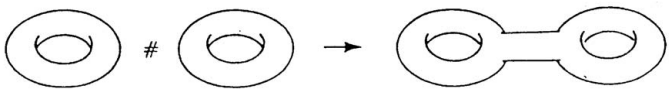
La definición de $M_1 \sharp M_2$ depende, a priori, de varias elecciones: para $i \in \{1, 2\}$ los conjuntos B_i, el homeomorfismo σ, etc. A pesar de eso, se puede probar que diferentes *decisiones* dan lugar a sumas conexas homeomorfas.

Ejemplos 1.6. Los siguientes son ejemplos sencillos de sumas conexas

(i) si M es una variedad, $M\sharp\mathbb{S}^n$ es homeomorfa a M;



(ii) la suma conexa $\mathbb{T}^2\sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp\mathbb{T}^2$ es la *superficie compacta de género* n (este nombre se aclarará en los problemas) o esfera de n asas. Esta última nomenclatura se debe a que, de hecho, esta superficie es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{S}^2\sharp\mathbb{T}^2\sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp\mathbb{T}^2$, y cada toro añadido parece un asa *pegada* a la *esfera base*.



Como hemos mencionado antes, para dar el teorema de clasificación de superficies compactas, precisamos una manera uniforme de describir tales objetos. Vamos a representar todas estas superficies como cocientes de regiones poligonales con $2n$ lados. De manera informal, podemos describir cada relación de equivalencia entre aristas, nombrando las aristas con letras $a_1, \ldots, a_n$ y dibujando sobre cada una de ellas una flecha *apuntando* hacia uno de sus vértices, de modo que los vértices con el mismo nombre se identifican, con las flechas indicando el modo en que las aristas se *pegan*. Una vez realizado este proceso, se asocia al polígono una sucesión de símbolos, obtenidos al leer las etiquetas de sus bordes en el sentido de las agujas del reloj: para cada símbolo a_i en la frontera, escribimos a_i en la sucesión si la flecha posee el sentido horario y ponemos a_i^{-1} si la flecha va en el sentido antihorario. Por ejemplo, la relación de equivalencia de $[0,1]^2$ que da lugar al toro (ver definición 1.11) resulta en una sucesión de símbolos $aba^{-1}b^{-1}$.

Formalmente, la *presentación de una superficie* es un par, $\langle a_1, \ldots, a_n \mid W_1, \ldots W_k\rangle$, que consiste en una familia finita de símbolos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y otro conjunto finito de *palabras* $\{W_1, \ldots W_k\}$ cada una de las cuales es una sucesión finita de elementos, que pueden ser a_i ó a_i^{-1} (donde $(a_i^{-1})^{-1} = a_i$), para algún a_i en la lista, de tal manera que

(1) cada símbolo a_i ocurre exactamente un número par de veces en $W_1, \ldots W_k$ (contando ambos a_i ó a_i^{-1} como una aparición);

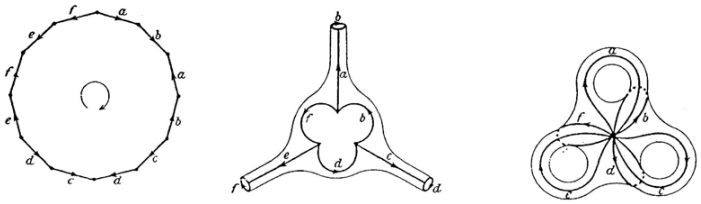
(2) cada palabra W_j posee longitud (número de letras) 3 al menos, salvo en el caso en que la presentación completa tenga sólo una palabra, en cuyo caso a la palabra simple se le asigna la longitud 2.

Una presentación determina un espacio topológico con la siguiente *receta*

(1) se asocia a cada palabra W_j un k_j–polígono convexo P_j en el plano, donde k_j es la longitud de W_j, y donde los polígonos elegidos son disjuntos (en el caso especial de $k_j = 2$, se usa en su lugar un disco cerrado, porque no existe un polígono de dos caras, y se consideran las *aristas* como los semicírculos izquierdo y derecho);

(2) se define una correspondencia uno a uno entre las letras de W_j y las aristas del k_j–polígono, siguiendo el orden de las agujas del reloj, empezando por una arista arbitraria;

(3) se identifica cada par de aristas que tienen el mismo símbolo, de acuerdo con el homeomorfismo afín que *pega* los primeros vértices en orden de las agujas del reloj, si dos aristas tienen la misma etiqueta a_i ó a_i^{-1}, y que identifica el primer vértice de una con el segundo vértice de la otra si las aristas están etiquetadas a_i y a_i^{-1}.



Por la proposición 1.8, el espacio topológico resultante es una superficie compacta. Los interiores, aristas y vértices de los polígonos P_j se llaman caras, aristas y vértices de la presentación. El número de caras es el mismo que el número de palabras, la cantidad de aristas de la presentación es el doble que el número de símbolos $a_1, \ldots, a_n$. Para una arista etiquetada a_i, el *vértice inicial* es el primero siguiendo el orden de las agujas del reloj, y el vértice final es el otro; para una arista etiquetada a_i^{-1}, estas definiciones se invierten.

La superficie determinada por una presentación con una única cara es conexa, porque es un cociente de un polígono conexo; con más de una cara, no hay certeza de que es lo que sucede. Las únicas elecciones arbitrarias involucradas en esta construcción son formas, tamaños y ubicaciones de los polígonos y la decisión de cual es la primera arista (para seguir luego, a partir de ella, el orden de las agujas del reloj); es fácil ver que diferentes elecciones en este sentido, dan lugar a superficies homeomorfas.

Ejemplos 1.7. Las siguientes superficies están determinadas por las presentaciones indicadas

(1) la esfera $\mathbb{S}^2$: $\langle a \mid aa^{-1} \rangle$ ó $\langle a, b \mid aa^{-1}bb^{-1} \rangle$;

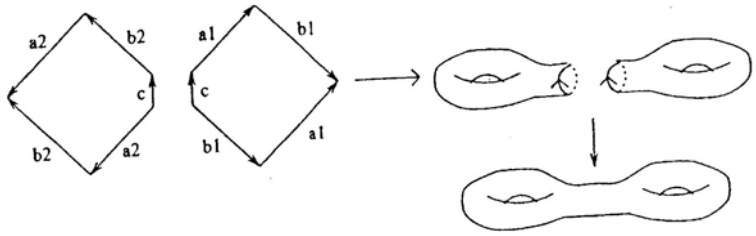
(2) el toro $\mathbb{T}^2$: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$;

(3) el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$: $\langle a \mid aa \rangle$ ó $\langle a, b \mid abab \rangle$;

(4) la botella de Klein $\mathbb{K}^2$: $\langle a, b \mid aba^{-1}b\rangle$.

Ahora vamos a describir las presentaciones estándar de superficies formadas por suma conexa. La clave es la siguiente proposición

Proposición 1.10. *Sean M_1 y M_2 superficies dadas por presentaciones $\langle a_1, \ldots, a_n \mid W_1\rangle$ y $\langle b_1, \ldots, b_m \mid W_2\rangle$ respectivamente (W_1 y W_2 representan palabras simples, y parte de la hipótesis es que cada presentación tiene una cara simple). Entonces, la suma conexa $M_1 \sharp M_2$ tiene como presentación $\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \mid W_1W_2\rangle$, donde W_1W_2 indica la palabra formada al concatenar W_1 y W_2.*

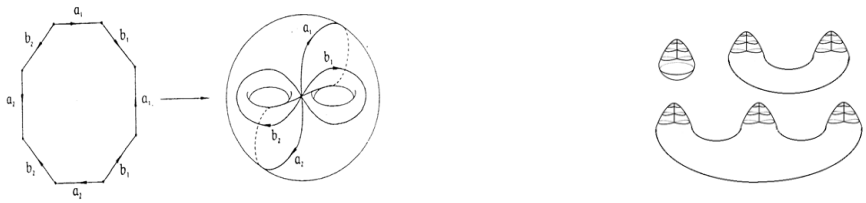


De la proposición 1.10 y de los ejemplos 1.7, se deduce

Ejemplos 1.8. Se tienen las siguientes presentaciones, llamadas estándar

(1) $\langle a_1, b_1, \ldots, a_nb_n \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}\rangle$ para la superficie compacta de género n;

(2) $\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1a_1 \ldots a_na_n\rangle$ para la suma conexa de n copias de $\mathbb{RP}^2$.



Hay ciertas reglas para transformar presentaciones de superficies en otras diferentes de la misma superficie (bajo homeomorfismo). Se dice que dos presentaciones son *equivalentes*, si determinan superficies homeomorfas. Y puede probarse

Proposición 1.11. *Cada una de las siguientes operaciones sobre una presentación produce otra equivalente*

(1) <u>Renombramiento</u>: cambiar las ocurrencias de un símbolo a_i, por un nuevo símbolo, aún no existente en la presentación; intercambiar todas las ocurrencias de dos símbolos a_i y a_j o intercambiar todas las ocurrencias de a_i y a_i^{-1}, para algún i;

(2) <u>*Reflejo*</u>*:* $\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 \ldots a_m, W_2, \ldots, W_k\rangle \mapsto \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_m^{-1} \ldots a_1^{-1}, W_2, \ldots, W_k\rangle$*;*

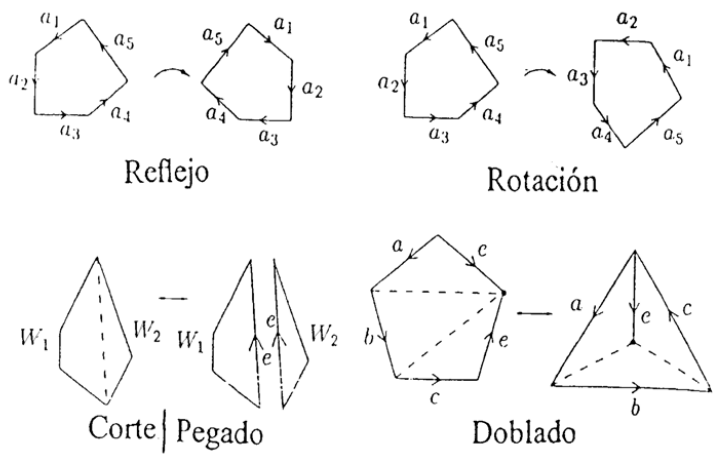
(3) <u>*Rotación*</u>*:* $\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_2 \ldots a_m, W_2, \ldots, W_k\rangle \mapsto$
$\mapsto \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_2 \ldots a_m a_1, W_2, \ldots, W_k\rangle$*;*

(4) <u>*Corte*</u>*: si* W_1 *y* W_2 *son palabras con al menos longitud 2,* $\langle a_1, \ldots, a_n \mid W_1 W_2\rangle \mapsto \langle a_1, \ldots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2\rangle$*;*

(5) <u>*Pegado*</u>*:* $\langle a_1, \ldots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2\rangle \mapsto \langle a_1, \ldots, a_n \mid W_1 W_2\rangle$*;*

(6) <u>*Doblado*</u>*: si* W_1 *y* W_2 *tienen ambas longitud al menos 2,* $\langle a_1, \ldots, a_n, a \mid W_1 a a^{-1} W_2\rangle \mapsto \langle a_1, \ldots, a_n \mid W_1 W_2\rangle$.

Se presentan debajo esquemáticamente estas operaciones



Utilizando las anteriores transformaciones, es fácil comprobar

Lema 1.12. *Se verifican las propiedades*

(1) la botella de Klein es homeomorfa a la suma conexa $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$*;*

(2) la suma conexa $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ *es homeomorfa a* $\mathbb{T}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$.

Y finalmente, combinando los anteriores resultados, se deduce el teorema de **clasificación de superficies compactas**

Teorema 1.13. *Cualquier superficie conexa y compacta es homeomorfa a una de las siguientes*

(1) una esfera $\mathbb{S}^2$*;*

(2) una suma conexa $\mathbb{T}^2 \sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp \mathbb{T}^2$*;*

(3) una suma conexa $\mathbb{RP}^2 \sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp \mathbb{RP}^2$.

1.5. Problemas

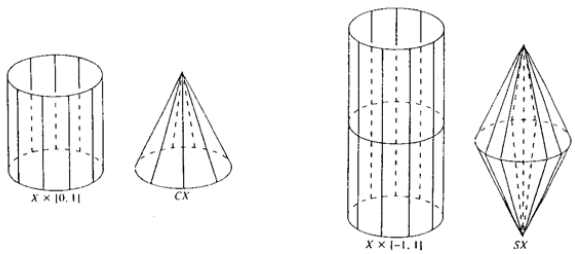
1.- Probar los siguientes espacios son conexos por caminos

(i) los espacios indiscretos;

(ii) las n–variedades conexas;

(iii) el *cono* de un espacio topológico X: sobre $X \times [0,1]$, se considera la relación de equivalencia $(x,1) \sim (y,1)$, para $x, y \in X$. El cociente bajo esta relación, $C(X)$, es el *cono* de X. X se identifica con el subespacio $X \times \{0\}$ de $C(X)$;

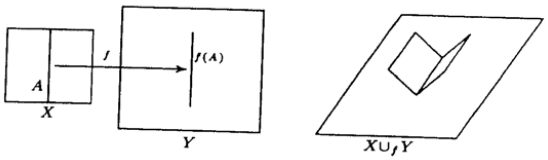
(iv) la *suspensión* de un espacio X: sobre $X \times [-1,1]$, se considera la relación de equivalencia $(x,1) \simeq (y,1)$ y $(x,-1) \simeq (y,-1)$, para $x, y \in X$. El cociente $S(X)$ (que también puede verse como un cociente de $C(X)$) se llama *suspensión* de X.



2.- Probar que la unión de cualquier familia de conjuntos conexos por caminos con un punto en común, es un conjunto conexo por caminos.

3.- Si X es un espacio topológico, se denota por $\pi_0(X)$ el conjunto de las componentes conexas por caminos. Dada una función continua $f\colon X \longrightarrow Y$, se define la aplicación $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(Y)$ que lleva una componente conexa por caminos C en X en la única componente conexa por caminos en Y que contiene al conjunto $f(C)$. Demostrar que $\pi_0\colon \mathfrak{Top} \longrightarrow \mathfrak{Set}$ es un functor covariante.

4.- Sean X e Y espacios topológicos, $A \subset X$ y $f\colon A \longrightarrow Y$ continua. Se denota por $X \cup_f Y$ al cociente de la suma disjunta de $X \sqcup Y$ por la relación de equivalencia que identifica $x \in A$ con $f(x) \in Y$. Se dice también que se ha adjuntado X a Y a través de f.



Se pide probar

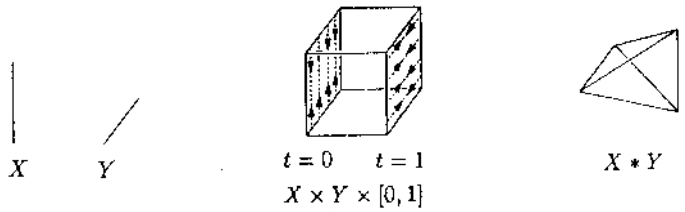
(i) Y se puede pensar como un subespacio de $X \cup_f Y$, con lo que hay una copia homeomorfa de Y en $X \cup_f Y$;

(ii) si X e Y son espacios compactos y Hausdorff, A es cerrado en X y $f\colon A \longrightarrow Y$ es continua, entonces $X \cup_f Y$ es compacto y Hausdorff;

(iii) si A es cerrado y se adjunta X a $Y = \{y_0\}$ por la aplicación constante $f(A) = y_0$, entonces el espacio de adjunción asociado es homeomorfo al cociente X/A;

(iv) comprobar que el cono de X se obtiene adjuntando $X \times [0,1]$ a $Y = \{y_0\}$, a través de la aplicación constante $f\colon X \times \{1\} \longrightarrow Y$. Y la suspensión de X, se obtiene adjuntando $X \times [-1,1]$ a $Y = \{a,b\}$, a través de la aplicación continua $g\colon X \times \{-1,1\} \longrightarrow Y$ que lleva $g(X \times \{1\}) = a$ y $g(X \times \{-1\}) = b$;

(v) si se adjunta $X \times [0,1] \times Y$ a la unión disjunta $X \sqcup Y$ a través de la aplicación continua $f\colon X \times \{0,1\} \times Y \longrightarrow X \sqcup Y$ definida por $f(x,0,y) = x$ y $f(x,1,y) = y$, se obtiene el *join*, $X * Y$ de X e Y.



Comprobar que $X * \{x_0\}$ es homeomorfo al cono de X y que $X * \mathbb{S}^0$ es homeomorfo a su suspensión;

(vi) si (X,x) e (Y,y) son espacios con puntos base, se define su *wedge*, $X \vee Y$, como el cociente de su suma disjunta $X \sqcup Y$, tras identificar los puntos base. Expresarlo como un espacio de adjunción;

(vii) supongamos que X, Y y W son espacios compactos Hausdorff y A es un subconjunto cerrado de X. Sea $f\colon A \longrightarrow Y$ continua y $g\colon X \sqcup Y \longrightarrow W$ continua y sobreyectiva. Si para cada $w \in W$, $g^{-1}(w)$ es o bien un punto de $X - A$ o bien la unión de un punto $y \in Y$ con $f^{-1}(y) \subset A$, probar que entonces W es homeomorfo a $X \cup_f Y$.

1.6. Problemas adicionales

1.- Para cada una de las siguientes presentaciones de superficies, aplicar el algoritmo del teorema de clasificación y determinar de que superficie se trata

(i) $\langle a, b, c \mid abacb^{-1}c^{-1}\rangle$; (ii) $\langle a, b, c \mid abca^{-1}b^{-1}c^{-1}\rangle$;

(iii) $\langle a, b, c \mid abca^{-1}b^{-1}c\rangle$; (iv) $\langle a, b, c \mid ab^{-1}c^{-1}a^{-1}cb\rangle$;

(v) $\langle a, b, c \mid abc^{-1}bca\rangle$; (vi) $\langle a, b, c, d, e, f \mid abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa\rangle$;

(vii) $\langle a, b, c, d, e, f, g \mid afg^{-1}e^{-1}b^{-1}bec^{-1}cgd^{-1}df^{-1}a^{-1}\rangle$;

(viii) $\langle a, b, c, d, e, f \mid ab^{-1}cedefa^{-1}bc^{-1}d^{-1}f\rangle$;

(ix) $\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o \mid abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1},$

$i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1}\rangle$.

2.- Probar las siguientes propiedades para superficies

(i) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos cilindros $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ a través de la aplicación identidad que identifica sus círculos frontera;

(ii) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ a través de la aplicación identidad entre los toros frontera $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

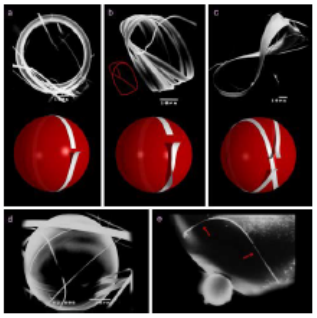
(iii) $\mathbb{S}^3$ es homeomorfo al espacio de adjunción de dos toros sólidos $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ a través de la aplicación entre los toros frontera que intercambia los meridianos y paralelos $h\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, definida por $h(x, y) = (y, x)$.

3.- La banda de Möbius

En $[0, 1]^2$ se identifican $(0, y) \simeq (1, 1 - y)$, para cada $y \in [0, 1]$. La *banda de Möbius* es el cociente $\mathbb{M} = [0, 1]^2/\simeq$, y es lo que se denomina una *superficie con borde*. Probar que si $p\colon [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{M}$ es la aplicación cociente, el subespacio de $\mathbb{M}$ definido por $p([0, 1] \times \{0, 1\})$ (llamado la *arista de la banda*) es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

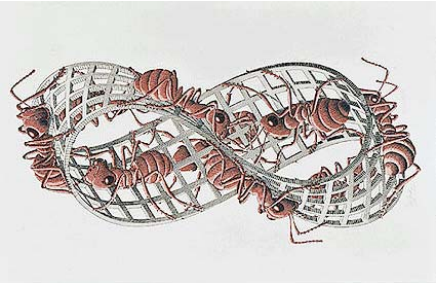
August Ferdinand Möbius (1790–1868) fue el creador de esta banda.
Este espacio topológico ha inspirado a artistas y hoy en día se usa en industria para alargar el tiempo de grabación en cintas de vídeo, o para reducir el desgaste en cintas transportadoras o de grabación.

S. Tanda y sus colegas de la Hokkaido University de Japón **http://exp-ap.eng.hokudai.ac.jp/˜ tanda/** han demostrado que los cristales - conjuntos ordenados de átomos, iones o moléculas - pueden crecer en forma de bandas, incluso añadiéndoles una torcedura. Estos investigadores han conseguido sintetizar el *niobium triselenide*, $NbSe_3$, primer cristal con estructura de banda de Möbius.

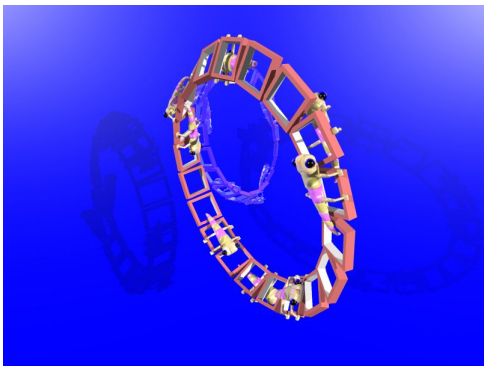


Hay además bandas de Möbius fabricadas con piezas de LEGO, construidas por Andrew Lipson (**http://www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/mathlego.htm**), cerveza de Möbius (**http://www.mobiusbeer.com/**),...

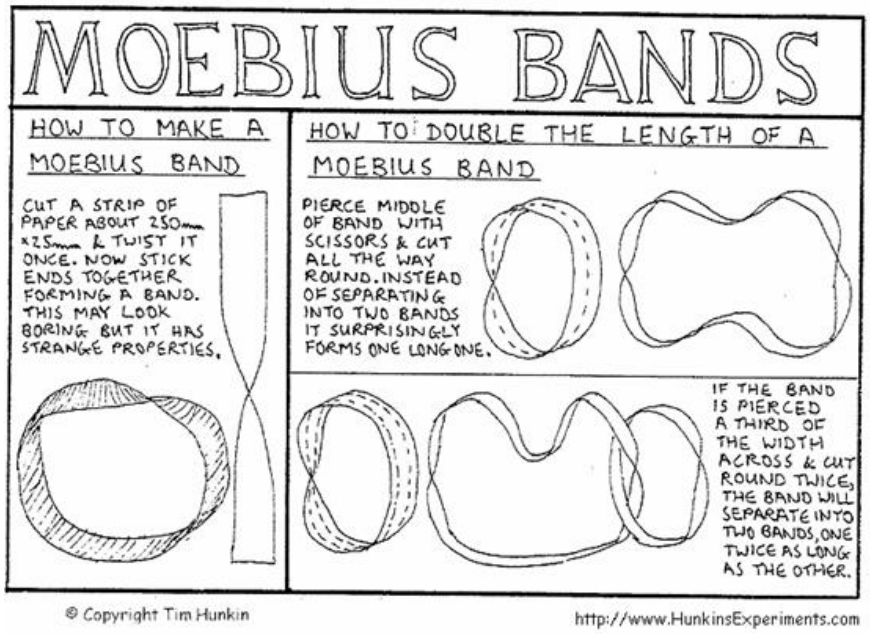
... bufandas hechas a ganchillo con cualidades excepcionales, hormigas de Escher que no consiguen pasar del *otro lado*,...



... imágenes como *Möbius mit Kriechtier*, © R. Wonisch (es una banda de Möbius con reptil, **http://www.rainerwonisch.de/mathematik_und_kunst_mit_povray.htm**), juegos infantiles de Möbius,...

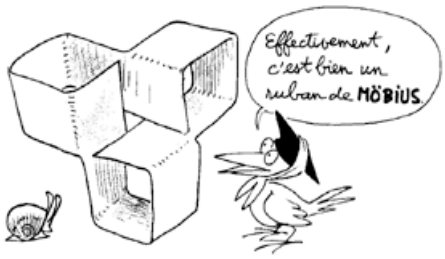


Debajo aparecen algunos experimentos realizados con la banda, de sorprendentes resultados

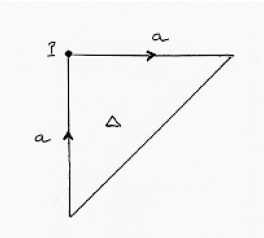


© Tim Hunkin, **http://www.HunkinsExperiments.com**

La banda de Möbius puede obtenerse de diversas maneras, como se ve en la portada del libro [Pe]...



... o en este ejemplo (que surge de un problema de elección social) de J.C. Candeal y E. Indurain, que aparece en *The Moebius strip and a social choice paradox*, Economics letters 45 (1994) 407-412.



4.- Una superficie es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möbius. En caso contrario se dice *no orientable*. Se pide probar

(i) la esfera $\mathbb{S}^2$ es orientable;

(i) la orientabilidad es una propiedad topológica, es decir, se preserva por homeomorfismos;

(ii) al contrario que las superficies no orientables, toda superficie orientable puede embeberse en $\mathbb{R}^3$.

5.- El toro
Sea la aplicación $f\colon [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, definida por

$$f(s,t) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Se pide probar

(i) f pasa al cociente dado por la definición 1.11, de donde se deduce que el toro $\mathbb{T}^2$ es homeomorfo al producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

(ii) el toro (y cualquier suma conexa de toros) es una superficie orientable.

6.- La botella de Klein
Se pide probar que

(i) la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ es homeomorfa al espacio de adjunción de dos bandas de Möbius por la aplicación identidad que identifica sus aristas (ver problema **3**);

(ii) deducir que la botella de Klein es no orientable;

(iii) $\mathbb{K}^2$ no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$, pero si en $\mathbb{R}^4$: la función $f\colon [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y) = \big((1+|x|)\cos(\pi y), (1+|x|)\sin(\pi y), \sin(\pi x)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \sin(\pi x)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\big)$, es continua y pasa al cociente dado por la definición 1.13.

Félix Klein (1849–1925) fue el creador de esta sorprendente superficie.
Debajo se muestran algunas de las magnificas obras de Cliff Stoll, que aparecen **http://www.kleinbottle.com/**

Jacques Rouxel (1931–2004), dibuja y supervisa en 1968 la serie de dibujos animados *S*hadoks (52 episodios, ORTF).
Para más información, ver
http://www.koikadit.net/JRouxel/jrouxel.html

7.- El plano proyectivo real
Se pide probar que

(i) el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ es homeomorfo al espacio de adjunción de una banda de Möbius y un disco por la aplicación identidad que identifica sus fronteras;

(ii) deducir que $\mathbb{RP}^2$ (y cualquier suma conexa de planos proyectivos) es no orientable;

(iii) el plano proyectivo real no puede embeberse en $\mathbb{R}^3$, pero si en $\mathbb{R}^4$: se considera la función continua $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, yz, xz)$. La imagen por f de dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ es el mismo punto de $\mathbb{R}^4$, por lo que esta función pasa al cociente dado por el lema 1.7, definiendo un embebimiento del $\mathbb{RP}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

8.- Característica de Euler y género de una superficie
Aunque hemos demostrado en el teorema 1.13 que toda superficie conexa y compacta es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de toros o de planos proyectivos, no sabemos si estos tipos de superficies son topológicamente distintos. En otras palabras ¿podría suceder si m y n son enteros positivos, la suma conexa de n toros fuera homeomorfa a la suma conexa de m toros? Para demostrar que esto no es posible introducimos un invariante numérico, llamado *característica de Euler*, y que tiene sus raíces en la conocida

fórmula de Euler que afirma que "*si P es un poliedro convexo en el espacio, con f caras, e aristas y v vértices, entonces $v - e + f = 2$*".
Esta fórmula puede generalizarse a superficies compactas arbitrarias, del modo siguiente

Definición 1.15. Si M es una superficie con una presentación P dada, se define la *característica de Euler* de la presentación como $\chi(P) = v - e + f$, donde v es el número de vértices, e el de aristas y f el de caras de P, tras las identificaciones que definen la superficie.

Se pide probar

(i) $\chi(P)$ depende sólo de M, es decir, es invariante por las transformaciones de la proposición 1.11, con lo que queda definida la *característica de Euler* de M, $\chi(M)$ como la de cualquier presentación de la superficie;

(ii) *teorema de invariancia topológica* de la característica de Euler: sea M una superficie compacta sin borde y conexa, entonces

1) si M es homeomorfa a la esfera, es $\chi(M) = 2$,

2) si M es homeomorfa a la suma conexa de n toros, es $\chi(M) = 2 - 2n$,

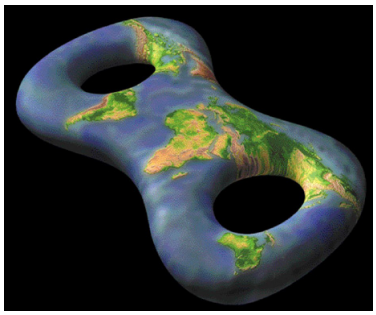
3) si M es homeomorfa a la suma conexa de n planos proyectivos, entonces es $\chi(M) = 2 - n$;

(iii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, entonces $\chi(M_1 \sharp M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.

Observar que la característica de Euler de la suma conexa de n toros coincide con la de la suma conexa de $2n$ planos proyectivos: la orientación permite distinguir estos dos casos.

Además, es fácil comprobar que una superficie es no orientable cuando tiene alguna presentación P, donde aparecen dos símbolos consecutivos de la forma $\langle a, a_1, ..., a_n / W_1, ..., aa \rangle$.

$\mathbb{T}^2 \sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp \mathbb{T}^2$ se llama *superficie compacta de género* n y $\mathbb{RP}^2 \sharp \overset{(n)}{\cdots} \sharp \mathbb{RP}^2$ *superficie compacta no orientable de género* n. La esfera es la única superficie orientable de género 0.



La anterior figura está extraída de un cartel realizado con motivo del Año Mundial de las Matemáticas 2000, por el Centre Sciences (**http://www.centre-sciences.asso.fr**).

Se pide probar

(i) la relación entre el género $g(M)$ de una superficie M y su característica de Euler es

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) & \text{si} \quad \text{M es orientable;} \\ 2 - \chi(M) & \text{si} \quad \text{M es no orientable.} \end{cases}$$

(ii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, M_1 es homeomorfa a M_2, si y sólo si son ambas orientables o no orientables y $\chi(M_1) = \chi(M_2)$: éste es un teorema topológico por excelencia, que reduce el problema de clasificación de superficies compactas a la determinación de la orientabilidad y la característica de Euler, problemas que son ambos fácilmente resolubles;

(iii) si M_1 y M_2 son superficies compactas, M_1 es homeomorfa a M_2, si y sólo si son ambas orientables o no orientables y$g(M_1) = g(M_2)$.

Homotopía de aplicaciones

Mientras haya
trasluces en la tiniebla,
claridades en secreto,
noches que lo son apenas.

"Confianza"
Pedro Salinas (1892-1951)

El problema central de la *Topología* es el de decidir si dos espacios topológicos son o no homeomorfos. En *Topología Algebraica*, se usa el siguiente modelo de procedimiento para solucionar esta cuestión: dado un espacio topológico X, se le asocia un objeto algebraico $A(X)$, de modo que si Y es otro espacio homeomorfo a X, el objeto algebraico $A(Y)$ adjudicado a Y por el mismo procedimiento resulta ser isomorfo a $A(X)$. Es decir, $A(.)$ es lo que se llama un *invariante topológico*. Así, estos objetos algebraicos permiten detectar cuando estos dos espacios topológicos no son homeomorfos, si los invariantes asociados a uno y al otro no son isomorfos. Se pasa de objetos topológicos a algebraicos, porque estos últimos son *más sencillos* de manejar, más *computables*.

La homotopía, que introducimos a continuación, es el invariante topológico más conocido y utilizado.

2.1. Homotopía de aplicaciones

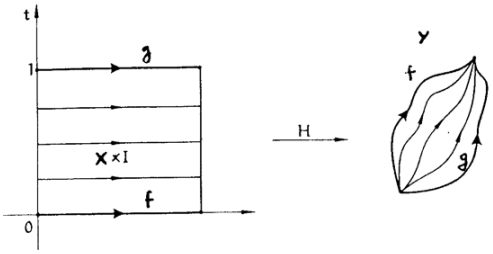
Definición 2.1. Sean X e Y espacios topológicos y $A \subset X$. Si $f, g\colon X \longrightarrow Y$ son aplicaciones continuas, tales que $f|_A = g|_A$, se dice que f y g son *homótopas relativamente a* A, si existe una aplicación continua, $H\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$, tal que

(i) $H(x,0) = f(x)$, para cada $x \in X$,

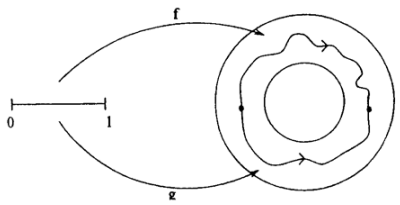
(ii) $H(x,1) = g(x)$, para cada $x \in X$,

(iii) $H(x,t) = f(x) = g(x)$, para cada $x \in A$ y $t \in [0,1]$.

Se expresa del modo $H : f \simeq g(\text{rel } A)$. Si $A = \emptyset$, se escribe $H : f \simeq g$, y se dice que f y g son *homótopas* (o *libremente homótopas*).



Observación 2.1. Si para $t \in [0,1]$ se define la aplicación continua $h_t \colon X \longrightarrow Y$ por la fórmula $h_t(x) = H(x,t)$, la homotopía H da lugar a una familia uniparamétrica $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ de funciones continuas, *transformando* de manera continua $h_0 = f$ en $h_1 = g$. La función h_t puede pensarse como la deformación en el instante t.



Ejemplos 2.1. Para ilustrar esta definición se tienen los ejemplos siguientes

(i) dadas las funciones continuas $1_{\mathbb{R}}, f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $f(x) = x^2$, la aplicación continua $H \colon \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x,t) = x^2(1-t) + tx$, es una homotopía entre ambas;

(ii) dada la función $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, definida por $f(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$, la aplicación $H \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, dada por $H(s,t) = (\cos(2\pi st), \sin(2\pi st))$ es una homotopía entre la aplicación constante igual a $(1,0)$ y f.

Observación 2.2. El ejemplo 2.1 (ii) prueba que el camino cerrado f alrededor del origen, es homótopo en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ a un camino constante, a pesar de que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tiene un *agujero* rodeado por f. Luego para detectar agujeros en X no es suficiente con estudiar los caminos cerrados homótopos a constantes: la solución a este problema, que veremos más adelante, será considerar *homotopías de caminos*, que dejan los extremos de la deformación fijos.

Teorema 2.1. *La homotopía (rel A) es una relación de equivalencia sobre el conjunto $C(X,Y)$ de las aplicaciones continuas de X en Y.*

Así, se puede hablar de *clases de homotopía (rel A)*, de aplicaciones continuas de X en Y. Se denota por $[f]_A$ (respectivamente, por $[f]$, si $A = \emptyset$) la clase de homotopía de $f(\text{rel } A)$. Y $[X,Y]_A$ (respectivamente, $[X,Y]$, si $A = \emptyset$) es la familia de dichas clases de homotopía.

2.2. La categoría de espacios topológicos y homotopías

Proposición 2.2. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $f_0, f_1 \colon X \longrightarrow Y$ y $g_0, g_1 \colon Y \longrightarrow Z$ aplicaciones continuas, tales que $f_0 \simeq f_1$(rel A), $f_0(A) = f_1(A) \subset B$ y $g_0 \simeq g_1$(rel B). Entonces, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$(rel A).*

Observación 2.3. Queda así definida una categoría, $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}$, la *categoría de homotopía*, donde

(i) los objetos son espacios topológicos,

(ii) los morfismos son las clases de homotopía (rel $\emptyset$) de aplicaciones entre estos espacios topológicos, es decir, $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}(X, Y) = [X, Y]$. La proposición 2.2 garantiza que la composición está bien definida, por $[g] \circ [f] = [g \circ f]$, para clases $[f] \in [X, Y]$ y $[g] \in [Y, Z]$.

Observación 2.4. En vez de trabajar con espacios topológicos, podríamos considerar pares de espacios topológicos (X, A). Y llegaríamos, de modo similar al anterior, a la categoría de pares de espacios y clases de homotopía de aplicaciones continuas entre pares de espacios. Pero, para nuestros intereses y por sencillez, es suficiente trabajar con $A = \emptyset$.

Definición 2.2. Una aplicación continua $f \colon X \longrightarrow Y$ es una *equivalencia de homotopía*, si existe otra aplicación continua $g \colon Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En tal caso, se dice que X tiene el *mismo tipo de homotopía* que Y, y se escribe $X \simeq Y$.

Lema 2.3. *La relación de* ser homotópicamente equivalentes *entre dos espacios topológicos es una relación de equivalencia.*

Observación 2.5. Las equivalencias de homotopía son precisamente los isomorfismos en $\mathfrak{h}\mathfrak{Top}$.

Proposición 2.4. *Si X e Y son homeomorfos, son homotópicamente equivalentes.*

Observación 2.6. El recíproco no es cierto, y se verán ejemplos más adelante.

Se trata, a partir de ahora, de construir functores $T \colon \mathfrak{Top} \longrightarrow \mathfrak{C}$, donde $\mathfrak{C}$ es una categoría algebraica como $\mathfrak{Group}$, $\mathfrak{Ab}$, etc., de modo que si $f \simeq g$, sea $T(f) = T(g)$. Esta propiedad transforma la teoría de homotopía en *valiosa*, porque garantiza que un problema algebraico en $\mathfrak{C}$, que proviene de uno topológico vía T, es más simple de resolver que la cuestión original.

Definición 2.3. Una aplicación continua $f \colon X \longrightarrow Y$ es *nulhomótopa*, si existe una aplicación constante $c \colon X \longrightarrow Y$, tal que $f \simeq c$.

Definición 2.4. Un espacio topológico X se dice *contráctil*, si la aplicación identidad 1_X es nulhomótopa. La función $H : 1_X \simeq c$ que define la homotopía se llama una *contracción*.

Ejemplo 2.1. Los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ son contráctiles.

Proposición 2.5. *Si Y es contráctil, dos aplicaciones continuas cualesquiera $f, g\colon X \longrightarrow Y$ son homótopas.*

Observación 2.7. En particular, si Y es contráctil, dos aplicaciones constantes de Y en sí mismo son homótopas, y a su vez homótopas a la identidad. Así, en un espacio contráctil, 1_Y es homótopa a cualquier aplicación constante sobre este espacio a través de una homotopía libre; esta propiedad no se extiende a homotopías relativas a subespacios arbitrarios A, como puede verse en [Sp], pág. 26.

Proposición 2.6. *Un espacio es contráctil si y sólo si posee el tipo de homotopía de un punto.*

Corolario 2.7. *Cualquier espacio homotópicamente equivalente a uno contráctil es también contráctil.*

Definición 2.5. Sea $A \subset X$ y la inclusión $i_A\colon A \longrightarrow X$. Se dice que A es

(i) un *retracto* de X, si existe una aplicación continua $r\colon X \longrightarrow A$, la *retracción*, tal que $r \circ i_A = 1_A$. Observar que r es siempre sobreyectiva;

(ii) un *retracto por deformación* de X, si existe una retracción $r\colon X \longrightarrow A$, verificando la condición $i_A \circ r \simeq 1_X$;

(iii) un *retracto por deformación fuerte de* X, si existe una retracción $r\colon X \longrightarrow A$, tal que $i_A \circ r \simeq 1_X$(rel A).

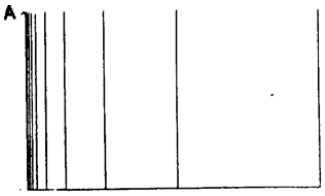
Proposición 2.8. *Si $A \subset X$ es un retracto por deformación de X, entonces $A \simeq X$.*

Observación 2.8. En la definición 2.5 se verifican las implicaciones (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i), pero los recíprocos no son ciertos, como lo prueban los siguientes contraejemplos

(i) $\not\Rightarrow$ (ii) dado un espacio X no contráctil y $p \in X$, $\{p\}$ es un retracto de X, pero no por deformación;

(ii) $\not\Rightarrow$ (iii) sean el *espacio peine* $X = \left(\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right) \times [0,1]\right) \cup ([0,1] \times \{0\})$ y

$A = \{(0,1)\} \subset X$. Entonces, A es un retracto por deformación de X, pero que no es fuerte.



2.3. Problemas

1.- $\pi_0 \colon \mathfrak{Top} \longrightarrow \mathfrak{Set}$ es un functor covariante. Además, si $f \simeq g$, es $\pi_0(f) = \pi_0(g)$.

2.- Una propiedad relativa a espacios topológicos es una *propiedad de homotopía*, si se conserva por equivalencias de homotopía. Probar

(i) toda propiedad de homotopía es una propiedad topológica;

(ii) la conexión, el número de componentes conexas por caminos (luego, la conexión por caminos) y la contractibilidad son propiedades de homotopía;

(iii) la convexidad (cuando tenga sentido), la compacidad y el axioma de Hausdorff, no son propiedades de homotopía.

3.- Probar las siguientes propiedades relativas a espacios contráctiles

(i) todo conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es contráctil;

(ii) todo espacio contráctil es conexo por caminos;

(iii) la imagen continua de un espacio contráctil no es en general contráctil;

(iv) un retracto de un espacio contráctil es también contráctil;

(v) X es contráctil si y sólo si todo átomo $\{x\}$ es un retracto por deformación de X.

4.- Probar las siguientes propiedades relativas a retractos

(i) $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ es el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$);

(ii) el ecuador de $\mathbb{S}^n$ es un retracto por deformación de $\mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\}$ ($\mathbf{N}$ es el polo norte y $\mathbf{S}$ el polo sur);

(iii) el disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$, es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^n$;

(iv) $\mathbb{S}^1$ es un retracto por deformación de $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(v) la figura de ocho $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ ó } (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^2 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$;

(vi) dados los conjuntos $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2$, definidos por $X = \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ y $Z = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, se cumple que X es un retracto por deformación de $X \cup Y$. No sucede lo mismo con $X \cup Z$, aunque de momento no podemos probarlo.

5.- Probar las siguientes propiedades relativas a conos de espacios

(i) el cono de cualquier espacio topológico es un espacio contráctil. Concluir que todo espacio topológico puede embeberse en un espacio contráctil;

(ii) una aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ es nulhomótopa si y sólo si posee una extensión continua al cono de X.

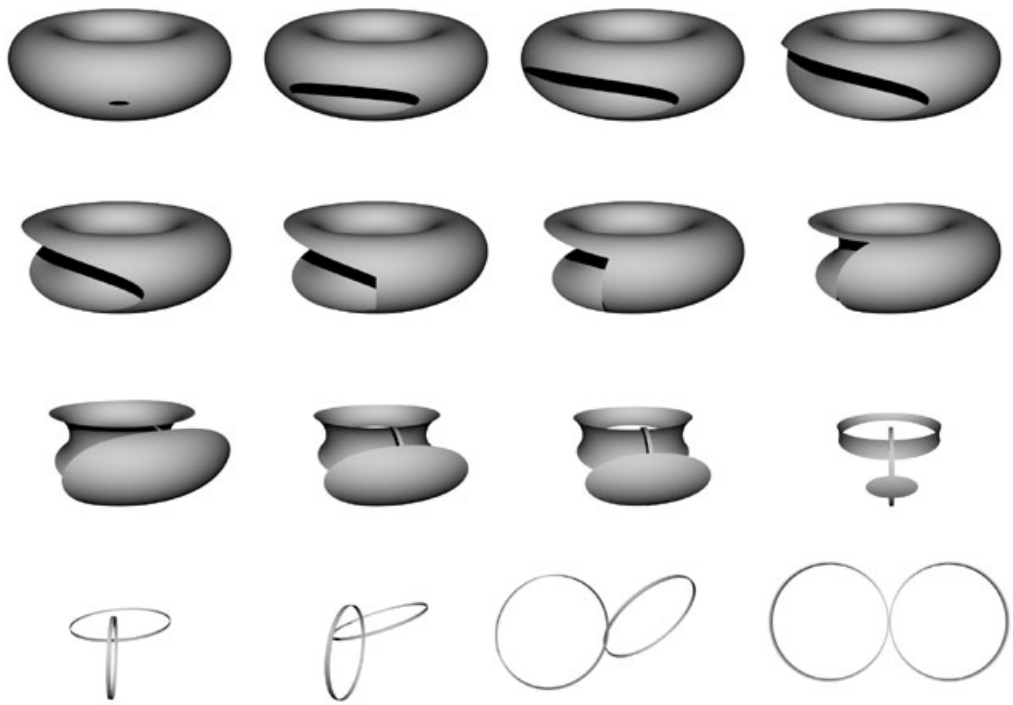
6.- Probar las siguientes propiedades relativas a la banda de Möbius $\mathbb{M}$

(i) el ecuador de la banda de Möbius es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{M}$;

(ii) concluir que $\mathbb{S}^1$ tiene el mismo tipo de homotopía que $\mathbb{M}$;

(iii) deducir que $\mathbb{M}$ y el cilindro son homotópicamente equivalentes.

7.- Sea X el complementario de un punto en el toro $\mathbb{T}^2$. Probar que existe un subconjunto de X homeomorfo a la figura de ocho, y que es un retracto por deformación fuerte de X.



Torus into 8, © Josh Levenberg. **http://www.technomagi.com/josh/images/index.html**

8.- Se pide probar

(i) si $f, g\colon X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ son dos aplicaciones continuas tales que $f(x) \neq -g(x)$ para cada $x \in X$, entonces $f \simeq g$. Deducir que si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no sobreyectiva, entonces f es nulhomótopa;

(ii) si $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y sin puntos fijos, es homótopa a la aplicación antipodal;

(iii) si $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y $f(x) \neq -x$, para cada $x \in \mathbb{S}^n$, es homótopa a la identidad.

9.- Sea $p \in \mathbb{S}^n$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ continua. Probar que son equivalentes

(i) f es nulhomótopa;

(ii) f puede extenderse a una aplicación continua $F\colon \mathbb{D}^{n+1} \longrightarrow Y$;

(iii) f es homótopa (rel $\{p\}$) a la aplicación constante igual a $f(p)$.

Concluir que toda aplicación continua $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ con Y contráctil, tiene una extensión continua al disco $\mathbb{D}^{n+1}$.

10.- Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *estrella-convexo* si existe un punto $a_0 \in A$, tal que para cada $a \in A$, el segmento entre a y a_0 está contenido en A. Se pide probar

(i) todo conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ es estrella-convexo, pero el recíproco no es cierto;

(ii) todo conjunto estrella-convexo en $\mathbb{R}^n$ es contráctil.

11.- Probar las siguientes propiedades relativas a productos

(i) dos aplicaciones continuas $f, g\colon X \longrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_n$ son homótopas si y sólo si para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, es $p_i \circ f \simeq p_i \circ g$, donde $p_i\colon Y_1 \times \cdots \times Y_n \longrightarrow Y_i$ es la proyección canónica;

(ii) $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ es contráctil si y sólo si Y_i es contráctil para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

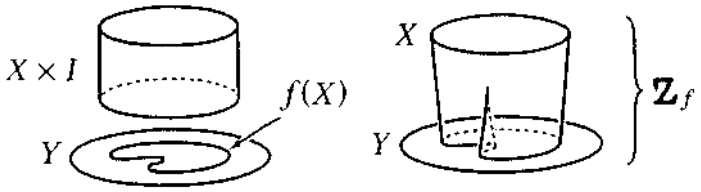
12.- Sean X e Y espacios topológicos. Probar que $[X, Y]$ tiene un único elemento en los siguientes casos

(i) Y es contráctil;

(ii) X es contráctil e Y conexo por caminos.

2.4. Problemas adicionales

1.- Sean X e Y espacios topológicos y $f\colon X \longrightarrow Y$ continua. Se define el *mapping cylinder* Z_f de f como el espacio cociente de la suma disjunta $(X \times [0,1]) \sqcup Y$ por la relación de equivalencia determinada por $(x,0) \sim f(x)$, para $x \in X$. Sea $q\colon (X \times [0,1]) \sqcup Y \longrightarrow Z_f$ la aplicación cociente.



Se pide probar

(i) si Y es un punto, entonces Z_f es el cono de X;

(ii) q lleva homeomórficamente Y sobre un subespacio cerrado $q(Y)$ de Z_f. Por medio de este embebimiento, Y puede considerarse como un subespacio cerrado de Z_f. Y $g\colon X \longrightarrow Z_f$ definida por $g(x) = q(x,1)$ lleva homeomórficamente X sobre el subespacio cerrado $q(X \times \{1\})$ de Z_f. Luego, X e Y pueden considerarse como subespacios disjuntos y cerrados de Z_f, y se llaman *dominio* y *rango* de Z_f, respectivamente;

(iii) probar que $q(Y)$ es un retracto por deformación fuerte de Z_f;

(iv) si f es una equivalencia de homotopía, probar que $q(X \times \{1\})$ es un retracto por deformación de Z_f;

(v) dos espacios son homotópicamente equivalentes si y sólo si son ambos homeomorfos a retractos por deformación de algún espacio;

(vi) toda aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ es homotópicamente equivalente a una aplicación inclusión $g\colon X \longrightarrow Z_f$;

(vii) las aplicaciones $g\colon X \longrightarrow Z_f$ y $q \circ f\colon X \longrightarrow Z_f$ son homótopas;

(viii) dadas dos aplicaciones continuas $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon X \longrightarrow Z$, son equivalentes

a) existe $h\colon Z \longrightarrow Y$ continua tal que $h \circ g \simeq f$;

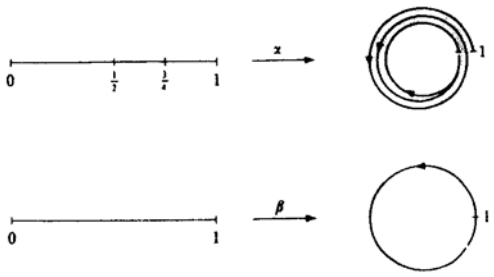
b) existe una aplicación continua $F\colon Z_g \longrightarrow Y$, tal que $F \circ i_X \simeq f$, donde la aplicación $i_X\colon X \longrightarrow Z_g$ es la inclusión del apartado (ii).

2.- En este problema, se trata de dar un ejemplo no trivial de espacio contráctil

(i) sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Se consideran los caminos α y β en $\mathbb{S}^1$, basados en el punto 1 y definidos por

$$\alpha(s) = \begin{cases} e^{4\pi i s} & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e^{4\pi i(2s-1)} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ e^{8\pi i(1-s)} & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y $\beta(s) = e^{2\pi i s}$. Geométricamente, α enrolla cada uno de los segmentos $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$ en la circunferencia, los dos primeros en sentido antihorario, y el tercero en sentido de las agujas del reloj. El lazo β enrolla $[0, 1]$ una sola vez en la circunferencia y en sentido antihorario. Probar que estos dos lazos son homótopos;

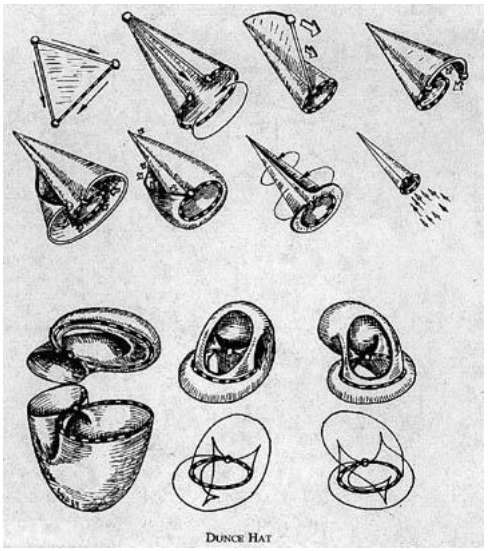


(ii) un espacio contráctil puede tener una apariencia *poco contráctil*: identificamos los lados de un triángulo *lleno*, como muestra la figura. Se obtiene así un espacio, llamado el *capelo del tonto*. Se trata de probar que este espacio es contráctil, aunque no es obvia la manera de contraerlo.

Se pide probar lo anterior siguiendo los pasos

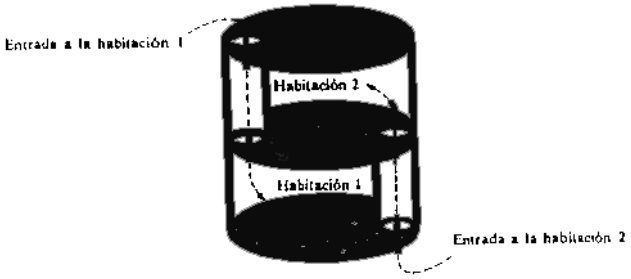
(a) si $f, g \colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ son aplicaciones continuas homótopas, los espacios obtenidos a partir de X uniéndole un disco utilizando f ó g ($X \cup_f \mathbb{D}^2$ y $X \cup_g \mathbb{D}^2$, respectivamente), son homotópicamente equivalentes;

(b) usando (a) y la parte (i) de este problema, probar que el *capelo del tonto* tiene el mismo tipo de homotopía que un disco, y por consiguiente es contráctil.

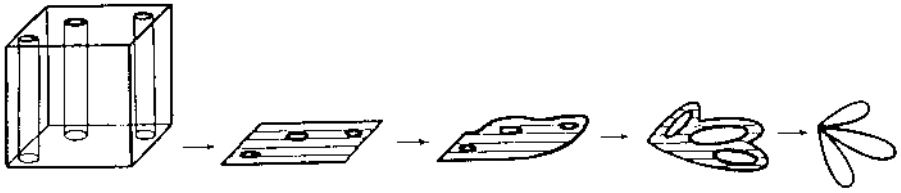


El anterior dibujo está extraído de [Fr], página 21.

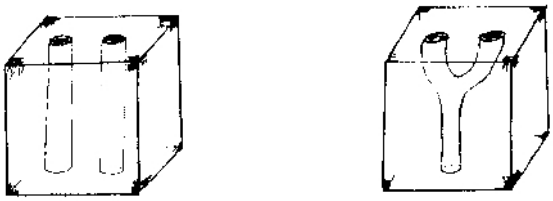
3.- Probar que *la casa con dos habitaciones* es contráctil. Forman parte del espacio las paredes laterales y las tres componentes conexas horizontales sombreadas.



4.- Probar que un cubo lleno $[0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ privado de tres cilindros tiene el tipo de homotopía de una rosa de tres pÉtalos, es decir, la unión por un punto de tres copias disjuntas de $\mathbb{S}^1$.



5.- ¿Son las dos figuras siguientes del mismo tipo de homotopía? Las figuras representan cubos macizos con dos *perforaciones* diferentes.



El grupo fundamental

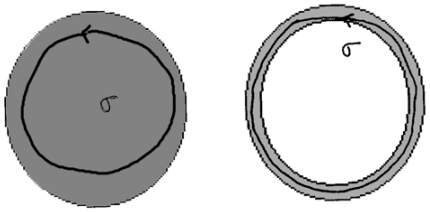
Soy un libro de nieve,
una espaciosa mano, una pradera,
un círculo que espera,
pertenezco a la tierra y a su invierno.

"Jardín de invierno"
Pablo Neruda (1904-1973)

En este capítulo, se trata de asociar un grupo topológicamente invariante a un espacio, es decir, de modo que grupos asociados a espacios topológicos homeomorfos sean isomorfos.

¿Qué propiedad topológica de un espacio permite distinguir un disco $\mathbb{D}^2$ de una corona circular? En otras palabras, ¿puede detectarse *el agujero* de la corona, sin utilizar para ello ideas que no sean puramente topológicas (como distancias, ángulos,...)? Una respuesta natural se obtiene al intentar contraer un camino cerrado en cada uno de los espacios.

Intuitivamente, en $\mathbb{D}^2$, todo camino cerrado puede llevarse a un punto (el camino constante), mientras que esto es imposible en la corona circular, en donde el agujero actúa de *barrera* para caminos cerrados que rodean a este agujero, impidiendo dicha contracción.



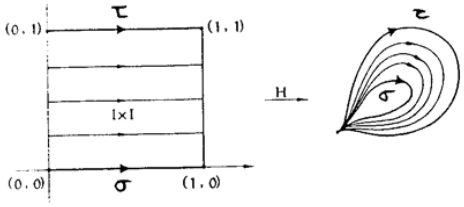
3.1. Homotopía de caminos

Definición 3.1. Dos caminos $\sigma, \tau\colon [0,1] \longrightarrow X$, tales que $\sigma(0) = \tau(0)$ y $\sigma(1) = \tau(1)$ se llaman *caminos homótopos* si $\sigma \simeq \tau(\text{rel}\{0,1\})$. La homotopía de caminos, es decir, la homotopía con extremidades fijas, se denota por $\sigma \sim \tau$.

Explícitamente, existe una homotopía $H\colon [0,1]\times[0,1]\longrightarrow X$ tal que

(i) $H(t,0)=\sigma(t)$ y $H(t,1)=\tau(t)$, para $t\in[0,1]$,

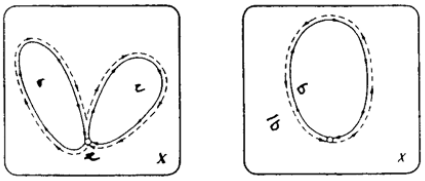
(ii) $H(0,s)=\sigma(0)$ y $H(1,s)=\sigma(1)$, para $s\in[0,1]$.



Ya sabemos que $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos en X, $C([0,1],X)$. Denotamos por $[\sigma]$ la clase de homotopía del camino σ.

Definición 3.2. Dados dos caminos $\sigma,\tau\colon [0,1]\longrightarrow X$, tales que $\sigma(1)=\tau(0)$, su *producto* es el camino

$$(\tau*\sigma)(t)=\begin{cases}\sigma(2t) & \text{si} \quad 0\le t\le \frac{1}{2};\\ \tau(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$



El camino opuesto de σ es $\overline{\sigma}(t)=\sigma(1-t)$.

Lema 3.1. *Sean $\sigma_0,\sigma_1,\tau_0,\tau_1$ caminos en X tales que $\sigma_0(1)=\tau_0(0)$, $\sigma_1(1)=\tau_1(0)$ y $\sigma_0\sim\sigma_1$, $\tau_0\sim\tau_1$. Entonces, $\tau_0*\sigma_0\sim\tau_1*\sigma_1$.*

Así, es posible multiplicar clases de caminos: si σ,τ son caminos, tales que $\sigma(1)=\tau(0)$, tiene sentido definir el producto de sus clases $[\sigma].[\tau]\overset{\text{def}}{=}[\tau*\sigma]$, es decir, la equivalencia de caminos es compatible con su producto.

Aunque la multiplicación de caminos no es asociativa, lo es el producto de sus clases, es decir, en las condiciones anteriores, es $([\sigma].[\tau]).[\gamma]=[\sigma].([\tau].[\gamma])$

Lema 3.2. *Sean σ,τ,γ caminos en X, tales que $\sigma(1)=\tau(0)$ y $\gamma(0)=\tau(1)$. Entonces, se verifica que $\gamma*(\tau*\sigma)\sim(\gamma*\tau)*\sigma$.*

Sea $\varepsilon_x\colon [0,1]\longrightarrow X$ el camino constante igual a x. Si $\sigma\colon [0,1]\longrightarrow X$ es un camino con origen el punto x y extremo el punto y, entonces

Lema 3.3. $\sigma*\varepsilon_x\sim\sigma\sim\varepsilon_y*\sigma$.

Con esto, hemos probado que $[\varepsilon_x].[\sigma]=[\sigma]=[\sigma].[\varepsilon_y]$, es decir, $[\varepsilon_x]$ es el neutro a izquierda de $[\sigma]$ y $[\varepsilon_y]$ es su neutro a derecha.

Lema 3.4. *Si σ y τ son caminos tales que $\sigma(0)=\tau(0)$, $\sigma(1)=\tau(1)$ y $\sigma\sim\tau$, es $\overline{\sigma}\sim\overline{\tau}$.*

La clase $[\overline{\sigma}]$ actúa como inversa a izquierda y a derecha de $[\sigma]$, es decir, $[\overline{\sigma}].[\sigma]=[\varepsilon_y]$ y $[\sigma].[\overline{\sigma}]=[\varepsilon_x]$

Lema 3.5. *Si σ es un camino tal que $\sigma(0)=x$ y $\sigma(1)=y$, entonces $\overline{\sigma}*\sigma\sim\varepsilon_x$ y $\sigma*\overline{\sigma}\sim\varepsilon_y$.*

3.2. El grupo fundamental

Definición 3.3. Un camino $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$ se llama *cerrado* o *lazo*, si $\sigma(0) = \sigma(1)$. Si además $\sigma(0) = \sigma(1) = x$, se dice también que σ es un *lazo (o un camino) basado en* x.

Si $\Omega(X,x)$ es la familia de los lazos basados en x, es claro que el producto y la inversión de caminos son operaciones internas en este conjunto. Sobre $\Omega(X,x)$ se puede considerar la relación de homotopía de caminos. Si $\pi_1(X,x) = \Omega(X,x)/\sim$ es el cociente bajo esta relación, los anteriores resultados prueban que

Teorema 3.6. *$\pi_1(X,x)$ es un grupo, llamado* grupo fundamental de X en x o grupo de Poincaré de X en x.

Si se cambia el punto base, los grupos correspondientes no guardan, a priori, ninguna relación

Ejemplo 3.1. Si consideramos el subespacio del plano euclídeo $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(0,0)\}$, veremos más adelante que $\pi_1(X,(1,0)) \simeq \mathbb{Z}$ y claramente $\pi_1(X,(0,0)) \simeq 0$.

Sin embargo, se verifica que

Teorema 3.7. *Si $x, y \in X$ y σ es un camino que une x e y, entonces el homomorfismo de grupos $\varphi_\sigma\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,y)$, definido por $\varphi_\sigma([\tau]) = [\sigma * \tau * \overline{\sigma}]$, es un isomorfismo.*

Corolario 3.8. *Si X es conexo por caminos, el grupo fundamental $\pi_1(X,x)$ no depende del punto $x \in X$. En tal caso, se escribe $\pi_1(X)$, y se habla del grupo de Poincaré de X.*

¿Qué efecto ejerce una aplicación continua entre espacios topológicos sobre los grupos fundamentales correspondientes? Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ continua. Si σ, τ son dos caminos en X, son obvias las siguientes propiedades

(i) $f \circ \sigma$ es un camino en Y,

(ii) si $\sigma \in \Omega(X,x)$, entonces $f \circ \sigma \in \Omega(Y, f(x))$,

(iii) dada la homotopía $H : \sigma \sim \tau$, entonces $f \circ H : f \circ \sigma \sim f \circ \tau$.

Luego, si $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$, es $[f \circ \sigma] \in \pi_1(Y, f(x))$, y

Lema 3.9. *La aplicación $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ dada por $\pi_1(f)([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ es un homomorfismo de grupos, llamado* homomorfismo inducido por f.

Teorema 3.10. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ y $g\colon Y \longrightarrow Z$ son aplicaciones continuas, se verifica que*

(i) $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$, *(ii)* $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1(X,x)}$.

Observación 3.1. Así, el grupo fundamental proporciona una manera de pasar de la topología al álgebra: acabamos de probar que π_1 es un functor covariante de la categoría $\mathfrak{Top}_*$ en la categoría $\mathfrak{Group}$.

Corolario 3.11. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación inducida entre los grupos fundamentales, $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo para cada $x \in X$.*

Observación 3.2. Esto no significa que dos espacios con grupos de Poincaré isomorfos sean homeomorfos

(i) si X es un espacio discreto, una aplicación $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$ es continua si y sólo si es constante. Luego, $\Omega(X,x) = \{\varepsilon_x\}$ y $\pi_1(X,x) = 0$ para cada $x \in X$;

(ii) si X es un espacio indiscreto, toda aplicación $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$ es continua. Así, en este caso, $\Omega(X,x) = \{\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X : \sigma(0) = x = \sigma(1)\}$. Para cada $\sigma, \tau \in \Omega(X,x)$, es $\sigma \sim \tau$. Luego, $\pi_1(X,x) = 0$ para todo $x \in X$.

Dos aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo sobre grupos fundamentales, salvo un automorfismo interior, que se comprende por el hecho de que dos aplicaciones homótopas pueden enviar el punto base de X en distintos puntos base de Y

Teorema 3.12. *Sean $f, g\colon X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas, $H : f \simeq g$ una homotopía y $x \in X$. Sea $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow Y$ el camino dado por $\sigma(t) = H(x,t)$. Entonces, se cumple que $\pi_1(g) = \varphi_\sigma \circ \pi_1(f)$, donde φ_σ es el isomorfismo inducido por σ, según el teorema 3.7.*

Corolario 3.13. *Si dos espacios conexos por caminos tienen el mismo tipo de homotopía, entonces tienen grupos fundamentales isomorfos.*

Corolario 3.14. *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) si A es un retracto por deformación de X y $a \in A$, entonces la inclusión $i_A\colon A \longrightarrow X$ induce un isomorfismo entre $\pi_1(A,a)$ y $\pi_1(X,a)$;

(ii) todo espacio contráctil tiene grupo fundamental trivial.

Definición 3.4. Si X es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es trivial, se dice que X es *simplemente conexo*.

Observación 3.3. El corolario 3.14 (ii), dice que un espacio contráctil es simplemente conexo. El recíproco no es cierto: si $n > 1$, $\mathbb{S}^n$ no es contráctil, pero es simplemente conexo; esto no podremos comprobarlo hasta el último capítulo.

Teorema 3.15. *Sean X e Y espacios, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ y las proyecciones coordenadas $p_X\colon X \times Y \longrightarrow X$, $p_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$. El homomorfismo*

$$\varphi\colon \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

definido por $\varphi = (\pi_1(p_X), \pi_1(p_Y))$, es un isomorfismo.

Observación 3.4. El producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.

3.3. Teorema de Seifert–Van Kampen

El **teorema de Seifert–Van Kampen** es clave para el cálculo de muchos grupos fundamentales

Teorema 3.16. *Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos conexos por caminos y $U \cap V$ es no vacío y conexo por caminos. Si $x_0 \in U \cap V$, entonces, $\pi_1(X, x_0)$ es el* producto amalgamado de los grupos $\pi_1(U, x_0)$ y $\pi_1(V, x_0)$, por el subgrupo $\pi_1(U \cap V, x_0)$,

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0).$$

Según el teorema 3.16, todo camino en X basado en x_0 se puede reescribir como un producto de lazos basados en x_0, cada uno de los cuales *vive* en U o en V. Así pues, un tal camino en X puede expresarse como un elemento del producto libre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$. Un lazo en $U \cap V$ representa sólo una clase de $\pi_1(X, x_0)$, aunque puede verse como copia de dos elementos distintos del producto libre, uno en $\pi_1(U, x_0)$ y otro en $\pi_1(V, x_0)$. Así, $\pi_1(X, x_0)$ puede comprenderse como el cociente de este producto libre por algunas relaciones de $\pi_1(U \cap V, x_0)$ que manifiestan justamente esta redundancia.

Corolario 3.17. *En las condiciones del teorema 3.16, si U y V son simplemente conexos y $U \cap V$ es conexo por caminos, entonces X es simplemente conexo.*

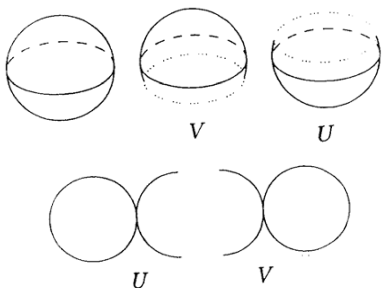
Corolario 3.18. *En las condiciones del teorema 3.16, si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el producto libre $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.*

Teorema 3.19. *En las condiciones del teorema 3.16, si V es simplemente conexo, $\pi_1(X, x_0)$ es el cociente de $\pi_1(U, x_0)$ por el menor subgrupo normal que contiene a $\pi_1(U \cap V, x_0)$.*

Ejemplos 3.1. Como aplicación del teorema de Seifert–Van Kampen, se obtiene

(i) $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa, para $n > 1$: si **N** y **S** son el polo norte y el polo sur, respectivamente, basta con aplicar el teorema 3.16 a los dos abiertos $U = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{N}\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{\mathbf{S}\}$;

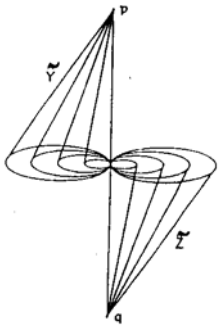
(ii) $\pi_1(\mathbf{8})$ es el grupo libre con dos generadores, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.



Observación 3.5. A pesar del resultado dado en el corolario 3.17, la unión de dos conjuntos simplemente conexos con un punto en común no es simplemente conexo en general, como lo prueba el siguiente ejemplo: para cada $n \in \mathbb{N}$, sean las circunferencias

$$Y_n = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

$$Z_n = \left\{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{n} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}.$$



Sean $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$, $\widetilde{Y}$ el cono de base Y y vértice $(0, 0, 1)$ y $\widetilde{Z}$ el cono de base Z y vértice $(0, 0, -1)$. $\widetilde{Y}$ y $\widetilde{Z}$ son contráctiles, luego simplemente conexos, $\widetilde{Y} \cap \widetilde{Z} = \{(0, 0, 0)\}$ y $X = \widetilde{Y} \cup \widetilde{Z}$ no es simplemente conexo.

3.4. Grupo fundamental de la esfera

El argumento dado en el ejemplo 3.1 (i) no es válido para la esfera $\mathbb{S}^1$, pues la intersección obtenida no es conexa por caminos. Por ello, el cálculo del grupo fundamental de este espacio debe hacerse directamente, utilizando las propiedades especiales de la esfera.

El producto de números complejos, define una estructura de grupo topológico sobre la esfera unidad $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| = 1\}$.

El punto de partida para calcular $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es la *aplicación exponencial*, $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, definida por $\exp(t) = e^{2\pi i t}$. La igualdad $e^{2\pi i(s+t)} = e^{2\pi i s} e^{2\pi i t}$, que expresa de manera resumida las fórmulas clásicas del coseno y el seno de una suma, afirma que la sobreyección continua $\exp$ es además un homomorfismo del grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ sobre el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1, $(\mathbb{S}^1, .)$. El núcleo de este homomorfismo es $\mathbb{Z}$.

Además de estas cualidades algebraicas, $\exp$ verifica las siguientes propiedades topológicas

Lema 3.20. *La aplicación* $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *es continua, sobreyectiva y abierta.*

Proposición 3.21. *La restricción de* $\exp$ *a cualquier intervalo de amplitud 1* $(t, t+1)$*, es un homeomorfismo sobre* $\mathbb{S}^1 - \{\exp(t)\}$.

Sea $\sigma\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ un camino: para $s \in [0, 1]$, existe $\widetilde{s} \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(s) = \exp(\widetilde{s})$. El problema es que $\widetilde{s}$ no está determinado de modo único a partir de s. El objetivo ahora es probar que para cada $s \in [0, 1]$, es posible elegir $\widetilde{s} \in \mathbb{R}$ de modo que $\sigma(s) = \exp(\widetilde{s})$ y que la función $\widetilde{\ } : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que lleva s en $\widetilde{s}$, sea continua.

Comencemos por el **lema de levantamiento de caminos**

Lema 3.22. *Para todo camino* $\sigma\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$*, con* $\sigma(0) = \exp(0) = 1$*, existe un único camino* $\widetilde{\sigma}\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $\widetilde{\sigma}(0) = 0$ *y* $\exp \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$*. El camino* $\widetilde{\sigma}$ *se llama un* levantamiento de σ.

El siguiente se conoce como **lema de levantamiento de homotopías**

Lema 3.23. *Sean $\sigma, \tau \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dos caminos, tales que $\sigma(0) = \tau(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$ y $H : \sigma \sim \tau$. Existe una única aplicación $\widetilde{H}$, tal que $H = \exp \circ \widetilde{H}$ y $\widetilde{H} : \widetilde{\sigma} \sim \widetilde{\tau}$, donde $\exp \circ \widetilde{\tau} = \tau$ y $\exp \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$.*

Definición 3.5. Sea $\sigma \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$, un camino cerrado basado en 1. Se define el *grado de σ*, por $deg(\sigma) = \widetilde{\sigma}(1)$, donde $\widetilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ con $\widetilde{\sigma}(0) = 0$.

Observación 3.6. Es claro que $\exp \circ \widetilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = 1$ y por lo tanto el grado de un camino cerrado $deg(\sigma) = \widetilde{\sigma}(1) \in ker(\exp) = \mathbb{Z}$.

Observación 3.7. En general, se puede definir $deg(\sigma) = \widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0)$, para $\widetilde{\sigma}$ un levantamiento arbitrario de σ. Y en tal caso, es $\exp\left(\widetilde{\sigma}(1) - \widetilde{\sigma}(0)\right) = 1$, es decir, $deg(\sigma) \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.8. El grado de un camino cerrado denota el *número líquido* de vueltas que un punto móvil $\sigma(t)$ recorre a lo largo de $\mathbb{S}^1$, cuando el tiempo t varía de 0 a 1. Donde *líquido* significa la diferencia entre el número de vueltas positivas (en el sentido antihorario) y el número de vueltas negativas (en el sentido de las agujas del reloj).

Teorema 3.24. *La* función índice, $ind \colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $ind([\sigma]) = deg(\sigma)$ es un isomorfismo de grupos.

De esta propiedad se deducen de manera inmediata

Corolario 3.25. *$\mathbb{S}^1$ no es simplemente conexo.*

Corolario 3.26. *Dos caminos cerrados en $\mathbb{S}^1$ basados en 1 son homótopos si y sólo si sus grados coinciden.*

Corolario 3.27. *$\mathbb{S}^1$ no es un retracto del disco $\mathbb{D}^2$.*

Y se deduce el **teorema del punto fijo de Brouwer**

Corolario 3.28. *Toda aplicación continua $f \colon \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ admite un punto fijo.*

Este resultado se generaliza al caso de discos de dimensiones mayores que dos: para probarlo se utiliza como herramienta que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{D}^n$, pero no se usan argumentos de homotopía para probarlo; lo haremos más adelante, con razonamientos de teoría de homología.

Lema 3.29. *Sea $f \colon \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación continua , tal que $f(1) = 1$. El camino en $\mathbb{S}^1$ definido por $\sigma(t) = f(\exp(t))$ posee grado 0.*

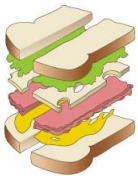
Veamos un *teorema de meteorología*: en cada instante, existen sobre la tierra puntos antipodales en los que la temperatura y la presión atmosférica son idénticos; es el **teorema de Borsuk–Ulam**

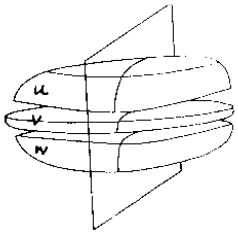
Teorema 3.30. *Sea $f\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Existen puntos antipodales en $\mathbb{S}^2$, tales que $f(z) = f(-z)$.*

Como consecuencia de lo anterior, se deduce que no es posible dibujar un mapa–mundi, de manera homeomorfa, sobre la página de un atlas

Corolario 3.31. *La esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfa a ningún subconjunto del plano euclídeo.*

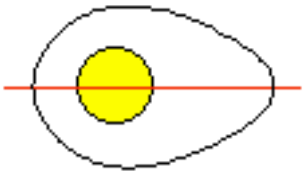
El siguiente resultado tiene que ver con la división de volúmenes por planos: es posible, con un único corte de cuchillo, dividir dos trozos de pan y uno de jamón, cada uno de ellos en dos mitades iguales, sin importar lo muy irregulares que puedan ser estas piezas, ni sus posiciones relativas; es el **teorema del bocadillo de jamón**





Teorema 3.32. *Sean U, V y W tres abiertos conexos y acotados de $\mathbb{R}^3$. Existe un plano que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas del mismo volumen.*

Una versión *simpática* de este teorema aparece en la página web que cubre diferentes problemas de matemáticas relacionados con los huevos **http://new.math.uiuc.edu/eggmath**.

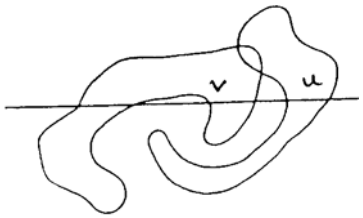


Supongamos que queremos dividir un huevo en dos partes, de modo que cada una de ellas contenga exactamente la misma cantidad de yema que de clara. Si el huevo fuera simétrico, una superficie de revolución, no habría problema y el cuchillo debería cortar a lo largo de cualquier plano incluyendo este eje, como muestra la primera figura. ¿Y qué sucede si el huevo tiene un aspecto como el de la segunda figura? ¿Se puede dividir un huevo frito en dos trozos con la misma cantidad de yema que de clara? El teorema de Borsuk–Ulam afirma que sí.

Los dos siguientes son los análogos en dimensión uno a los teoremas de Borsuk–Ulam y del bocadillo de jamón

Proposición 3.33. *Sea $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Existen puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^1$, tales que $f(x) = f(-x)$.*

Y se deduce el **teorema del pastel**

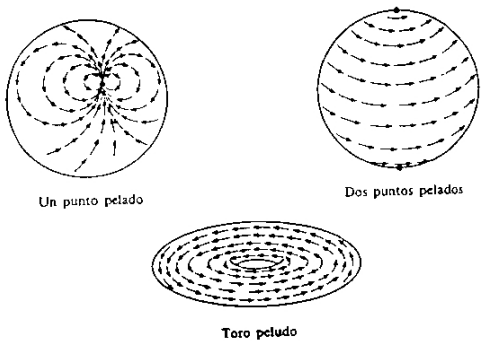


Teorema 3.34. *Sean U y V dos abiertos conexos y acotados de $\mathbb{R}^2$. Existe una recta que divide cada uno de estos subconjuntos en dos piezas de la misma área.*

La aplicación índice posee también algunas utilizaciones en el estudio de campos de vectores

Lema 3.35. *Sean el disco $\mathbb{D}^2_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$ y $X : \mathbb{D}^2_R \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo de vectores sin puntos singulares en su frontera. Si el camino $\sigma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1_R = fr(\mathbb{D}^2_R)$ definido por $\sigma(t) = X(R\exp(t))$ no es nulhomótopo, entonces X posee un punto singular en el interior de $\mathbb{D}^2_R$.*

Como consecuencia de este resultado, se prueba que existe siempre un punto sobre la superficie de la Tierra, en el cual el viento no sopla: es el **teorema de la bola peluda**



Teorema 3.36. *Todo campo de vectores tangente a $\mathbb{S}^2$ posee un punto singular.*

Este resultado es cierto para esferas de dimensión par arbitraria, como veremos más adelante, sin embargo, es posible *peinar* esferas peludas de dimensión impar y *toros peludos*.

3.5. Grupos de homotopía superiores

Existen análogos n–dimensionales del grupo fundamental. Son los grupos de homotopía de orden superior, $\pi_n(X, x_0)$, para $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in X$. En cierto sentido, los π_n miden los *agujeros de dimensión* n de X.

Los elementos de $\pi_1(X, x_0)$ son clases de homotopía de caminos en X basados en x_0. Como primer paso en la construcción de $\pi_n(X, x_0)$, hay que generalizar la noción de camino cerrado a la de *lazo n–dimensional*

Definición 3.6. un *n–lazo* en X basado en x_0 es una aplicación continua $\sigma : [0,1]^n \longrightarrow X$, que lleva la frontera de $[0,1]^n$ en x_0.

Se define el producto de dos n–lazos, $\beta * \alpha = \gamma$, como el n–lazo

$$\gamma(t_1,\dots,t_n)=\begin{cases}\alpha(2t_1,t_2,\dots,t_n) & \text{si} \quad 0\le t_1\le \frac{1}{2};\\ \beta(2t_1-1,t_2,\dots,t_n) & \text{si} \quad \frac{1}{2}\le t_1\le 1.\end{cases}$$

Definición 3.7. Dos n–lazos α y β basados en x_0 son *homótopos*, $\alpha\sim\beta$, si existe una aplicación continua $H\colon [0,1]\times[0,1]^n\longrightarrow X$, tal que

(i) $H(0;t_1,\dots,t_n)=\alpha(t_1,\dots,t_n)$, para $(t_1,\dots,t_n)\in[0,1]^n$,

(ii) $H(1;t_1,\dots,t_n)=\beta(t_1,\dots,t_n)$, para $(t_1,\dots,t_n)\in[0,1]^n$,

(iii) $H(s;t_1,\dots,t_n)=x_0$, para cada $s\in[0,1]$ y cada $(t_1,\dots,t_n)\in fr([0,1]^n)$.

Esta homotopía es una relación de equivalencia, y si se denota por $[\sigma]$ la clase de los n–lazos homótopos al n–lazo σ, se verifica

Lema 3.37. *Cuando tengan sentido los siguientes productos, se cumple*

(i) si $\alpha\sim\alpha'$ y $\beta\sim\beta'$, entonces $\beta*\alpha\sim\beta'*\alpha'$;

(ii) $(\alpha*\beta)*\gamma\sim\alpha*(\beta*\gamma)$;

(iii) si $\varepsilon\colon [0,1]^n\longrightarrow X$ se define por $\varepsilon(t_1,\dots,t_n)=x_0$, entonces $\varepsilon*\alpha\sim\alpha*\varepsilon\sim\alpha$;

(iv) si se define $\overline{\alpha}(t_1,t_2,\dots,t_n)=\alpha(1-t_1,t_2,\dots,t_n)$ y es $\alpha\sim\beta$, entonces $\overline{\alpha}\sim\overline{\beta}$;

(v) $\alpha*\overline{\alpha}\sim\overline{\alpha}*\alpha\sim\varepsilon$.

Observación 3.9. Queda así demostrado que las clases de homotopía de n–lazos basados en x_0 forman un grupo para el producto $[\beta].[\alpha]=[\alpha*\beta]$, el *grupo de homotopía de dimensión* n, $\pi_n(X,x_0)$.

Lema 3.38. *$\pi_n(X,x_0)$ es un grupo abeliano, para $n\ge 2$. Se trata además de un invariante topológico.*

Proposición 3.39. *Si X es conexo por caminos y $x_0,x_1\in X$, entonces $\pi_n(X,x_0)$ y $\pi_n(X,x_1)$ son isomorfos.*

Teorema 3.40. *Si X es contráctil, entonces $\pi_n(X,x_0)=0$ para cada $n>1$.*

Teorema 3.41. *Si X e Y son espacios, $x_0\in X$ e $y_0\in Y$, entonces*

$$\pi_n(X\times Y,(x_0,y_0))\simeq\pi_n(X,x_0)\oplus\pi_n(Y,y_0).$$

Observación 3.10. En general, es extremadamente difícil calcular los grupos de homotopía de orden superior. De hecho, incluso para esferas, su cálculo no está aún completamente hecho. A pesar de todo, pueden probarse resultados del tipo

(i) $\pi_n(\mathbb{S}^k) \simeq \pi_{n+1}(\mathbb{S}^{k+1})$, si $n, k > 1$;

(ii) $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$, si $n < k$;

(iii) $\pi_1(\mathbb{S}^k) = 0$, si $k > 1$;

(iv) $\pi_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$, si $n \geq 1$.

Algunos de los resultados conocidos son realmente sorprendentes

$\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$k=1$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$k=2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$k=3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\cdots$	$\cdots$
$k=4$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$2\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\cdots$
$k=5$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$2\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
$k=6$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$k=7$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_{60}$	$\mathbb{Z}_{120}$
$k=8$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_2$	$3\mathbb{Z}_2$
$k=9$	$\mathbb{Z}_2$	$2\mathbb{Z}_2$	$3\mathbb{Z}_2$	$3\mathbb{Z}_2$	$3\mathbb{Z}_2$	$4\mathbb{Z}_2$
$k=10$	$2\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{120} \oplus \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{72} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_2$

3.6. Problemas

1.- Sean X un espacio topológico, $A \subset X$, $i_A \colon A \longrightarrow X$ la inclusión natural y $r \colon X \longrightarrow A$ una retracción. Dado $a \in A$, demostrar

(i) $\pi_1(r) \colon \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a)$ es un epimorfismo;

(ii) $\pi_1(i_A) \colon \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ es un monomorfismo;

(iii) si r es una retracción por deformación, $\pi_1(i_A) \colon \pi_1(A, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$ es un isomorfismo.

2.- Sea X un espacio conexo por caminos, $a, b \in X$ y σ un camino uniendo estos puntos. Demostrar que $\pi_1(X, a)$ es abeliano si y sólo el isomorfismo $\varphi_\sigma \colon \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, b)$ definido por σ según el teorema 3.7, no depende de hecho de σ.

3.- Probar que si X es un espacio conexo por caminos, son equivalentes

(i) X es simplemente conexo,

(ii) dos aplicaciones cualesquiera $f, g \colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ son homótopas,

(iii) toda aplicación continua $f \colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ se extiende a la bola unidad cerrada $\mathbb{D}^2$.

4.- Probar las siguientes propiedades en el espacio topológico X

(i) si σ es un camino en X y $h\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces $\sigma \sim \sigma \circ h$;

(ii) si σ es un camino en X y $h\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua, tal que $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$, entonces $\overline{\sigma} \sim \sigma \circ h$.

5.- Sea X un espacio topológico, $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$ un camino y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ una partición de $[0,1]$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, definimos el camino $\sigma_j\colon [0,1] \longrightarrow X$ por $\sigma_j(s) = \sigma((1-s)t_{j-1} + st_j)$. Probar que $[\sigma] = [\sigma_n * \cdots * \sigma_1]$.

6.- Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y $c(x)$ la componente conexa por caminos que contiene a x. Probar que los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(c(x), x)$ son isomorfos. Por esta razón, basta con enunciar la mayoría de las propiedades de homotopía para espacios conexos por caminos.

7.- Sean $\sigma, \tau\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dos caminos cerrados. Se dice que σ y τ son *libremente homótopos*, si existe una homotopía libre entre ellos $H : \sigma \simeq \tau$, tal que $H(0,t) = H(1,t)$, para cada $t \in [0,1]$. Se pide probar

(i) si σ y τ son libremente homótopos, entonces $deg(\sigma) = deg(\tau)$;

(ii) si $deg(\sigma) = deg(\tau)$, entonces σ y τ son libremente homótopos. Además $\sigma \sim \tau$, cuando tienen el mismo punto base.

8.- Sea $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ el conjunto de las clases de homotopía libre de aplicaciones continuas $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. A cada $[f] \in [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$, se le asocia su *índice*, $ind([f]) = deg(f \circ \exp_0)$, donde $\exp_0\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es la aplicación exponencial $\exp_0(t) = e^{2\pi i t}$. Probar

(i) la aplicación índice, $ind\colon [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$, está bien definida y es biyectiva;

(ii) dada una aplicación continua $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, existe una función continua $\widetilde{f}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\exp \circ \widetilde{f} = f \circ \exp_0$. Esta aplicación está determinada salvo una constante aditiva de la forma $k \in \mathbb{Z}$, e $ind(f) = \widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0)$. Además, $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es nulhomótopa si y sólo si existe $\widehat{f}\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $f = \exp \circ \widehat{f}$.

9.- Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ e Y un espacio topológico tal que $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua. Probar que si f se puede extender a $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow Y$, entonces $\pi_1(f)$ es trivial.

10.- Probar que el conjunto de los puntos $z \in \mathbb{D}^2$ para los que $\mathbb{D}^2 - \{z\}$ es simplemente conexo es precisamente $\mathbb{S}^1 = fr(\mathbb{D}^2)$. Deducir que si $f\colon \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{D}^2$ es un homeomorfismo, entonces $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

11.- Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $a, b \in X$. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de caminos en X de a a b, con la métrica $\rho(\alpha, \beta) = \{\sup\{d(\alpha(s), \beta(s))\} : 0 \leq s \leq 1\}$, para $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$. Probar que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si α y β están en la misma componente conexa por caminos de $\mathcal{P}$.

12.- Calcular los grupos fundamentales de

(i) un espacio discreto, un espacio indiscreto, la recta racional, el toro $\mathbb{T}^2$, la figura de ocho, una corona circular, $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

(ii) la rosa de n pétalos, G_n, unión por un punto de n copias de $\mathbb{S}^1$;

(iii) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1$ y x ó $y \in \mathbb{Z}\}$ (observar que X tiene el mismo tipo de homotopía que una rosa de 4 pétalos);

(iv) $Y = \mathbb{R}^2 - A$, donde $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$ (comprobar que $\pi_1(Y, (1, 1))$ es un grupo libre con una cantidad numerable de generadores);

(v) $\pi_1(X, x_0)$, donde X es el espacio de Hausdorff $X = A \cup B$, A y B son homeomorfos a un toro y $A \cap B = \{x_0\}$;

(vi) X, el espacio obtenido de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, eliminando k subconjuntos disjuntos y homeomorfos cada uno de ellos al disco abierto $\mathbb{D}^n$;

(vii) para $n \leq m$, $\mathbb{R}^m - \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^m - \mathbb{S}^n$;

(viii) para $n < m$, $\mathbb{R}^m - \mathbb{S}^n$;

(ix) X, donde $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}, \{a\}, \{d\}\}$;

(x) $X \vee Y$, donde (X, x) e (Y, y) son espacios con puntos base (recordar que $X \vee Y$ es el cociente de la suma disjunta $X \sqcup Y$ al identificar sus puntos base).

13.- Sean σ y τ dos lazos en $\mathbb{R}^2$ con punto base $(0, 0)$. Construir una homotopía de caminos entre ellos.

14.- Sean σ y τ los lazos en $\mathbb{S}^1$, $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ y $\tau(t) = (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$. Demostrar que no son caminos homótopos.

15.- Demostrar las siguientes propiedades

(i) $\mathbb{R}^2 - \{p_1, \ldots, p_n\}$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{q_1, \ldots, q_m\}$, si $n \neq m$;

(ii) $\mathbb{R}^n - \{p\}$ es simplemente conexo, si $n > 2$;

(iii) si $n > 2$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos;

(iv) si $n > 2$, $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^2$ no son homeomorfos.

3.7. Problemas adicionales

1.- El espacio proyectivo real
El *espacio proyectivo real de dimensión* n se define como el cociente $\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre la esfera que identifica puntos antipodales. Con la topología cociente inducida $\mathbb{RP}^n$ es un espacio de Hausdorff y compacto. Sea $p\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ la aplicación cociente, que es abierta y localmente inyectiva. Se pide probar

(i) cada punto $p(x) \in \mathbb{RP}^n$ posee un entorno abierto V, tal que $p^{-1}(V) = \widetilde{V} \cup -\widetilde{V}$ es unión de dos abiertos, cada uno de los cuales se aplica homeomorficamente por p sobre V. V se llama *un entorno distinguido* de $p(x) \in \mathbb{RP}^n$;

(ii) la aplicación cociente posee la llamada *propiedad de levantamiento de caminos*, es decir, si tenemos un camino $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ y $x_0 \in \mathbb{S}^n$ es tal que $p(x_0) = \sigma(0)$, entonces existe un único camino $\widetilde{\sigma}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^n$, tal que $\widetilde{\sigma}(0) = x_0$ y $\sigma = p \circ \widetilde{\sigma}$. $\widetilde{\sigma}$ se llama un *levantamiento* del camino σ. Dado $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, existen precisamente dos levantamientos $\widehat{\sigma}$ y $\widetilde{\sigma}$ y verifican $\widetilde{\sigma} = -\widehat{\sigma}$;

(iii) dados $p(x), p(y) \in \mathbb{RP}^n$, se define $d(p(x), p(y)) = \text{mín}\{\|x-y\|, \|x+y\|\}$, es decir, geométricamente, $d(p(x), p(y))$ es la longitud del menor lado del rectángulo cuyos vértices son x, $-x$, y y $-y$. Probar que d es una métrica sobre $\mathbb{RP}^n$, compatible con su topología. Con esta métrica, diám$(\mathbb{RP}^n) = \sqrt{2}$;

(iv) $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$;

(v) sean $n \geq 2$ y $x_0 \in \mathbb{S}^n$. Dados dos caminos cerrados σ_1 y σ_2 basados en $p(x_0) \in \mathbb{RP}^n$, sean $\widetilde{\sigma_1}$ y $\widetilde{\sigma_2}$ sus levantamientos con origen en x_0. Entonces, $\widetilde{\sigma_1}(1) = \widetilde{\sigma_2}(1)$ si y sólo si $\widetilde{\sigma_1} \sim \widetilde{\sigma_2}$. Concluir que $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ es un grupo con dos elementos.

2.- Utilizar las propiedades de la aplicación índice para dar una prueba topológica del *teorema fundamental del álgebra*: un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, de grado $n \geq 1$ y de coeficientes $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, tiene una raíz en el plano complejo.

3.- Utilizar el teorema de Borsuk–Ulam, para demostrar el *Teorema de Lusternik–Schnirelmann*: si $\mathbb{S}^2$ se escribe como unión de tres subconjuntos cerrados, $\mathbb{S}^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$, entonces existe $i \in \{1,2,3\}$, tal que F_i contiene un par de puntos antipodales.

4.- Sea X el toro $\mathbb{T}^2$ privado de un punto, es decir, un *asa*. Se pide

(i) probar que X tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho (ver el problema **7** en 2.3);

(ii) probar que la inclusión $i\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ induce el homomorfismo $\pi_1(i)\colon \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(X)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab$, donde $\pi_1(X)$ es el grupo libre generado por a y b;

(iii) utilizar el teorema de Seifert Van–Kampen para comprobar que el grupo fundamental del toro es $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab = 1\rangle$.

5.- Sea Y la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ privada de un punto. Se pide

(i) probar que Y tiene el tipo de homotopía de la figura de ocho;

(ii) probar que la inclusión $j\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow Y$ induce el homomorfismo $\pi_1(j)\colon \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(Y)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento $a^{-1}b^{-1}ab^{-1}$, donde $\pi_1(Y)$ es el grupo libre generado por a y b;

(iii) utilizar el teorema de Seifert Van–Kampen para comprobar que el grupo fundamental de la botella de Klein es $\pi_1(\mathbb{K}^2) \simeq \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab^{-1} = 1\rangle$;

(iv) observar que el asa (ver el problema **4**) e Y tienen el mismo tipo de homotopía, sin embargo, no son espacios homeomorfos. ¿Por qué?

6.- Sea Z el plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$ privado de un punto. Se pide

(i) probar que Z tiene el tipo de homotopía de una circunferencia;

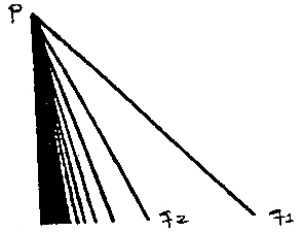
(ii) probar que la inclusión $k\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow Z$ induce el homomorfismo $\pi_1(k)\colon \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_1(Z)$ que lleva el generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ en el elemento a^2, donde $\pi_1(Z)$ es el grupo generado por a;

(iii) aplicar el teorema de Seifert Van–Kampen para probar que $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \langle a \mid a^2 = 1\rangle$;

(iv) probar que $\mathbb{S}^1$ no es un retracto de $\mathbb{RP}^2$.

7.- Calcular los tipos de homotopía de una camiseta, una chaqueta sin abotonar, un pantalón, un pantalón con un agujero en uno de sus bolsillos y un par de zapatos (hay zapatos con cordones, con cremallera, ...).

8.- Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto compacto que consiste en todos los segmentos que unen $p = (0, 1)$ con $q_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, para $n \in \mathbb{N}$, junto con el segmento de p al punto $(0, 0)$. Si $A = \{(0, 0)\} \subset X$, se pide probar



(i) la inclusión $i_A\colon A \longrightarrow X$ es una equivalencia de homotopía;

(ii) A no es un retracto por deformación fuerte de X.

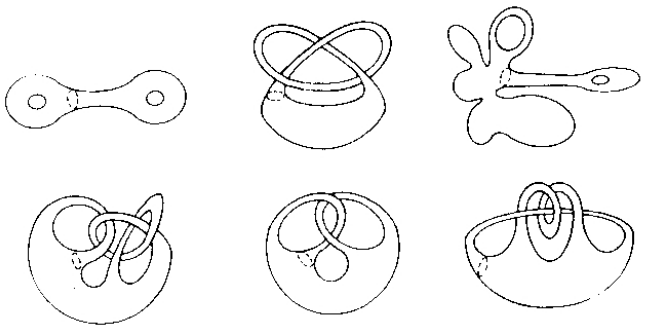
9.- Sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Decidir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo

(i) si $f\colon X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva, entonces $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$ es sobreyectiva;

(ii) si $f\colon X \longrightarrow Y$ es inyectiva, entonces $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$ es inyectiva;

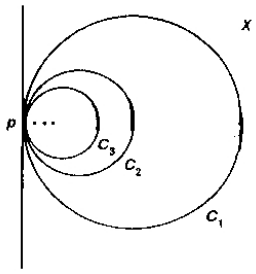
(i) si $f\colon X \longrightarrow Y$ es biyectiva, entonces $\pi_1(f)\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,f(x))$ es biyectiva.

10.- Probar que todos los espacios que siguen son homeomorfos, salvo uno de ellos y explicar la razón.



11.- Sea C_n el círculo de radio $\frac{1}{n}$ en $\mathbb{R}^2$, con centro en el punto $\left(\frac{1}{n},0\right)$. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de todos estos círculos, es decir X es una unión infinita numerable de círculos, que tienen el origen $p=(0,0)$ como punto común.

Observar que X no es la unión por un punto de los círculos C_n. A X se le llama *pendiente infinito*. Probar que $\pi_1(X,p)$ no es un grupo libre.



12.- Sean $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y $r\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$, es decir, la aplicación $r(\cos(\theta),\sin(\theta)) = \left(\cos(\theta+\frac{2\pi}{n}),\sin(\theta+\frac{2\pi}{n})\right)$. Sea X_n el cociente del disco unidad $\mathbb{D}^2$ obtenido al identificar cada punto $x \in \mathbb{S}^1$ con los puntos $r(x)$, $r^2(x)$, $\ldots$, $r^{n-1}(x)$. Se pide probar

(i) X_n es un espacio compacto Hausdorff, llamado *sombrero de asno de n picos*;

(ii) el sombrero de asno de 2 picos es homeomorfo a plano proyectivo real $\mathbb{RP}^2$;

(iii) el grupo fundamental de X_n es un grupo cíclico de orden n.

13.- El propósito de este ejercicio es demostrar que si G es un grupo con una presentación finita, entonces existe un espacio compacto Hausdorff cuyo grupo fundamental es isomorfo a G. Se pide probar

(i) supongamos que G tiene una presentación finita formada por n generadores y m relaciones, $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n | r_1, \ldots, r_m \rangle$. Sean A la unión por un punto de n círculos, m copias $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_m$ de discos unidad y una aplicación continua $f\colon \bigcup_{i=1}^{m} fr(\mathbb{D}_i) \longrightarrow A$. Sea X el espacio de adjunción obtenido a partir de f (ver el problema **4** en 1.5). Probar que X es un espacio compacto Hausdorff;

(ii) probar la propiedad enunciada para $m = 1$;

(iii) probar el siguiente lema algebraico: *Sean $f\colon G \longrightarrow H$ y $g\colon H \longrightarrow K$ homomorfismos y f sobreyectivo. Si $a_0 \in G$ y $ker(g)$ es el menor subgrupo normal de H conteniendo a $f(a_0)$, entonces $ker(g \circ f)$ es el menor subgrupo normal N de G que contiene a $ker(f)$ y a_0;*

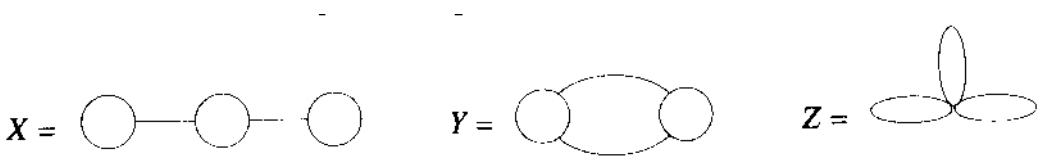
(iv) proceder por inducción sobre m, utilizando (iii) para probar el enunciado.

14.- Encontrar espacios cuyos grupos fundamentales sean isomorfos a los siguientes grupos, donde $\mathbb{Z}_n$ denota el grupo aditivo de los enteros módulo n

(i) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ y más en general $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$;

(ii) $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ y más en general $\mathbb{Z}_{n_1} * \mathbb{Z}_{n_2} * \cdots * \mathbb{Z}_{n_k}$.

15.- Se consideran los tres subespacios del plano



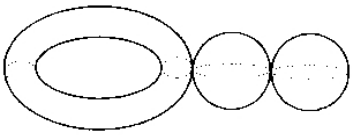
Se pide

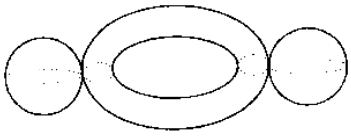
(i) calcular el grupo fundamental de cada uno de ellos;

(ii) dibujar los generadores de esos grupos;

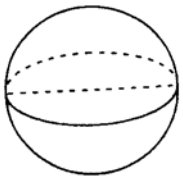
(iii) ¿son homeomorfos?

16.- Calcular el grupo fundamental de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ indicados en el dibujo y decidir si son homeomorfos





17.- Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, 0, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$. Se pide



(i) calcular su grupo fundamental y dibujar en él los generadores de este grupo;

(ii) ¿es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$? ¿Y a la esfera $\mathbb{S}^2$?

Estudio de los espacios de revestimiento

Arde, sombrío, arde sin llamas,
apagado y ardiente,
ceniza y piedra viva,
desierto sin orillas.

"Acabar con todo"
Octavio Paz (1914-1998)

Los espacios de revestimiento se introducen muchas veces como simples herramientas, por ser normalmente más sencillos que los espacios que *cubren*: por ejemplo, $\mathbb{S}^n$ frente a $\mathbb{RP}^n$, como veremos más adelante.

Luego, el principio de generalidad va a ser el siguiente: el objeto primario de interés será el espacio topológico X, pero cuando X es demasiado *complicado*, se recurre a un *espacio de revestimiento* Y, más *sencillo*, y se usa la teoría de los espacios de revestimiento, para obtener información de X a partir de la de Y.

En los temas anteriores, hemos desarrollado dos técnicas para calcular grupos fundamentales

(i) la *equivalencia de homotopía*: un espacio topológico se reemplaza por otro cuyo grupo fundamental coincide con el primero, pero que como espacio es más *simple*;

(ii) el *teorema de Seifert–Van Kampen*, para el cálculo del grupo fundamental de esferas y otras superficies.

Otro grupo fundamental que hemos calculado es el de $\mathbb{S}^1$, y la estrategia para obtenerlo ha sido usar propiedades de la aplicación exponencial, para probar que todo camino basado en 1, se puede levantar sobre $\mathbb{R}$ en un camino que empieza en 0 y que termina en un entero.

Los ingredientes básicos en la prueba han sido tres *propiedades de levantamiento*

(i) la propiedad de levantamiento único,

(ii) el lema de levantamiento de caminos,

(iii) la propiedad de levantamiento de homotopías.

Otra cualidad que se usa es que cada punto de $\mathbb{S}^1$ posee un entorno *distinguido* (lo definiremos más adelante con rigor), es decir, un entorno abierto U, tal que $\exp^{-1}(U)$ está formado por *copias* disjuntas de U en $\mathbb{R}$.

En este tema se generalizan estas ideas, y se ve que se pueden aplicar técnicas similares a una gama bastante importante de espacios topológicos, que engloban a las variedades conexas: son los *espacios y las aplicaciones de revestimiento*.

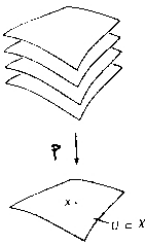
Una aplicación de revestimiento es una aplicación cociente y tiene muchas de las propiedades de la aplicación exponencial. El estudio cuidadoso de las aplicaciones de revestimiento permitirá analizar y calcular muchos más grupos fundamentales.

Además, damos la clasificación de los espacios de revestimiento de un espacio dado X y se ve que depende de su grupo fundamental, en el sentido de que hay tantos espacios de revestimiento como subgrupos de $\pi_1(X, x)$. Esto prueba de nuevo el poder del functor grupo fundamental, como método para distinguir cualidades topológicas de espacios a través de las propiedades algebraicas de sus grupos de Poincaré.

4.1. Espacios de revestimiento

Definición 4.1. Sean X e Y espacios topológicos y $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación continua. Un abierto $U \subset X$ se llama *distinguido*, si $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} U_i$, unión disjunta de abiertos conexos $\{U_i : i \in I\}$, cada uno de los cuales se aplica homeomórficamente sobre U por p, es decir, $p|_{U_i}\colon U_i \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

Se puede visualizar esta familia de abiertos disjuntos, como una *pila de hojas*, que se proyectan sobre U por la aplicación p.



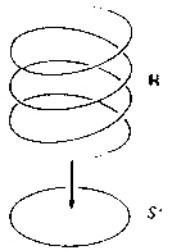
Los conjuntos U_i son conexos, abiertos y cerrados en $p^{-1}(U)$, es decir, son precisamente las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.

Definición 4.2. Si Y es conexo, $p\colon Y \longrightarrow X$ es sobreyectiva y cada $x \in X$ posee un entorno abierto distinguido, se dice que p es una *aplicación de revestimiento* y que Y es un *espacio de revestimiento* de X. A veces, se habla de X como de la *base* del revestimiento y de Y como el *espacio total*.

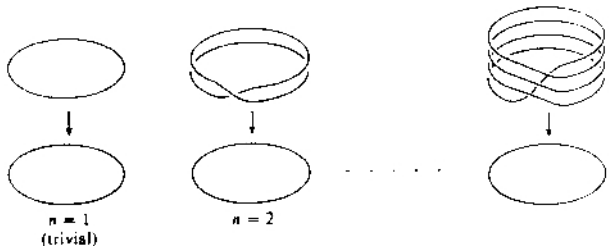
Observación 4.1. Si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un espacio de revestimiento, los espacios X e Y son localmente idénticos, y las imágenes recíprocas en Y de entornos distinguidos en X, *convenientemente* combinados, *realizan* el espacio Y. Sin embargo, el espacio total y la base pueden ser completamente distintos en un sentido global.

Ejemplos 4.1. Las siguientes aplicaciones son de revestimiento

(i) la aplicación exponencial $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$;



(i) La aplicación exponencial



(ii) Los revestimientos sobre esferas

(ii) $p_n\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, dada por $p_n(z) = z^n$;

(iii) $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$, donde $p(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(x_1), \ldots, \exp(x_n))$;

(iv) la aplicación cociente $p\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ definida al identificar puntos antipodales de la esfera.

Definición 4.3. Una aplicación continua $f\colon Y \longrightarrow X$ es un *homeomorfismo local*, si para cada $y \in Y$, existe un entorno abierto U que se aplica por f homeomorficamente sobre un subconjunto abierto $V \subset X$.

Lema 4.1. *Un homeomorfismo local $f\colon Y \longrightarrow X$ verifica*

(i) f es una aplicación continua y abierta;

(ii) para cada $x \in X$, la fibra sobre ese punto, $f^{-1}(x)$, es un espacio discreto.

Observación 4.2. La existencia del homeomorfismo local $f\colon Y \longrightarrow X$, hace que Y herede todas las propiedades topológicas locales de X (la conexión local, la compacidad local, etc.). Si además f es sobreyectiva, X también hereda las propiedades topológicas locales de Y.

Lema 4.2. *Si $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento, entonces es un homeomorfismo local y una aplicación cociente. Si p es inyectiva, entonces es un homeomorfismo.*

Es importante observar que no todo homeomorfismo local sobreyectivo es una aplicación de revestimiento

Ejemplo 4.1. Sea $Y = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ y la aplicación $f\colon Y \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(x) = \exp(x)$. f es un homeomorfismo local por ser la restricción de la aplicación exponencial, que es una aplicación de revestimiento, y es claramente sobreyectiva. Pero, no se trata de una aplicación de revestimiento, pues el punto $1 \in \mathbb{S}^1$ no posee un entorno abierto distinguido.

Lema 4.3. *Si $p\colon Y \longrightarrow X$ es una aplicación de revestimiento, entonces el cardinal de las fibras es constante.*

Observación 4.3. Usando el lema anterior, podría deducirse que la aplicación del ejemplo 4.1 no es de revestimiento, al tener todas las fibras dos elementos, excepto la del punto 1 que tiene cardinal uno.

Definición 4.4. Si $p\colon Y \longrightarrow X$ es una aplicación de revestimiento, el cardinal de cada fibra se llama *número de hojas del revestimiento*.

Ejemplos 4.2. A continuación, se dan ejemplos de revestimientos con distintos números de hojas

(i) $p_n\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $p_n(z) = z^n$, es un revestimiento de n hojas;

(ii) $p\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ es un revestimiento de dos hojas;

(iii) la aplicación exponencial es un revestimiento con una cantidad numerable de hojas.

4.2. Propiedades de levantamiento

Definición 4.5. Sean $p\colon Y \longrightarrow X$ y $f\colon Z \longrightarrow X$ aplicaciones continuas. Un *levantamiento de f* relativamente a p, es una aplicación continua $\widetilde{f}\colon Z \longrightarrow Y$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$.

Observación 4.4. No toda aplicación continua posee un levantamiento, aunque p sea un homeomorfismo local, como se verá más adelante.

Las herramientas técnicas clave para trabajar con espacios de revestimiento son los siguientes lemas de levantamiento, que son generalizaciones de las propiedades similares verificadas para la aplicación exponencial. Empecemos por la **propiedad de levantamiento único**

Lema 4.4. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un espacio de revestimiento. Si Z es conexo, $f\colon Z \longrightarrow X$ es una aplicación continua y $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\colon Z \longrightarrow Y$ son dos levantamientos de f que coinciden en algún punto de Z, entonces, $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

Se continúa con la **propiedad de levantamiento de caminos**

Lema 4.5. *Sean $p\colon Y \longrightarrow X$ un espacio de revestimiento, $\sigma\colon [0,1] \longrightarrow X$ un camino y un punto $y_0 \in p^{-1}(\sigma(0))$. Existe un levantamiento $\widetilde{\sigma}\colon [0,1] \longrightarrow Y$ de σ, tal que $\widetilde{\sigma}(0) = y_0$.*

Y finalmente, se da la **propiedad de levantamiento de homotopías**

Lema 4.6. *Sean $p\colon Y \longrightarrow X$ un espacio de revestimiento, $\sigma_0, \sigma_1\colon [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos homótopos, $H : \sigma_0 \sim \sigma_1$ y $p(\widetilde{x_0}) = \sigma_0(0)$. Entonces*

(i) existe una única aplicación $\widetilde{H}$, tal que $p \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \widetilde{x_0}$;

(ii) teorema de monodromía: si $\widetilde{\sigma_0}, \widetilde{\sigma_1}\colon [0,1] \longrightarrow Y$ son levantamientos de los caminos σ_0 y σ_1 respectivamente y $\widetilde{\sigma_0}(0) = \widetilde{\sigma_1}(0)$, entonces $\widetilde{\sigma_0} \sim \widetilde{\sigma_1}$.

Como primera aplicación de la teoría, podemos dar una solución general al *problema de levantamiento* para aplicaciones de revestimiento: se trata de decidir, dado un revestimiento $p\colon Y \longrightarrow X$ y una aplicación continua $\varphi\colon Z \longrightarrow X$, cuando esta última admite un levantamiento $\widetilde{\varphi}\colon Z \longrightarrow Y$. El siguiente resultado reduce este problema topológico a uno algebraico: es el **criterio de levantamiento**

Teorema 4.7. *Sean $p\colon Y \longrightarrow X$ un revestimiento, Z un espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos y $\varphi\colon Z \longrightarrow X$ una aplicación continua. Dados $z_0 \in Z$ e $y_0 \in Y$ tales que $p(y_0) = \varphi(z_0)$, φ posee un levantamiento $\widetilde{\varphi}\colon Z \longrightarrow Y$, verificando que $\widetilde{\varphi}(z_0) = y_0$, si y sólo si $\pi_1(\varphi)(\pi_1(Z, z_0))$ (subgrupo de $\pi_1(X, \varphi(x_0))$) está contenido en $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$.*

Ejemplos 4.3. Algunos ejemplos de aplicación de este criterio son

(i) dado el revestimiento $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, la aplicación identidad $1_{\mathbb{S}^1}\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ no se levanta respecto a $\exp$, porque $\pi_1(1_{\mathbb{S}^1})(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq \mathbb{Z} \not\subset \pi_1(\mathbb{R}) = 0$;

(ii) sean $p_3\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ y $p_5\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ los revestimientos de tres y cinco hojas respectivamente. p_3 no se levanta respecto a p_5, porque

$$\pi_1(p_3)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq 3\mathbb{Z} \not\subset \pi_1(p_5)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \simeq 5\mathbb{Z};$$

(iii) si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un espacio de revestimiento y $\varphi\colon Z \longrightarrow X$ es continua con grupo fundamental $\pi_1(Z, z_0)$ trivial, siempre existe un levantamiento $\widetilde{\varphi}\colon Z \longrightarrow Y$ de φ.

4.3. Aplicaciones de revestimiento y grupo fundamental

El siguiente **teorema de inyectividad** caracteriza el homomorfismo inducido sobre los grupos fundamentales por una aplicación de revestimiento

Teorema 4.8. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento. Para cada $y \in Y$, el homomorfismo $\pi_1(p)\colon \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(X,p(y))$ inducido por p es inyectivo.*

Observación 4.5. Este enunciado prueba que el grupo fundamental de un espacio de revestimiento puede verse, en un cierto sentido, como un subgrupo del grupo fundamental de la base. Pero, es necesario entender de que manera este hecho depende de la elección del punto base $y \in Y$.

Definición 4.6. Dos subgrupos H_1 y H_2 de un grupo G se llaman *conjugados*, si existe un elemento $g \in G$, tal que $H_2 = g^{-1}H_1g$. Es fácil probar que la *conjugación* es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todos los subgrupos de G. Además, H es normal en G si y sólo si H es el único subgrupo conjugado a H.

Como prueba el siguiente **teorema de conjugación**, el subgrupo $\pi_1(p)(\pi_1(Y,y))$ puede cambiar cuando varía el punto base, pero puede transformarse sólo de un modo muy *limitado*

Teorema 4.9. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento, donde Y es conexo por caminos. Para cada $x \in X$, la familia $\{\pi_1(p)(\pi_1(Y,y)) : y \in p^{-1}(x)\}$ de subgrupos de $\pi_1(X,x)$, es exactamente una clase de conjugación.*

Definición 4.7. Se dice que un revestimiento $p\colon Y \longrightarrow X$ es *regular*, si Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos y para cada $y \in Y$, el subgrupo $\pi_1(p)(\pi_1(Y,y))$ es normal en $\pi_1(X,p(y))$.

Observación 4.6. Esto significa en particular que el subgrupo $\pi_1(p)(\pi_1(Y,y))$ es independiente de la elección del punto base y en la fibra de x, ya que el único subgrupo conjugado es él mismo.

Lema 4.10. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si existe $y \in Y$ tal que $\pi_1(p)(\pi_1(Y,y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X,p(y))$, entonces p es regular.*

4.4. El grupo de las transformaciones de revestimiento

Vamos a introducir el concepto de *grupo de las transformaciones de revestimiento* y a estudiar su relación con los grupos fundamentales del espacio total Y y de la base X.

Definición 4.8. Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento. Un homeomorfismo $\varphi\colon Y \longrightarrow Y$ se llama una *transformación de revestimiento*, si $p \circ \varphi = p$. Se denota por $G_p(Y)$ el conjunto de las transformaciones de revestimiento de Y respecto a p.

Lema 4.11. *Dada una aplicación de revestimiento $p\colon Y \longrightarrow X$, se verifican las propiedades siguientes*

(i) si $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in G_p(Y)$;

(ii) si $\varphi \in G_p(Y)$, entonces $\varphi^{-1} \in G_p(Y)$;

(iii) $1_Y \in G_p(Y)$.

Luego, $G_p(Y)$ es un grupo, llamado *grupo de las transformaciones de revestimiento*.

Proposición 4.12. *Sean $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento y $\varphi \in G_p(Y)$, entonces*

(i) si $\varphi_1, \varphi_2 \in G_p(Y)$ y existe y_0 tal que $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(y_0)$, entonces $\varphi_1 = \varphi_2$;

(ii) excepto para $\varphi = 1_Y$, φ actúa sin puntos fijos, es decir, si $\varphi(y) = y$ para algún $y \in Y$, entonces $\varphi = 1_Y$;

(iii) para cada $x \in X$, φ permuta los puntos de la fibra $p^{-1}(x)$;

(iv) para cada U abierto distinguido en X, φ permuta las componentes conexas de $p^{-1}(U)$.

Ejemplos 4.4. Algunos ejemplos de tales transformaciones son

(i) para $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $G_p(\mathbb{R}) = \{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $\varphi_n(x) = x + n$.

(ii) si $p\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ es el revestimiento de dos hojas de $\mathbb{P}^n$ y $\alpha\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ la aplicación antipodal, entonces $G_p(\mathbb{S}) = \{1_{\mathbb{S}^n}, \alpha\}$.

Observación 4.7. Según la proposición 4.12, $G_p(Y)$ puede pensarse como un grupo de permutaciones sobre cada fibra, ya que cada transformación de revestimiento está completamente determinada por lo que hace sobre una fibra.

Definición 4.9. Si G es un grupo de permutaciones sobre un conjunto Z y $z \in Z$, la *órbita de z* es el conjunto de las imágenes por G, es decir, $G(z) = \{\varphi(z) : \varphi \in G\}$. Se dice que G actúa *transitivamente* sobre Z, si para cada $z \in Z$, es $G(z) = Z$, o equivalentemente, si para cada $z_1, z_2 \in Z$, existe $\varphi \in G$ tal que $\varphi(z_1) = z_2$.

Es a menudo útil disponer de un criterio para decidir cuando dos puntos están en la misma órbita, y por ello damos el **criterio de órbitas**

Proposición 4.13. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Entonces*

(i) si $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$, existe una transformación de revestimiento que lleva y_1 en y_2 si y sólo si $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_1)) = \pi_1(p)(\pi_1(Y, y_2))$;

(ii) $G_p(Y)$ actúa transitivamente sobre cada fibra si y sólo si p es un revestimiento regular. En este caso, para cada $y \in p^{-1}(x)$, la aplicación $f_x \colon G_p(Y) \longrightarrow p^{-1}(x)$ definida por $f_x(\varphi) = \varphi(y)$, es una biyección.

El siguiente teorema da una fórmula explícita para el grupo de las transformaciones de revestimiento en términos de los grupos fundamentales del espacio total y el espacio base, y lo podremos utilizar para calcular grupos fundamentales de ciertos espacios, a partir de propiedades de sus revestimientos. El enunciado de este resultado envuelve la siguiente condición algebraica

Definición 4.10. Si G es un grupo y $H \subset G$ un subgrupo, el *normalizador* de H en G, $N(H)$, es el conjunto de los elementos $g \in G$, tales que $g^{-1}Hg = H$. $N(H)$ es un subgrupo de G y de hecho es el mayor subgrupo de G en el que H es normal.

Podemos dar el **teorema de estructura del grupo de las transformaciones de revestimiento**

Teorema 4.14. *Sea $p \colon Y \longrightarrow X$ una aplicación de revestimiento, donde Y es conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea $y \in Y$. Si $H = \pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$, los grupos $G_p(Y)$ y $N(H)\,/\,H$ son isomorfos.*

Para revestimientos regulares, el teorema dice simplemente que el grupo de las transformaciones de revestimiento es isomorfo al cociente del grupo fundamental de la base por la imagen del grupo fundamental del espacio de revestimiento

Corolario 4.15. *En las condiciones del teorema 4.14, si p es regular y $p(y) = x$, entonces los grupos $\pi_1(X, x)/\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ y $G_p(Y)$ son isomorfos.*

Corolario 4.16. *En las condiciones del teorema 4.14, si además Y es simplemente conexo y $p(y) = x$, entonces los grupos $G_p(Y)$ y $\pi_1(X, x)$ son isomorfos.*

Combinando el corolario 4.16 con la proposición 4.13, se obtiene el siguiente resultado, que proporciona una manera de identificar cada fibra de un revestimiento simplemente conexo con el grupo fundamental de la base

Corolario 4.17. *En las condiciones del corolario 4.16, para cada $x \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$, la aplicación $\Phi \colon \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$ definida por $\Phi([\sigma]) = \widetilde{\sigma}(1)$, donde $\widetilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ que empieza en y, es una biyección.*

Ejemplos 4.5. Como ejemplos de aplicación de estos corolarios, tenemos

(i) $\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es un revestimiento cíclico infinito y $\mathbb{R}$ es simplemente conexo. El corolario 4.16 proporciona una prueba de que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es cíclico infinito;

(ii) sea $n > 1$ y $p\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ el revestimiento de dos hojas dado por la identificación de puntos antipodales en la esfera. Utilizando el corolario 4.17, se deduce que el grupo fundamental de $\mathbb{RP}^n$ es un grupo con dos elementos, que por lo tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. También puede aplicarse el corolario 4.16 para obtener el mismo resultado, ya que por el ejemplo 4.4 (ii) sabemos que $G_p(\mathbb{S}^n)$ es el grupo cíclico de orden 2.

4.5. Homomorfismos de revestimiento

De momento hemos obtenido información acerca de grupos fundamentales, estudiando las aplicaciones de revestimiento. Ahora, se trata de invertir el proceso y ver lo que puede aprenderse, partiendo del grupo fundamental, sobre la existencia y unicidad de espacios de revestimiento. La idea clave viene dada por el teorema 4.9: cada espacio de revestimiento de X determina una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X)$.

Vamos a decidir cuando pueden pensarse dos espacios de revestimiento como *idénticos*

Definición 4.11. Sean X un espacio y $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$ dos revestimientos. Un *homomorfismo de revestimiento* de p_1 en p_2, es una aplicación continua $\varphi\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$, tal que $p_2 \circ \varphi = p_1$. Un homomorfismo de revestimiento es un *isomorfismo de revestimiento*, si posee un homomorfismo de revestimiento inverso.

Lema 4.18. *En las condiciones de la definición 4.11, $\varphi\colon Y_1 \longrightarrow Y_2$ es un isomorfismo de revestimiento si y sólo si es un homeomorfismo.*

Definición 4.12. Dos revestimientos $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$ se dicen *isomorfos*, cuando existe un isomorfismo de revestimiento entre ellos. Claramente, queda definida una relación de equivalencia sobre la familia de los revestimientos de X.

Observación 4.8. Si $Y_1 = Y_2$ y $p_1 = p_2\colon Y_1 \longrightarrow X$, un isomorfismo de revestimiento es precisamente una transformación de revestimiento.

Los homomorfismos de revestimiento son a su vez aplicaciones de revestimiento, como lo prueba el siguiente lema

Lema 4.19. *Sean $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$ dos revestimientos localmente conexos por caminos de X. Sea φ un homomorfismo de revestimiento de p_1 en p_2. Entonces φ es una aplicación de revestimiento.*

La clave para determinar cuando dos espacios de revestimiento son isomorfos, es establecer cuando existen homomorfismos de revestimiento entre ellos, y lo haremos a través del siguiente **criterio del homomorfismo de revestimiento**

Teorema 4.20. *Consideremos dos revestimientos localmente conexos por caminos de X, $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$. Sean $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$, tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2) = x$. Existe un homomorfismo de revestimiento entre p_1 y p_2 que lleva y_1 en y_2, si y sólo si se da la inclusión $\pi_1(p_1)(\pi_1(Y_1, y_1)) \subset \pi_1(p_2)(\pi_1(Y_2, y_2))$.*

Ejemplos 4.6. Como aplicación del anterior criterio, tenemos

(i) sea $p_n\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p_n(z) = z^n$. Si α es el generador estándar de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$, y recordando que p_n tiene grado n, se prueba fácilmente que

$$\pi_1(p_n)(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) = \{\alpha^{nk} : k \in \mathbb{Z}\} \simeq n\mathbb{Z} \subset \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Por el criterio del homomorfismo de revestimiento, existe un homomorfismo de revestimiento entre p_m y p_n si y sólo si n divide a m. Y en tal caso, el homomorfismo es justamente $p_{\frac{m}{n}}$;

(ii) se consideran los dos revestimientos del toro, $p\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$ y $p_1\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2$, definidos por $p(x_1, x_2) = (\exp(x_1), \exp(x_2))$ y $p_1(z, x) = (z, \exp(x))$, respectivamente. Como se verifican las inclusiones

$$\pi_1(p)(\pi_1(\mathbb{R}^2)) = \{0\} \subset \pi_1(p_1)(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z},$$

existe un homomorfismo de revestimiento de p en p_1, $\varphi(x_1, x_2) = (\exp(x_1), x_2)$.

El siguiente **teorema del isomorfismo de revestimiento** resuelve la cuestión de la unicidad para espacios de revestimiento localmente conexos por caminos, salvo isomorfismo

Teorema 4.21. *$p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X$, espacios de revestimiento localmente conexos por caminos, son isomorfos si y sólo si para cada $x \in X$ y para cada elección de puntos base $y_1 \in p_1^{-1}(x)$ e $y_2 \in p_2^{-1}(x)$, los subgrupos $\pi_1(p_1)(\pi_1(Y_1, y_1))$ y $\pi_1(p_2)(\pi_1(Y_2, y_2))$ son conjugados en $\pi_1(X, x)$.*

4.6. El espacio de revestimiento universal

Cuando los resultados anteriores se aplican a espacios de revestimiento simplemente conexos, se obtienen resultados interesantes

Proposición 4.22. *Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un revestimiento simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces*

(i) si $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X$ es un revestimiento localmente conexo por caminos, existe una aplicación de revestimiento $\widetilde{p}\colon Y \longrightarrow Y_1$, tal que $p_1 \circ \widetilde{p} = p$;

(ii) si además X es simplemente conexo y localmente conexo por caminos, entonces p es un homeomorfismo;

(iii) dos revestimientos simplemente conexos y localmente conexos por caminos de X son isomorfos.

La parte (i) de esta proposición dice que los espacios de revestimiento simplemente conexos *cubren* a cualquier otro espacio de revestimiento de X. Por esta razón, se define

Definición 4.13. Al único (proposición 4.22 (iii)) revestimiento simplemente conexo y localmente conexo por caminos $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$, se le llama *revestimiento universal de X*.

Ejemplos 4.7. Algunos ejemplos de revestimientos universales son

(i) el espacio de revestimiento universal del toro $\mathbb{T}^n$ es $\mathbb{R}^n$, ya que $p\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n$ dada por $p(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(x_1), \ldots, \exp(x_n))$ es un revestimiento y $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo y localmente conexo por caminos;

(ii) del mismo modo, el revestimiento universal de $\mathbb{RP}^n$ es $\mathbb{S}^n$.

Definición 4.14. X es *semilocalmente simplemente conexo*, si admite una base de conjuntos abiertos U, con la propiedad de que, todo lazo en U es homótopo en X a una constante.

Como prueba el siguiente teorema, todo espacio *razonable*, incluyendo las variedades conexas, posee un revestimiento universal. La prueba es complicada y puede encontrarse en [Mas2].

Teorema 4.23. *Sea X conexo por caminos y localmente conexo por caminos. X admite un revestimiento universal si y sólo si X es semilocalmente simplemente conexo.*

4.7. Acciones propiamente discontinuas y revestimientos

El siguiente paso a la hora de clasificar revestimientos, es comenzar por un espacio Y y desarrollar una técnica para construir espacios *cubiertos* por Y.

Para tener una idea de como construir espacios *revestidos* por Y, recordemos que una aplicación de revestimiento es una aplicación cociente y que el criterio de la órbita prueba que el grupo $G_p(Y)$ actúa transitivamente sobre cada fibra cuando el revestimiento es regular, con lo que las identificaciones inducidas por p son exactamente:

$$y_1 \sim y_2 \text{ si y sólo si existe } \varphi \in G_p(Y) \text{ tal que } y_2 = \varphi(y_1).$$

Sea ahora Y un espacio y supongamos que Γ es un grupo de homeomorfismos de Y, es decir, un conjunto de homeomorfismos de Y en Y, que contiene a 1_Y y que es cerrada bajo la composición y la inversión de funciones. Se puede entonces definir la relación de equivalencia

$$y_1 \sim y_2 \text{ si y sólo si existe } \varphi \in \Gamma \text{ tal que } y_2 = \varphi(y_1).$$

El *espacio de órbitas* de Γ, denotado por Y/Γ, es el cociente de Y bajo esta relación de equivalencia. En particular, si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un revestimiento, la discusión del párrafo anterior, junto con la unicidad de los espacios cociente prueba que

Teorema 4.24. *Si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un revestimiento regular, X es homeomorfo al espacio cociente $Y/G_p(Y)$.*

Nuestro objetivo ahora es dar la vuelta a este proceso: empezar con un espacio Y y un grupo de homeomorfismos Γ de Y y construir un revestimiento $p\colon Y \longrightarrow Y/\Gamma$, cuyo grupo de transformaciones de revestimiento, $G_p(Y)$, sea exactamente Γ. Debe observarse que esta construcción sólo puede reproducirse para revestimientos regulares, porque Γ actúa transitivamente sobre las fibras de cada espacio de órbitas por definición.

Por supuesto, cualquier grupo de homeomorfismos no produce una aplicación de revestimiento de este modo. Por ejemplo, si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un revestimiento, $G_p(Y)$ actúa sin puntos fijos, por lo que Γ deberá tener esta propiedad. De hecho, $G_p(Y)$ satisface una propiedad mucho más fuerte: si $y \in Y$, U es un entorno distinguido de $p(y)$ y $\widetilde{U}$ es la componente conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a y, entonces las imágenes de $\widetilde{U}$ bajo distintas transformaciones de revestimiento $\varphi \in G_p(Y)$, son disjuntas. Esta propiedad tiene un nombre

Definición 4.15. Un grupo de homeomorfismos Γ de Y es *propiamente discontinuo*, si para cada $y \in Y$, existe U un entorno de ese punto, tal que $\varphi(U) \cap \varphi'(U) = \emptyset$, si $\varphi, \varphi' \in \Gamma$ y $\varphi \neq \varphi'$.

Teorema 4.25. *Sea Y conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Si Γ es un grupo propiamente discontinuo de homeomorfismos de Y, la proyección $p\colon Y \longrightarrow Y/\Gamma$, es un revestimiento regular y $\Gamma = G_p(Y)$.*

4.8. El teorema de clasificación de los espacios de revestimiento

Vamos a agrupar todos los resultados anteriores, para dar una clasificación completa de los espacios de revestimiento de un espacio dado. La idea es que cada revestimiento de X *está cubierto* por el espacio de revestimiento universal $\widetilde{X}$, y que los revestimientos

intermedios pueden construirse a través del universal, como cocientes por acciones de grupos adecuadas.

Así, tenemos el **teorema de clasificación de los espacios de revestimiento**

Teorema 4.26. *Sean X conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo y x_0 un punto base en X. Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de revestimientos localmente conexos por caminos de X y las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Esta correspondencia relaciona cada revestimiento $p\colon Y \longrightarrow X$, con la clase de conjugación de $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0))$, para cada $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

4.9. Problemas

1.- Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un revestimiento, $A \subset X$ y $B = p^{-1}(A)$. Probar que la aplicación $p_A\colon B \longrightarrow A$ dada por $p_A(x) = p(x)$, es aún una aplicación de revestimiento.

2.- Sean $p_1\colon Y_1 \longrightarrow X_1$ y $p_2\colon Y_2 \longrightarrow X_2$ dos revestimientos. Probar

(i) $p_1 \times p_2\colon Y_1 \times Y_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ es un revestimiento;

(ii) si $X_1 = X_2$ y $Z = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 : p_1(y_1) = p_2(y_2)\}$, entonces $p\colon Z \longrightarrow X_1$ definida por $p(y_1, y_2) = p_1(y_1)$ es un revestimiento;

(iii) identificar Z y p, cuando $p_1 = p_2 = \exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$.

3.- Probar las siguientes propiedades

(i) si G es un grupo de homeomorfismos propiamente discontinuo de X, la órbita de cada punto $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$, es discreta;

(ii) si $\alpha\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ es la aplicación antipodal, entonces $G = \{1_{\mathbb{S}^n}, \alpha\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{S}^n$ propiamente discontinuo;

(iii) si G es un grupo finito de homeomorfismos de un espacio Hausdorff X sin puntos fijos (salvo la identidad), entonces G es propiamente discontinuo;

(iv) si $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ y $f\colon X \longrightarrow X$ es la aplicación definida por $f(x, y) = \left(ax, \dfrac{y}{a}\right)$ $(a > 1)$, entonces $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo propiamente discontinuo.

4.- Sea $p\colon Y \longrightarrow X$ un revestimiento, $x_0 \in X$ e $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Se pide probar

(i) p es un homeomorfismo si y sólo si $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y_0)) = \pi_1(X, x_0)$;

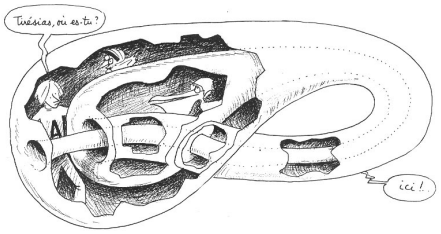
(ii) si $X = Y$ y $\pi_1(X, x_0)$ es finito, entonces p es un homeomorfismo. Si $\pi_1(X, x_0)$ no es finito, ¿es p necesariamente un homeomorfismo?

(iii) si el revestimiento es regular y σ es un camino cerrado en X, entonces o todo levantamiento de σ es cerrado o ninguno lo es;

(iv) si p es no trivial y $\pi_1(Y, y_0)$ es nulo, entonces existe $f\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ continua que no se levanta a $\widetilde{f}\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow Y$.

5.- ¿Existe algún espacio Y, tal que $\mathbb{S}^1 \times Y$ sea homeomorfo a un revestimiento de $\mathbb{S}^2$ ó $\mathbb{RP}^2$?

6.- Encontrar un revestimiento de dos hojas $p\colon \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$, donde $\mathbb{K}^2$ es la botella de Klein.
Este es el aspecto que tiene según [Pe].



7.- Si $p\colon Y \longrightarrow X$ es un revestimiento donde X e Y son espacios de Hausdorff, probar que X es una n–variedad si y sólo si Y lo es.

8.- Sean $X = \mathbb{R} \times [0, 1]$ y el homeomorfismo $f\colon X \longrightarrow X$, $f(x, y) = (x + 1, 1 - y)$. Se pide

(i) demostrar que si $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ es el grupo de homeomorfismos generado por f, entonces X/G es la banda de Möbius $\mathbb{M}$;

(ii) deducir que el grupo fundamental de $\mathbb{M}$ es $\mathbb{Z}$.

9.- Determinar todos los espacios de revestimiento de

(i) la esfera $\mathbb{S}^1$ y el toro $\mathbb{T}^2$;

(ii) un espacio X simplemente conexo y localmente conexo por caminos.

4.10. Problemas adicionales

1.- Se trata de calcular el grupo fundamental de la botella de Klein $\mathbb{K}^2$, usando como herramienta los espacios de revestimiento. Se pide hacer lo siguiente

(i) sean los homeomorfismos $f, g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dados por $f(z) = z + i$ y $g(z) = \overline{z} + \frac{1}{2} + i$. Demostrar que $g \circ f = f^{-1} \circ g$ y deducir que $G = \{f^m \circ g^{2n+\varepsilon} : m, n \in \mathbb{Z}, \varepsilon = 0 \text{ ó } 1\}$ es un grupo de homeomorfismos de $\mathbb{C}$. La acción de G es propiamente discontinua y $\mathbb{C}/G$ es Hausdorff;

(ii) encontrar un *rectángulo semiabierto* que contenga exactamente un punto de cada órbita de G y deducir que $\mathbb{C}/G$ es una botella de Klein;

(iii) un embebimiento de la botella de Klein en $\mathbb{R}^4$: sea $\varphi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^5$ definida por

$$\varphi(x+iy) = (\cos(2\pi y), \cos(4x\pi), \sin(4\pi x), \sin(2\pi y)\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)).$$

Demostrar que φ identifica cada una de las órbitas del grupo G a un punto, y deducir que $\mathbb{C}/G$ es homeomorfo a $Im(\varphi)$. Demostrar que la restricción de $\psi\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, donde $\psi(p,q,r,s,t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t)$, a $Im(\varphi)$ es un homeomorfismo;

(iv) probar que el grupo fundamental de la botella de Klein es el grupo de dos generadores, con la relación siguiente: $G = \{a^m b^{2n+\varepsilon} : m, n \in \mathbb{Z}, \varepsilon = 0 \text{ ó } 1, ba = a^{-1}b\}$.

2.- Sean la esfera $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, p y q dos enteros positivos coprimos y la aplicación $h\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$ definida por $h(z_1, z_2) = (z_1.e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2.e^{\frac{2\pi i q}{p}})$.
Probar que h es un homeomorfismo y $h^p = 1_{\mathbb{S}^3}$.
El grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ opera sobre $\mathbb{S}^3$ por $n.(z_1, z_2) = h^n(z_1, z_2)$, para $n \in \mathbb{Z}_p$. Se pide probar

(i) la aplicación cociente $p\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ es un revestimiento. El cociente por esta acción $L(p,q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$, se llama *espacio lenticular*, y es una variedad de dimensión tres y compacta;

(ii) el grupo fundamental de $L(p,q)$ es cíclico de orden p;

(iii) $L(2,1)$ es el espacio proyectivo real de dimensión 3, $\mathbb{RP}^3$;

(iv) si $L(p,q)$ y $L(p',q')$ son homeomorfos, probar que $p = p'$. De hecho, $L(p,q)$ y $L(p',q')$ son homeomorfos si y sólo si $p = p'$ y $(q \equiv q' (\text{mód } n) \text{ ó } qq' \equiv 1 (\text{mód } n))$.

3.- Un subconjunto α de un espacio es una *curva cerrada simple*, si es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Sea $p\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ la proyección canónica. Probar que si α es una curva cerrada simple en $\mathbb{RP}^2$, entonces $p^{-1}(\alpha)$ es o bien una curva cerrada simple en $\mathbb{S}^2$ o bien la unión de dos curvas cerradas simples en $\mathbb{S}^2$.

4.- Sean $C_n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = \frac{1}{n}\right\}$ para $n \in \mathbb{N}$ e $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Sea X el espacio cociente obtenido a partir de Y, al identificar los puntos $\left\{(1, 0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$ a un punto b. Probar que si $p\colon (E, e_0) \longrightarrow (X, b)$ es un espacio de revestimiento, entonces E no es simplemente conexo. De otra manera, se pide probar que X no posee espacio de revestimiento universal.

5.- Explicar porque los siguientes no son espacios de revestimiento

(i) $p\colon [-1,1] \longrightarrow [0,1]$, donde $p(x) = |x|$;

(ii) $p\colon L \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donde $p(x,y) = \exp(x+y)$ y $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z} \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$;

(iii) $p\colon \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{T}^2$, restricción de la aplicación exponencial al plano privado de un punto.

6.- Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f_k\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $f_k(z) = z^k$. Se pide:

(i) si σ es un lazo en $\mathbb{S}^1$ basado en 1 y de grado n, probar que $f_k \circ \sigma$ es un lazo en $\mathbb{S}^1$ basado en 1;

(ii) ¿cuál es el grado del camino $f_k \circ \sigma$?

(iii) describir el homomorfismo $\pi_1(f_k)\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

Homología Singular

Firme, bajo mi pie, cierta y segura,
de piedra y música te tengo;
no como entonces, cuando a cada instante
te levantabas de mi sueño.

"Cumbre"
José Hierro (1922-2002)

El primer grupo de homotopía estudia *propiedades de conexión*. En un cierto sentido, detecta *agujeros*, ya que, por ejemplo distingue $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{T}^2$, es decir, reconoce el agujero obvio del toro; la esfera y el toro son superficies que limitan *agujero* del espacio de dimensión tres, pero no nos referimos aquí a ése.

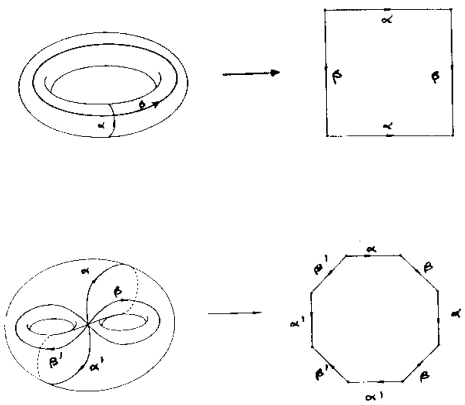
Si trazamos una curva cerrada simple sobre el plano, ésta determina una parte interior y otra exterior. Es decir, esta curva es la frontera común de dos porciones disjuntas del plano. Si hacemos lo mismo sobre la superficie de una esfera, de nuevo una curva cerrada simple es la frontera común de dos porciones disjuntas de esta superficie. Para contrastar esta situación, podemos hacer lo mismo sobre la superficie del toro: si denotamos por α y β los dos generadores del grupo fundamental de $\mathbb{T}^2$, la curva α no divide el toro en dos partes disjuntas, es decir, α no es la frontera de dos zonas separadas de $\mathbb{T}^2$.

La posibilidad de trazar una curva cerrada sobre una superficie sin que la divida en dos partes disjuntas, es claramente una propiedad topológica: si S es una superficie, σ una curva cerrada sobre S, S' es una superficie homeomorfa a S y σ' es la curva que corresponde a σ sobre S' por ese homeomorfismo, entonces σ divide a S en dos partes disjuntas, si y sólo si σ' hace lo propio sobre S'.

Esta propiedad topológica invariante es una manera de distinguir dos superficies distintas. No es un examen demasiado preciso, por supuesto, ya que hay algunas superficies topológicas diferentes, para las que una tal curva puede trazarse.

¿Cómo puede refinarse esta prueba? Si comparamos el toro $\mathbb{T}^2$ con la superficie compacta de género dos $\mathbb{T}_2$ (con generadores α, β y α', β' y con las notaciones obvias), y se corta el toro por α y β, estamos llevando el toro sobre un rectángulo en el plano.

Si se hace lo mismo con la superficie compacta de género dos, no puede llevarse sobre el plano la figura resultante, y se pueden hacer aún otros dos cortes por α' y β', hasta poder llevar la figura resultante sobre $\mathbb{R}^2$.
Estos ejemplos sugieren que se puede asignar una medida numérica al hecho de *dividir* o *ser frontera* de porciones de superficie para una curva cerrada. El número maximal de curvas cerradas a lo largo de las cuales la superficie puede cortarse sin dividirla en dos o más partes disjuntas, es claramente una propiedad topológica.



Para generalizar lo que acabamos de exponer para superficies a otros espacios, consideraremos no sólo cuando ciertas curvas cerradas son frontera o no, sino también cuando determinados *trozos* de variedades cerradas de dimensiones arbitrarias y embebidas en el espacio ambiente, son o no frontera de algún subespacio.

La homología es un modo de contar agujeros de cualquier dimensión en un espacio topológico, y en ese sentido, es una medida de la complejidad de dicho espacio.

Con la teoría de homología, vamos a pasar de espacios topológicos a una familia numerable de grupos abelianos $\{H_n(X) : n \geq 0\}$, de modo que toda aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ tenga asociado para $n \geq 0$ un homomorfismo $H_n(f)\colon H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, verificando las siguientes propiedades

(i) si f es una equivalencia de homotopía (en particular, si f es un homeomorfismo), $H_n(f)$ es un isomorfismo; es decir, la estructura de $H_n(X)$ depende sólo del tipo de homotopía del espacio;

(ii) si $f_1 \simeq f_2$, entonces $H_n(f_1) = H_n(f_2)$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

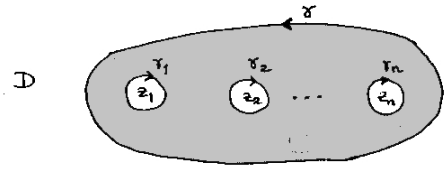
(iii) $H_0(X)$ indica el número de componentes conexas por caminos de X y si $n > 0$, $H_n(X)$ tiene algo que ver con una cierta *conexión de orden superior*;

(iv) si X es conexo por caminos, $H_1(X)$ es el *abelianizado* de $\pi_1(X)$;

(v) si X es una n–variedad compacta y conexa, el grupo $H_n(X)$ es cíclico infinito y $H_q(X) = 0$, para $q > n$.

Una buena manera de entender la homología está dada por el teorema de Green: sea D un disco abierto en $\mathbb{R}^2$ del que se han eliminado un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n$. Supongamos que existen curvas cerradas $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ en D como en la figura.

Cada γ_i es una curva cerrada simple que tiene a z_i en su interior y el resto de los puntos z_j (para $j \neq i$) fuera; todos los γ_i están situados en el interior de γ. Si γ está orientada en sentido antihorario, entonces las curvas γ_i están orientadas en el sentido de las agujas del reloj.



El Teorema de Green asegura, con ciertas hipótesis de diferenciabilidad sobre estas curvas y sobre funciones $P, Q\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, que

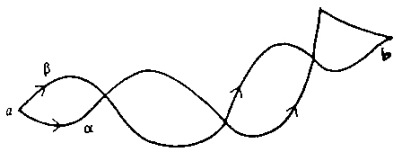
$$\int_{\gamma}(Pdx+Qdy)+\int_{\gamma_1}(Pdx+Qdy)+\cdots+\int_{\gamma_n}(Pdx+Qdy) = \int_R\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

donde R es la región sombreada en la figura.

Parece tentador escribir la suma de las integrales de línea más concisamente como

$$\text{“}\int_{\gamma+\gamma_1+\cdots+\gamma_n}(Pdx+Qdy)\text{”}$$

Por otro lado, en vez de describir como son las orientaciones sobre cada curva, podríamos usar coeficientes con signo para indicarlo. Si además no se exige que las curvas sean simples y se permite que cada curva γ_i dé varias vueltas alrededor de z_i, podemos admitir también combinaciones $\mathbb{Z}$–lineales de curvas cerradas en D.



Dados dos puntos $a, b \in D$, ¿es la integral de línea $\int_{\beta}(Pdx+Qdy)$ independiente del camino β elegido de a a b? De otro modo, si α es un segundo camino en D de a a b, ¿es $\int_{\beta}(Pdx+Qdy) = \int_{\alpha}(Pdx+Qdy)$? Estos dos caminos son ejemplos de lo que más adelante llamaremos *cadenas*. Claramente, si $\gamma = \beta - \alpha$ (vamos de a a b por β y luego regresamos invirtiendo α, es decir, $\gamma = \overline{\alpha} * \beta$) las dos integrales de línea tienen el mismo valor si y sólo si $\int_{\gamma}(Pdx+Qdy) = 0$.

Todos estos argumentos nos conducen a trabajar con caminos cerrados - que son ejemplos de lo que después llamaremos *ciclos* - y el teorema de Green propone que consideremos uniones finitas de curvas cerradas orientadas: algebraicamente trabajamos con combinaciones formales $\mathbb{Z}$–lineales de ciclos. Si ahora restringimos nuestra atención a *pares de funciones exactas* (P, Q), es decir, tales que existe una función $F\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$, y por lo tanto, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, entonces el teorema afirma que la integral de línea se anula, si las curvas orientadas que aparecen forman el borde de una región R de dimensión 2 en D.

Así, estamos interesados en curvas orientadas, en curvas cerradas orientadas y en curvas frontera (es decir, una cierta unión finita de curvas cerradas orientadas). Sobre el conjunto
$S_1(D) = \{$combinaciones $\mathbb{Z} -$ lineales de curvas orientadas en $D\}$ se puede entonces definir la relación de equivalencia $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $\displaystyle\int_\beta (Pdx + Qdy) = \int_\alpha (Pdx + Qdy)$, para todos los pares exactos (P, Q). Tales combinaciones lineales α y β se dirán *homólogas*; las clases de equivalencia de tales combinaciones lineales se llamarán *clases de homología*. Por lo comentado antes, α y β son homólogos precisamente cuando $\alpha - \beta$ es un borde. Luego, la integración es independiente de caminos que *viven* en la misma clase de homología.

Hay análogos en dimensiones superiores a esta discusión: los teoremas de Stokes y Gauss en dimensiones dos y tres; y hay una versión para integración sobre variedades diferenciables de dimensión arbitraria.

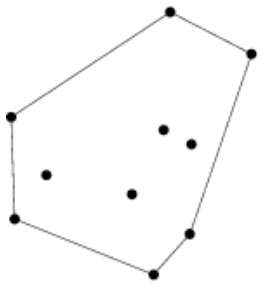
5.1. Preliminares afines

Definición 5.1. Un subconjunto A del espacio euclídeo es *afin*, si para cada $x, y \in A$, la recta por x e y está contenida en A. Y es *convexo*, si el segmento por x e y está en A.

Obviamente, todo conjunto afín es convexo. El vacío y los puntos son trivialmente afines.

Teorema 5.1. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ convexos (respectivamente, afines), entonces $\bigcap_{j\in J} X_j$ es también convexo (respectivamente, afín).*

Tiene sentido hablar del subconjunto convexo (respectivamente, afín) en $\mathbb{R}^n$ generado por X en $\mathbb{R}^n$, es decir, la intersección de los subconjuntos convexos (respectivamente, afines) de $\mathbb{R}^n$ conteniendo a X. Al subconjunto convexo generado por X, $[X]$, se le llama la *envolvente convexa* de X y existe, pues $\mathbb{R}^n$ es afín, luego convexo.
Vamos a describir el conjunto $[X]$, para X finito.



Definición 5.2. Una *combinación afin* de $m+1$ puntos $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ es otro punto $x \in \mathbb{R}^n$, $x = t_0p_0 + \cdots + t_mp_m$, donde $t_0 + \cdots + t_m = 1$. Una *combinación convexa* es una afín, para la que $t_i \geq 0$, para cada $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Teorema 5.2. *Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto convexo formado por esos puntos o m–símplice afín de vértices $\{p_0, \ldots, p_m\}$, $[p_0, \ldots, p_m]$,* es la familia de todas las combinaciones lineales convexas de los puntos $p_0, \ldots, p_m$.

Corolario 5.3. *El conjunto afin generado por $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, consiste en todas las combinaciones afines de esos puntos.*

Definición 5.3. Un conjunto ordenado de puntos se llama *afinmente independiente*, si el conjunto $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \ldots, p_n - p_0\}$, es un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$.

Todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ es afinmente independiente; el recíproco no es cierto, ya que un conjunto linealmente independiente junto con el origen, es afinmente independiente.

Ejemplos 5.1. Se tienen los siguientes ejemplos

(i) $\{p_0\}$ es afinmente independiente, pues no existen puntos de la forma $p_i - p_0$ para $i \neq 0$ y el conjunto vacío $\emptyset$ es linealmente independiente;

(ii) $\{p_0, p_1\}$ es afinmente independiente si $p_0 \neq p_1$;

(iii) $\{p_0, p_1, p_2\}$ es afinmente independiente, si los puntos no son colineales;

(iv) $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ es afinmente independiente, si los puntos no son coplanarios.

Teorema 5.4. *Sobre un conjunto ordenado de puntos $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ son equivalentes las siguientes condiciones*

(i) $\{p_0, \ldots, p_m\}$ es afinmente independiente;

(ii) si $\{s_0, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$ satisface la relación $s_0p_0 + \cdots + s_mp_m = 0$ y $s_0 + \cdots + s_m = 0$, entonces $s_0 = \cdots = s_m = 0$;

(iii) para cada $x \in A$, el conjunto afín generado por $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, tiene una única expresión como una combinación afín $x = t_0p_0 + \cdots + t_mp_m$ y $t_0 + \cdots + t_m = 1$.

Corolario 5.5. *La* independencia afin es una propiedad del conjunto $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, que no resulta del orden dado.

Corolario 5.6. *Si A es el conjunto afin de $\mathbb{R}^n$ generado por el conjunto afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$, entonces A es un trasladado de un subespacio vectorial V m–dimensional de $\mathbb{R}^n$, $A = V + x_0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Definición 5.4. Sea el conjunto afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y sea A el conjunto afin generado por esos puntos. Si $x \in A$, por el teorema 5.4, sabemos que existe una única $(m+1)$–tupla $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ tal que $t_0 + \cdots + t_m = 1$ y $t_0 p_0 + \cdots + t_m p_m = x$. Los coeficientes de esta $(m+1)$–tupla, se llaman *coordenadas baricénticas* de x, relativas al conjunto ordenado $\{p_0, \ldots, p_m\}$. Estas coordenadas no dependen del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 5.7. *Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto afinmente independiente, entonces cada $x \in [p_0, \ldots, p_m]$ tiene una expresión única de la forma $x = t_0 p_0 + \cdots + t_m p_m$, para $t_0 + \cdots + t_m = 1$ y $t_i \geq 0$, $i \in \{0, \ldots, m\}$.*

Definición 5.5. Si $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto afinmente independiente, el *baricentro* de $[p_0, \ldots, p_m]$ es $\frac{1}{m+1}(p_0 + \ldots p_m)$ es decir, su centro de gravedad.

Ejemplos 5.2. Algunos ejemplos de baricentros son

(i) p_0 es el baricentro de $[p_0]$;

(ii) el baricentro del segmento $[p_0, p_1]$ es el punto medio de este segmento, $\frac{1}{2}(p_0 + p_1)$;

(iii) el baricentro de $[p_0, p_1, p_2]$ (triángulo de vértices p_0, p_1 y p_2, junto con su interior) es el punto $\frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$;

(iv) el baricentro de $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ (tetraedro sólido de vértices p_0, p_1, p_2 y p_3) es el punto $\frac{1}{4}(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)$. La cara triangular opuesta a p_i, consiste en los puntos cuya i–ésima coordenada baricéntrica es 0;

(v) para $i = 1, \ldots, n$, si $e_i = (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, el conjunto de $n+1$ puntos $\{e_0, \ldots, e_n\}$ es afinmente independiente (incluso linealmente independiente). $[e_0, \ldots, e_n]$ consiste en las combinaciones lineales convexas $x = t_0 e_0 + \cdots + t_n e_n$. Las coordenadas baricéntricas y cartesianas coinciden y $[e_0, \ldots, e_n] = \Delta_n$ es el *símplice geométrico estándar*.

Definición 5.6. Sean una familia de puntos afinmente independiente $\{p_0, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}^n$ y A el conjunto afín generado por ellos. Una aplicación afín $T\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (para algún $k \in \mathbb{N}$), es una función satisfaciendo $T(t_0 p_0 + \cdots + t_m p_m) = t_0 T(p_0) + \cdots + t_m T(p_m)$, donde $t_0 + \cdots + t_m = 1$. La restricción de T a $[p_0, \ldots, p_m]$ se llama también una aplicación afín.

Así, las aplicaciones afines preservan combinaciones afines y por lo tanto, combinaciones convexas. Es claro que una aplicación afín está determinada por sus valores sobre un conjunto afinmente independiente, su restricción a un símplice se identifica por sus valores sobre los vértices. Por otro lado, la unicidad de las coordenadas baricéntricas relativas a $\{p_0, \ldots, p_m\}$, prueba que una tal aplicación afín existe, porque la fórmula dada está bien definida.

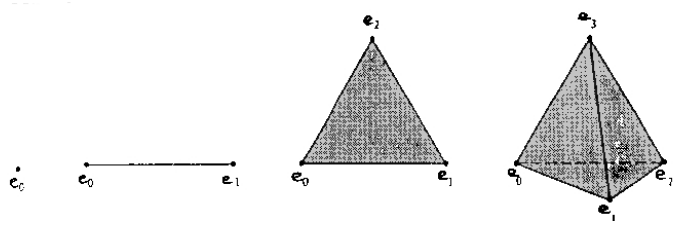
Teorema 5.8. *Si $[p_0, \dots, p_m]$ es un m–símplice, $[q_0, \dots, q_n]$ es un n–símplice y se tiene una función arbitraria $f\colon \{p_0, \dots, p_m\} \longrightarrow [q_0, \dots, q_n]$, entonces existe una única aplicación afín $T\colon [p_0, \dots, p_m] \longrightarrow [q_0, \dots, q_n]$, tal que $T(p_i) = f(p_i)$, para $i \in \{0, \dots, m\}$.*

5.2. Teoría singular

En todo lo que sigue, puede reemplazarse el grupo $\mathbb{Z}$ por cualquier anillo ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc), obteniéndose teorías de homología *con coeficientes*.

Se considera un producto numerable de copias de $\mathbb{R}$, $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^\infty$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, los vectores infinitos $e_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ y $e_n = (0, \dots, \overset{(n)}{1}, \dots, 0, \dots)$, para n entero positivo.

Identificamos $\mathbb{R}^n$ con el subespacio de $\mathbb{R}^\infty$ que posee todas las componentes mayores que n nulas. Para cada $n \geq 0$, sea Δ_n el *n–símplice geométrico estándar*, es decir, la envolvente convexa de los puntos $e_0, e_1, e_2, \dots e_n$. Así, Δ_0 es un punto, Δ_1 es el intervalo unidad, Δ_2 es un triángulo (incluido su interior), Δ_3 es un tetraedro, etc. Observar además que Δ_n es homeomorfo al disco cerrado unidad $\mathbb{D}^n$, para $n > 0$.



Definición 5.7. Sean $p_0, p_1, \dots, p_n$ puntos linealmente independientes en un espacio afin E. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ la única aplicación afín que lleva e_i en p_i, para $i \in 0, 1, \dots, n$. La restricción de f a Δ_n, $f|_{\Delta_n}$, se denota por $(p_0 p_1 \dots p_n)$. En particular, la identidad $(e_0 e_1 \dots e_n) = 1_{\Delta_n}$, se denota por δ_n.

Definición 5.8. Sea X un espacio topológico. Un *n–símplice singular* en X, es una aplicación continua $f\colon \Delta_n \longrightarrow X$.
Es decir, un 0–símplice singular puede identificarse con un punto en X, un 1–símplice singular puede pensarse con un camino en X, un 2–símplice singular es una aplicación del triángulo estándar en X. Observar que $f(\Delta_n)$ puede incluso degenerar en un punto. Por ejemplo, la aplicación afín $(p_0 p_1 \dots p_n)\colon \Delta_n \longrightarrow E$, es un n–símplice singular en el espacio afín E.

Vamos a aprender a sumar y restar estos símplices de manera puramente formal.

Definición 5.9. Se considera el grupo abeliano libre generado por los n–símplices singulares, $S_n(X)$, cuyos elementos son combinaciones lineales formales del tipo $\sum_\sigma n_\sigma.\sigma$, es decir, de n–símplices singulares σ y cuyos coeficientes $n_\sigma \in \mathbb{Z}$ son todos nulos, salvo una familia finita de ellos

$$S_n(X) = \{\sum_\sigma n_\sigma.\sigma : \sigma \text{ es } n - \text{símplice singular}, \quad n_\sigma \in \mathbb{Z}, \quad n_\sigma = 0 \quad pct\sigma\}.$$

$S_n(X)$ se llama el conjunto de las n–*cadenas singulares*. Observar que la única manera de que una tal suma sea nula, es que lo sean todos sus coeficientes.

Definición 5.10. Sean $n > 0$ y $0 \leq i \leq n$. La aplicación afin $\varepsilon_n^i \colon \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$, definida por $\varepsilon_n^i = (e_0 e_1 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_n)$, es decir,

$$\varepsilon_n^i(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

se llama i-*ésima cara geométrica* de Δ_n y lleva Δ_{n-1} homeomórfica y afinmente sobre la cara (desde el punto de vista geométrico usual) opuesta al vértice e_i en Δ_n.

Lema 5.9. *Si $j < i$, se da la igualdad $\varepsilon_{n+1}^i \circ \varepsilon_n^j = \varepsilon_{n+1}^j \circ \varepsilon_n^{i-1} \colon \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_{n+1}$.*

Definición 5.11. Si σ es un n–símplice singular en X, se define la i–*ésima cara*, $\sigma^{(i)}$ de σ, como el $(n-1)$–símplice singular definido por $\sigma \circ \varepsilon_n^i$. En particular, $\varepsilon_n^i = (\delta_n)^{(i)}$.
Si X es un espacio afín, y $\sigma = (p_0 p_1 \ldots p_n)$, entonces $\sigma^{(i)} = (p_0 p_1 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_n)$.

Por el momento, estamos considerando caras no orientadas.

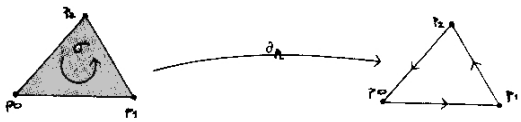
Definición 5.12. La *frontera* de un n–símplice singular σ, es la $(n-1)$–cadena singular definida por $\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$, es decir, es la suma formal de sus caras, dotadas de signo.

Ejemplos 5.3. Algunos ejemplos de fronteras son

(i) la frontera del 2–símplice $(e_0 e_1 e_2)$ es $\partial_2(e_0 e_1 e_2) = (e_1 e_2) - (e_0 e_2) + (e_0 e_1)$ y puede interpretarse como la suma algebraica de los bordes del triángulo estándar, con los signos elegidos de modo que se empieza por e_0 y se viaja alrededor de un *lazo* hasta volver a llegar a e_0. Observar que en realidad no se trata de un lazo, sino de una suma formal con signo de tres caminos;

(ii) si X es un espacio afín y $\sigma = (p_0 p_1 \ldots p_n)$, entonces

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \widehat{p_i} \dots p_n).$$



Por linealidad, se puede extender el operador frontera a un homomorfismo de grupos abelianos, $\partial_n \colon S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$, donde $\partial_n \left(\sum_\sigma n_\sigma . \sigma \right) = \sum_\sigma n_\sigma . \partial_n(\sigma)$.

Observación 5.1. La frontera de una 0–cadena, se define como 0, es decir, convenimos que $S_{-1}(X) = 0$.

Tenemos así el llamado *complejo de cadenas singulares* $(S_*(X), \partial_*)$,

$$\dots \overset{\partial_{n+1}}{\to} S_n(X) \overset{\partial_n}{\to} S_{n-1}(X) \overset{\partial_{n-1}}{\to} S_{n-2}(X) \to \dots \overset{\partial_2}{\to} S_1(X) \overset{\partial_1}{\to} S_0(X) \overset{\partial_0}{\to} 0,$$

que verifica la siguiente importante propiedad

Lema 5.10. *Para cada $n \geq 0$, es $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, es decir, $Im(\partial_{n+1}) \subset Ker(\partial_n)$.*

Esto da lugar a las siguientes definiciones

Definición 5.13. Una n–cadena singular $c \in S_n(X)$ es un *n–ciclo*, si $\partial_n(c) = 0$, es decir, si $c \in Ker(\partial_n)$.
Si existe $c' \in S_{n+1}(X)$, tal que $\partial_{n+1}(c') = c$, se dice que c es un *n–borde*, de otro modo, $c \in Im(\partial_{n+1})$.

Observación 5.2. Si se denota por $Z_n(X)$ el conjunto de los n–ciclos y por $B_n(X)$ el conjunto de los n–bordes, claramente ambos son subgrupos de $S_n(X)$ y a su vez $B_n(X)$ es un subgrupo de $Z_n(X)$.

Para detectar agujeros en X, deberíamos considerar sólo ciclos que no son bordes, puesto que los bordes son ciclos triviales. De hecho, el teorema de Green ya sugiere esto: la integral de línea $\int_\gamma (Pdx + Qdy)$ (donde (P, Q) es un par exacto) es nula, cuando γ es unión de curvas orientadas que constituyen el borde de una región R en el disco D.

Así, se define la siguiente relación de equivalencia sobre $S_n(X)$

$$c_1 \sim c_2 \text{ si existe } c_3 \in S_{n+1}(X) \text{ tal que } c_1 - c_2 = \partial_{n+1}(c_3),$$

es decir, si c_1 y c_2 difieren en un borde, esto es, si $c_1 - c_2 \in B_n(X)$.

Definición 5.14. Si $c_1 \sim c_2$, se dice que son *n–cadenas homólogas*. Como $B_n(X)$ es un subgrupo de $Z_n(X)$, tiene sentido hablar del grupo cociente, $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$, y se llama *n–ésimo grupo de homología singular de X*.

Se verifica el siguiente **axioma de dimensión**

Lema 5.11. *Si X se reduce a un punto,*

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } n = 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

X se llama *acíclico*, si $H_n(X) = 0$, para $n > 0$.

Proposición 5.12. *Sea $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto de las componentes conexas por caminos de X. Entonces, para cada $n \geq 0$, existe un isomorfismo canónico*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda).$$

Lema 5.13. *Si X es conexo por caminos, $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.*

Proposición 5.14. *En las condiciones de la proposición 5.12, $H_0(X) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$.*

Observación 5.3. Por la proposición 5.12, podemos suponer a partir de ahora que X es conexo por caminos.

Nuestro siguiente objetivo, es probar que H_n es un functor de $\mathfrak{Top}$ en $\mathfrak{Ab}$. Sea para ello $f\colon X \longrightarrow Y$ continua y $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$ un n–símplice, entonces, $f \circ \sigma\colon \Delta_n \longrightarrow Y$ es un n–símplice en Y. Si se extiende esta aplicación linealmente, tenemos un homomorfismo de grupos $S_n(f)\colon S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$, definido del modo $S_n(f)(\sum_\sigma n_\sigma.\sigma) = \sum_\sigma n_\sigma.(f \circ \sigma)$. Y se verifica

Lema 5.15. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, para $n \geq 0$, es $S_{n-1}(f) \circ \partial_n^X = \partial_n^Y \circ S_n(f)$.*

Lema 5.16. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ es continua, entonces para $n \geq 0$, es*

$$S_n(f)(Z_n(X)) \subset Z_n(Y) \quad \textit{y} \quad S_n(f)(B_n(X)) \subset B_n(Y).$$

Del lema anterior, se deduce fácilmente que

Teorema 5.17. *Para $n \geq 0$, H_n es un functor de $\mathfrak{Top}$ en $\mathfrak{Ab}$.*

Corolario 5.18. *Si X e Y son homeomorfos, entonces para cada $n \geq 0$, los grupos $H_n(X)$ y $H_n(Y)$ son isomorfos.*

Observación 5.4. Cada grupo de homología es pues un invariante del espacio X. Si se comparan los functores π_0 y H_0, $\pi_0(X)$ es el conjunto de las componentes conexas por caminos de X. $H_0(X)$ lleva exactamente la misma información, ya que según la proposición 5.14, se trata de un grupo abeliano libre con tantos con tantos generadores como componentes conexas.

5.3. El teorema de invarianza por homotopía

Veamos que los grupos de homología no son sólo invariantes topológicos, sino también invariantes de homotopía. Para ello, nuestra meta es probar que si $f, g\colon X \longrightarrow Y$ son homótopas, es $H_n(f) = H_n(g)$, para $n \geq 0$. En efecto, sea $H : f \simeq g$ la homotopía que las relaciona. Para $t \in [0,1]$ definimos $\lambda_t\colon X \longrightarrow X \times [0,1]$ por $\lambda_t(x) = (x,t)$; claramente, $\{\lambda_t : t \in [0,1]\}$ es una homotopía entre las aplicaciones constantes λ_0 y λ_1.
Además, $H \circ \lambda_t\colon X \longrightarrow Y$, verifica que $H \circ \lambda_0 = f$ y $H \circ \lambda_1 = g$, luego para $n \geq 0$, es $H_n(f) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_0)$ y $H_n(g) = H_n(H) \circ H_n(\lambda_1)$.

Por la anterior identidad, si probamos que para cada $n \geq 0$, es $H_n(\lambda_0) = H_n(\lambda_1)$, entonces quedará demostrado el resultado deseado.
Para ello, se define el *operador prisma*, $P_n^X : S_n(X) \longrightarrow S_{n+1}(X \times [0,1])$, un homomorfismo cumpliendo la llamada *relación prismática*

$$\partial_{n+1}^{X\times[0,1]} \circ P_n^X + P_{n-1}^X \circ \partial_n^X = S_n(\lambda_1) - S_n(\lambda_0), \quad n \geq 0 \tag{5.1}$$

Si λ_1 y λ_0 verifican la relación (5.1), se dice que son *homótopos en cadenas*.

Lema 5.19. *Si se cumple (5.1), entonces para cada $n \geq 0$, es $H_n(\lambda_0) = H_n(\lambda_1)$.*

Así, vamos a definir el operador prisma

Lema 5.20. *Si $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$ es un n–símplice singular en X, entonces $\sigma = S_n(\sigma)(\delta_n)$.*

Para conocer P_n^X para $n \geq 0$, bastará con conocer $P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ y definir entonces

$$P_n^X \circ S_n(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}.$$

Con esta formulación, $P_n^X \circ S_n(\sigma)(\delta_n) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$, y usando el lema 5.20,

$$P_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n). \tag{5.2}$$

De hecho, (5.2) equivale a que para todo par de espacios X e Y, cada aplicación continua $f\colon X \longrightarrow Y$ y cada $n \geq 0$, sea

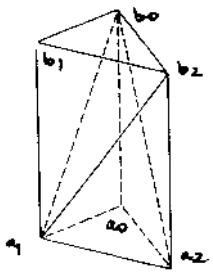
$$P_n^Y \circ S_n(f) = S_{n+1}(f \times 1_{[0,1]}) \circ P_n^X. \tag{5.3}$$

La identidad (5.3) se llama *condición de naturalidad* para el operador prisma.

Para $0 \leq i \leq n$, denotamos $a_i = (e_i, 0)$ y $b_i = (e_i, 1)$ y definimos

$$P_n^{\Delta_n}(\delta_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (a_0 \ldots a_i b_i \ldots b_n),$$

donde claramente $(a_0 \ldots a_i b_i \ldots b_n)\colon \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n \times [0,1]$.



Proposición 5.21. *Con las definiciones anteriores, el operador prisma verifica la relación (5.1).*

Observación 5.5. Intuitivamente, la propiedad expresada por la relación (5.1) dice que la frontera orientada $\partial_{n+1}^{\Delta_n \times [0,1]} \circ P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ del prisma sólido $P_n^{\Delta_n}(\delta_n)$ es precisamente la unión de las tapas superior e inferior del prisma, salvo un *factor corrector* $P_{n-1}^{\Delta_n} \circ \partial_n^{\Delta_n}(\delta_n)$, formado por las paredes laterales del prisma.

Corolario 5.22. *Si X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $H_n(X)$ es isomorfo a $H_n(Y)$, para cada $n \geq 0$.*

Corolario 5.23. *Si X es contráctil, entonces $H_n(X) = 0$, para cada $n > 0$.*

5.4. El teorema de Hurewicz

Para un espacio X y $x_0 \in X$, buscamos relacionar los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $H_1(X)$. Esta relación viene dada a través del **teorema de Hurewicz**

Teorema 5.24. *Existe un homomorfismo de grupos $\chi\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$, la* aplicación de Hurewicz, que lleva la clase de homotopía de un camino γ basado en x_0 en la clase de homología del 1–símplice singular γ. Además, si X es conexo por caminos,

- χ es sobreyectiva y
- $Ker(\chi)$ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X, x_0)$,

es decir, $H_1(X)$ es el abelianizado de $\pi_1(X, x_0)$.

Corolario 5.25. *Si X es conexo por caminos, χ es un isomorfismo si y sólo si $\pi_1(X)$ es abeliano.*

Ejemplos 5.4. Como consecuencia del teorema de Hurewicz, obtenemos

- $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$;
- $H_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;
- de $\pi_1(\mathbf{8}) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, se deduce que $H_1(\mathbf{8}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$;
- si X es simplemente conexo, entonces $H_1(X) = 0$, en particular $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$, para $n > 1$.

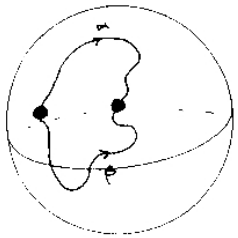
5.5. Homología relativa

El concepto de homología relativa es análogo al de cociente de un grupo por un subgrupo. Si $A \subset X$, dos cadenas en X se dirán *iguales (mod A)*, si su diferencia es una cadena en A. Una cadena en X será un *ciclo (mod A)*, si su borde está contenido en A. Esto refleja la estructura de $X - A$ y el modo en que está conectada con A. En un sentido, los cambios en el interior de A (fuera de su frontera con $X - A$) no deberían alterar los grupos de homología de $X - A$.

La homología trata, por ejemplo, de como una superficie puede dividirse estudiando curvas cerradas sobre ella. Si lo que se estudia es una superficie con borde, deberán considerarse entonces curvas abiertas, como lo indica el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.1. Sea X una esfera $\mathbb{S}^2$, con dos *agujeros*, es decir, privada entornos de dos puntos. Toda curva cerrada sobre X divide este espacio en dos partes disjuntas.

Pero si consideramos curvas abiertas α y β uniendo dos puntos en el borde de cada uno de los agujeros, es claro que sólo una de ellas no divide X en dos partes disjuntas. Pero, si se toman ambas a la vez, si que lo hacen. Si la esfera tuviera más agujeros, deberíamos dibujar más curvas abiertas uniendo los bordes de los *huecos* para dividir la superficie en dos partes disjuntas.



Los grupos de homología relativos se introducen en un espacio X, para intentar generalizar y hacer más precisa la noción de *propiedades con borde* de las curvas cerradas sobre una superficie: la esfera X con dos agujeros sería el espacio a estudiar y las fronteras de los entornos eliminados constituirían un subespacio $A \subset X$. Un sistema de *cortes abiertos* uniendo puntos de A, *dividirán* X, si los cortes realizados junto con una porción de los bordes de los agujeros forman una frontera de X. Vamos a formalizar a continuación estas nociones

Definición 5.15. Sea $A \subset X$. Para cada $n \geq 0$, $S_n(A)$ es un subgrupo de $S_n(X)$, que consiste en las combinaciones lineales de n–símplices singulares $\sigma\colon \Delta_n \longrightarrow X$, tales que $\sigma(\Delta_n) \subset A$. Se puede entonces considerar el grupo cociente $S_n(X)/S_n(A)$. Además, como el operador ∂_n envía $S_n(A)$ en $S_{n-1}(A)$, induce un homomorfismo sobre los espacios cociente,

$$\overline{\partial_n}\colon S_n(X)/S_n(A) \longrightarrow S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A),$$

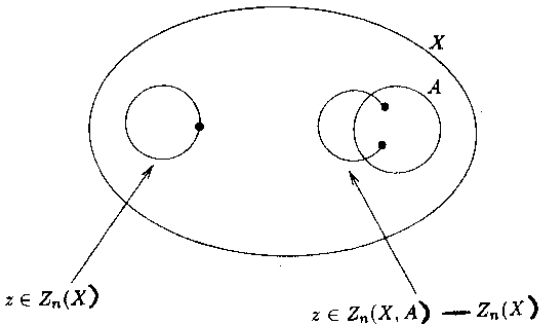
de modo que si $c \in S_n(X)$, es $\overline{\partial_n}(c + S_n(A)) = \partial_n(c) + S_{n-1}(A)$.

Por otro lado, como $\overline{\partial_{n-1}} \circ \overline{\partial_n}$ es la aplicación nula, $Im(\overline{\partial_{n+1}})$ es un subgrupo de $Ker(\overline{\partial_n})$, y se puede considerar el grupo cociente $Ker(\overline{\partial_n})/Im(\overline{\partial_{n+1}})$, que se denota por $H_n(X, A)$ y se llama *n–ésimo grupo de homología relativa de X módulo A.*

Se puede obtener directamente este grupo a partir de $S_n(X)$, de la manera siguiente: sea $c \in S_n(X)$. Si $\overline{\partial_n}(c + S_n(A)) = 0$, claramente $\partial_n(c) \in S_{n-1}(A)$. Por lo tanto, el conjunto

$$Z_n(X, A) = \{c \in S_n(X) : \overline{\partial_n}(c + S_n(A)) = 0\} = \{c \in S_n(X) : \partial_n(c) \in S_{n-1}(A)\},$$

es un subgrupo de $S_n(X)$, cuyos elementos se llaman *n–ciclos relativos de X módulo A.*



Luego, si denotamos $\pi_n \colon S_n(X) \longrightarrow S_n(X)/S_n(A)$ a la aplicación cociente, se puede expresar $Z_n(X, A) = \pi_n^{-1}(Ker(\overline{\partial_n}))$. Y, ¿quién es entonces $\pi_n^{-1}(Im(\overline{\partial_{n+1}}))$? Es un subgrupo de $S_n(X)$, el grupo de los *n–bordes relativos en X módulo A*, y que es precisamente

$$B_n(X, A) = \{c \in S_n(X) : \text{ existe } c_A \in S_n(A) \text{ tal que } c \text{ es homólogo (en } X) \text{ a } c_A\}.$$

Claramente $S_n(A) \subset B_n(X, A)$. Cuando $c - c' \in B_n(X, A)$, se escribe $c \sim c'(\text{mod } A)$. Y se verifica el siguiente resultado

Lema 5.26. $H_n(X, A) \simeq Z_n(X, A)/B_n(X, A)$.

Observación 5.6. Es $S_n(\emptyset) = 0$, para todo $n \geq 0$, y entonces $H_n(X, \emptyset) = H_n(X)$. Luego, todos los resultados de homología relativa engloban los casos ya estudiados de *homología absoluta*.

Dada una aplicación entre pares de espacios $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, el homomorfismo inducido en cadenas $S_n(f) \colon S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$ envía $S_n(A)$ en $S_n(B)$, y por lo tanto, lleva $Z_n(X, A)$ en $Z_n(Y, B)$ y $B_n(X, A)$ en $B_n(Y, B)$.

Por paso al cociente da lugar a un homomorfismo $H_n(f) \colon H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$, tal que $H_n(1_X) = 1_{H_n(X,A)}$ y $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$, de donde

Lema 5.27. *Los grupos de homología relativa son functoriales en (X, A).*

Proposición 5.28. *Si $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es la familia de las componentes conexas por caminos de X y $A_\lambda = A \cap X_\lambda$, entonces existe un isomorfismo canónico*

$$H_n(X, A) \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda, A_\lambda).$$

Proposición 5.29. *Si X es conexo por caminos y $A \neq \emptyset$, entonces $H_0(X, A) = 0$.*

Corolario 5.30. *Con las notaciones de la proposición 5.28, $H_0(X, A)$ es un grupo abeliano libre con tantos generadores como índices tales que $A_\lambda = \emptyset$.*

5.6. Sucesión exacta larga de homología

La propiedad más importante de los grupos de homología relativa $\{H_n(X, A)\}_{n\geq 0}$, es la existencia de un *homomorfismo de enlace*, $\delta_n \colon H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A)$, gracias al cual va a obtenerse una sucesión infinita de homomorfismos

$$\cdots \to H_n(A) \overset{H_n(i_A)}{\to} H_n(X) \overset{H_n(1_X)}{\to} H_n(X, A) \overset{\delta_n}{\to} H_{n-1}(A) \to \ldots, \tag{5.4}$$

llamada *sucesión de homología del par* (X, A). Este homomorfismo de enlace se define por $\delta_n(z + B_n(X, A)) = \partial_n(z) + B_{n-1}(A)$, para $z \in Z_n(X, A)$.

Definición 5.16. Una sucesión de grupos y homomorfismos

$$\ldots \longrightarrow G_n \xrightarrow{f_n} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_{n-2} \longrightarrow \ldots,$$

se dice *exacta*, si para cada n, es $Im(f_n) = Ker(f_{n-1})$.

Teorema 5.31. *La sucesión (5.4), de homología del par (X, A) es exacta.*

Ejemplos 5.5. Veamos algunos ejemplos que se obtienen estudiando la sucesión (5.4)

(i) si X es conexo por caminos y $A = \{x_0\}$, para cada $n > 0$, la aplicación inducida sobre los grupos de homología, $H_n(1_X) \colon H_n(X, \emptyset) \longrightarrow H_n(X, A)$, es un isomorfismo;

(ii) para $n \geq 1$, $H_n(\mathbb{S}^{k-1})$ y $H_{n+1}(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1})$ son isomorfos;

(iii) para $n > 1$, $H_1(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = 0$;

(iv) $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{Z}$.

Además

Proposición 5.32. *La sucesión de homología (5.4) es functorial en el par (X, A).*

5.6.1. Aplicaciones a retractos

Sea A un retracto de X. Veamos que en este caso, la sucesión exacta larga tiene propiedades especiales. Y recíprocamente, en muchas ocasiones se puede probar la imposibilidad de que un subespacio sea un retracto, si no verifica las condiciones que vamos a describir a continuación.

Definición 5.17. Una sucesión de grupos de la forma $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$, se llama una *sucesión exacta corta*. En tal caso, es fácil comprobar que i es un monomorfismo y j un epimorfismo. Además, $C \simeq B/Ker(j) \simeq B/Im(i) \simeq B/A$.

Definición 5.18. Una sucesión exacta corta $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$, *escinde*, si verifica cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes

(i) existe $k\colon B \longrightarrow A$, tal que $k \circ i = 1_A$,

(ii) existe $l\colon C \longrightarrow B$, tal que $j \circ l = 1_C$.

Ejemplos 5.6. Veamos algunos ejemplos de esta propiedad

(i) la sucesión exacta corta $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \to 0$, definida por $i(1) = (2,3)$ y $j(0,1) = -2$, $j(1,0) = 3$ escinde, ya que $l\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dada por $l(1) = (1,1)$ verifica las propiedades pedidas;

(ii) sin embargo, la sucesión $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$, dada por los homomorfismos $i(1) = 2$ y $j(1) = 1 + 2\mathbb{Z}$ no escinde.

Observación 5.7. La existencia de $k\colon B \longrightarrow A$, tal que $k \circ i = 1_A$, implica que i es monomorfismo y k epimorfismo. De modo similar, la existencia de $l\colon C \longrightarrow B$, tal que $j \circ l = 1_C$, indica que l es monomorfismo y j epimorfismo. Además, $Ker(k) = Im(l)$.

Proposición 5.33. *Sea A un retracto de X y $r\colon X \longrightarrow A$ la retracción asociada. Entonces $H_n(r) \circ H_n(i_A) = 1_{H_n(A)}$, con lo que $H_n(r)$ es un epimorfismo y $H_n(i_A)$ un monomorfismo. Además $H_n(X) \simeq Im(H_n(i_A)) \oplus Ker(H_n(r))$. Por otro lado, la sucesión exacta larga de homología del par (X, A), se rompe en una sucesión exacta corta escindida,*

$$0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(i_A)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(1_X)} H_n(X, A) \longrightarrow 0,$$

donde, con la notación de la definición 5.18, es $k = H_n(r)$. Como consecuencia de todo lo anterior, es $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(X, A)$.

5.6.2. Homotopías en pares

Definición 5.19. Dos aplicaciones $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ se llaman *homótopas en pares*, si $f, g\colon X \longrightarrow Y$ son homótopas, a través de una homotopía

$$H\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B),$$

es decir, f se deforma en g, y en cada paso de la transformación, A se lleva en B.

Se puede cambiar la prueba correspondiente al caso general, para ver que los homomorfismos inducidos, $H_n(f), H_n(g)\colon H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ son iguales. Se define la *equivalencia de homotopía de pares* de manera evidente. Luego, si $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía entre pares, entonces $H_n(f)\colon H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ es un isomorfismo en homología relativa.

Ejemplo 5.2. Sean $X = Y = \mathbb{D}^2$ y $A = \mathbb{S}^1 \subset B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. La aplicación $1_X\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía.

Proposición 5.34. *Una homotopía entre pares $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es en particular un par de homotopías $f, g\colon X \longrightarrow Y$ y $f|_A, g|_A\colon A \longrightarrow B$.*

Sin embargo, el recíproco no es cierto

Ejemplo 5.3. Si $A = \{0, 1\} \subset X = [0, 1]$ y $B = \{(1, 0)\} \subset Y = \mathbb{S}^1$, las aplicaciones $f(x) = \exp_0(x)$ y $g(x) = (1, 0)$ no son homótopas en pares, pero $f \simeq g$ y $f|_A \simeq g|_A$.

El **lema de los cinco** es esencial para la prueba de las siguientes proposiciones

Lema 5.35. *Dado un diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos*

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"] & A_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

donde cada línea es exacta, si α_1, α_2, α_4 y α_5 son isomorfismos, entonces α_3 tambiÉn lo es.

Proposición 5.36. *Si $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una equivalencia de homotopía, las aplicaciones $f, g\colon X \longrightarrow Y$ y $f|_A, g|_A\colon A \longrightarrow B$ también lo son. De hecho, basta con que suceda esto último para que $H_n(f)\colon H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ sea un isomorfismo, para $n \geq 0$.*

Sin embargo, el recíproco no es cierto, como lo prueba el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.4. Sean $X = Y = \mathbb{D}^2$ y $A = \mathbb{S}^1 \subset B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. La aplicación $H_n(1_X)\colon H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$ es un isomorfismo en homología relativa, pero $1_X\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ no es una equivalencia entre pares.

5.6.3. Una interpretación de la homología relativa

La familia de grupos $\{H_n(X, A) : n \geq 0\}$ mide, en un cierto sentido, lo *lejos* que el homomorfismo $H_n(i_A)\colon H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ está de ser un isomorfismo. De hecho

Lema 5.37. *$H_n(i_A)\colon H_n(A) \longrightarrow H_n(X)$ es un isomorfismo para cada $n \geq 0$ si y sólo si es $H_n(X, A) = 0$ para cada $n \geq 0$.*

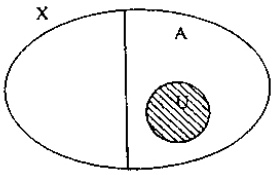
Lema 5.38. *$H_n(1_X)\colon H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A)$ es un isomorfismo, si y sólo si para cada $n \geq 0$, es $H_n(A) = 0$.*

Corolario 5.39. *Si A es un retracto por deformación de X, entonces $H_n(X, A) = 0$ para $n \geq 0$.*

5.7. Teorema de excisión

Sea $U \subset A \subset X$. Vamos a trabajar con símplices módulo A, es decir, en $H_*(X, A)$.

El *teorema de excisión* da condiciones para que *partiendo en trozos pequeños* estos símplices, podamos prescindir de la parte del símplice contenida en U, en otras palabras, no va a ser significativo lo que sucede en U. Para ello, vamos a introducir el concepto de *símplice pequeño de un cierto orden*, que definiremos a través de cubrimientos por abiertos del espacio X, $\{U_i\}_{i \in I}$, exigiendo que las imágenes de los Δ_n estén contenidas en alguno de los U_i.



Lo que pretendemos hacer es representar n–cadenas mediante símplices más pequeños en el sentido indicado anteriormente, sin cambiar las clases de homología durante el proceso.

Definición 5.20. La inclusión $j\colon (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ es una *excisión*, si induce un isomorfismo $H_n(j)\colon H_n(X - U, A - U) \longrightarrow H_n(X, A)$, para cada $n \geq 0$.

Para probar el teorema de excisión, que enunciaremos más adelante, es preciso dar un gran número de nuevas ideas. Vamos a comenzar definiendo la *subdivisión baricéntrica*.

5.7.1. Caso simplicial

Definición 5.21. Sea el n-símplice geométrico $\sigma = (a_0 a_1 \ldots a_n)\colon \Delta_n \longrightarrow \Delta_q$. Dado un punto $p \in \Delta_q$, el *cono* de σ sobre p es el $(n+1)$-símplice $p\sigma = (pa_0 a_1 \ldots a_n)\colon \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_q$. El operador cono sobre p se extiende de manera lineal sobre las n–cadenas simpliciales, con lo cual es un homomorfismo de grupos. Si $\sigma = 0$, se define $p\sigma = 0$.

Lema 5.40. *Si* $\sigma = (a_0 a_1 \dots a_n)\colon \Delta_n \longrightarrow \Delta_q$, *entonces*

(i) si $n = 0$, $\partial_1(p\sigma) = \sigma - (p)$,

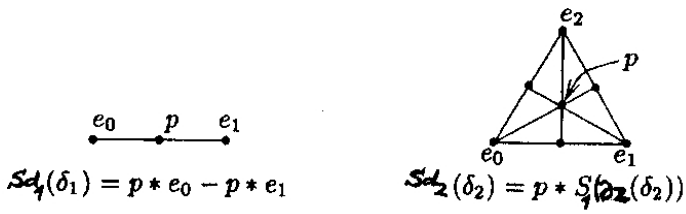
(ii) si $n > 0$, $\partial_{n+1}(p\sigma) = \sigma - p\partial_n(\sigma)$.

Observación 5.8. Estas propiedades se trasfieren a cadenas de manera lineal.

Definición 5.22. El operador *subdivisión baricéntrica*, $Sd_n\colon S_n(\Delta_q) \longrightarrow S_n(\Delta_q)$, se define entonces de manera inductiva

$$Sd_n(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } n = 0 \\ b_\sigma(Sd_{n-1}(\partial_n \sigma)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde b_σ es el baricentro de σ. Con esto, el operador queda definido sobre una base de $S_n(\Delta_q)$, y se extiende por linealidad.



Lema 5.41. Sd_n *es una aplicación en cadenas, es decir,* $\partial_n \circ Sd_n = Sd_{n-1} \circ \partial_n$.

Se define por inducción un nuevo operador, $T_n\colon S_n(\Delta_q) \longrightarrow S_{n+1}(\Delta_q)$, por

$$T_n(\sigma) = b_\sigma(Sd_n(\sigma) - \sigma - T_{n-1}(\partial_n \sigma)),$$

para $n > 0$, y convenimos que $T_0 = 0$. Entonces

Lema 5.42. *Para* $n \geq 0$, $\partial_{n+1} \circ T_n + T_{n-1} \circ \partial_n = Sd_n - 1_{S_n(\Delta_q)}$.

Es decir, T_n es una homotopía en cadenas entre Sd_n y $1_{S_n(\Delta_q)}$. Y en tal caso, usando el lema 5.19, hemos probado que

Corolario 5.43. *Para cada* $k \geq 0$, *es* $H_k(Sd_n) = H_k(1_{S_n(\Delta_q)})$.

5.7.2. Caso general

Vamos a generalizar a cadenas singulares sobre X lo que acabamos de hacer para cadenas afines. Se definen para $\sigma \in S_n(X)$

$$Sd_n^X(\sigma) = S_n(\sigma)(Sd_n(1_{\Delta_n})) \quad \text{y} \quad T_n^X(\sigma) = S_{n+1}(\sigma)(T_n(1_{\Delta_n})),$$

y verifican

(i) son ambas naturales, es decir, si $f\colon X \longrightarrow Y$, entonces $S_n(f) \circ Sd_n^X = Sd_n^Y \circ S_n(f)$ y $S_{n+1}(f) \circ T_n^X = T_n^Y \circ S_n(f)$;

(ii) Sd_*^X es una aplicación en cadenas;

(iii) T_*^X es una homotopía en cadenas entre Sd_*^X y $1_{S_*(X)}$;

(iv) Sd_*^X y T_*^X extienden las definiciones realizadas sobre espacios afines.

Lema 5.44. *Si $\sigma = (a_0 a_1 \dots a_n)$ es un símplice afin en Δ_q, entonces todo símplice afín que aparece en la expresión de $Sd_n(\sigma)$ tiene diámetro menor o igual a $\frac{n}{n+1}$diám(σ).*

Corolario 5.45. *Todo símplice afin en $Sd_n^k(e_0 e_1 \dots e_n) \in S_n(\Delta_q)$ tiene diámetro menor o igual a $(\frac{n}{n+1})^k$diám(Δ_q), cantidad que converge a cero si k crece.*

Definición 5.23. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento por abiertos de X, se dice que un n–símplice singular σ es *pequeño de orden $\mathcal{U}$*, si $\sigma(\Delta_n)$ está contenido en alguno de los abiertos de $\mathcal{U}$.

Del corolario 5.45 se deduce

Corolario 5.46. *Sean $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de X y σ un n–símplice singular de X. Existe $k \in \mathbb{N}$, tal que cada símplice de $(Sd_n^X)^k(\sigma)$ es pequeño de orden $\mathcal{U}$.*

Teorema 5.47. *En las condiciones anteriores, toda clase de homología relativa en $H_n(X, A)$ puede representarse por un ciclo relativo, que es una combinación lineal de símplices pequeños de orden $\mathcal{U}$.*

Y se obtiene el **teorema de excisión**

Teorema 5.48. *Si $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$, entonces U puede excindirse.*

Las hipótesis del teorema de excisión son muy restrictivas, por ello es útil el siguiente resultado

Teorema 5.49. *Si $V \subset U \subset A$, y además:*

(i) V puede excindirse, y

(ii) $(X - U, A - U)$ es un retracto por deformación de $(X - V, A - V)$,

entonces U puede excindirse.

5.7.3. Un ejemplo de aplicación

Teorema 5.50. *Sean $\mathbb{E}_q^+$ y $\mathbb{E}_q^-$ las semiesferas cerradas de la esfera $\mathbb{S}^q$, donde $q \geq 1$. Es decir, $\mathbb{E}_q^+ \cap \mathbb{E}_q^- = \mathbb{S}^{q-1}$ es el ecuador de $\mathbb{S}^q$. Entonces, $j\colon (\mathbb{E}_q^+, \mathbb{S}^{q-1}) \longrightarrow (\mathbb{S}^q, \mathbb{E}_q^-)$ es una excisión.*

Si proyectamos a lo largo de las q primeras coordenadas, se obtiene un homeomorfismo entre pares de espacios, $\pi\colon (\mathbb{E}_q^+, \mathbb{S}^{q-1}) \longrightarrow (\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1})$. Además, para $n \geq 2$, la aplicación de enlace $\delta_n\colon H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1})$ es un isomorfismo, según el ejemplo 5.5 (ii). Por otro lado, $\mathbb{E}_q^-$ tiene el mismo tipo de homotopía que un punto $p_0 \in \mathbb{S}^q$, luego la invarianza por homotopía de la homología relativa, dice que

$$H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1}) \simeq H_n(\mathbb{S}^q, p_0) \simeq H_n(\mathbb{S}^q), \quad \text{si} q > 0.$$

Luego, hemos probado que para $n \geq 2$ y $q \geq 1$, es $H_n(\mathbb{S}^q) \simeq H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1})$. Y para $q \geq 1$, $H_1(\mathbb{S}^q) \simeq H_1(\mathbb{S}^q, \mathbb{E}_q^-)$.

Teniendo en cuenta todo esto, se deduce

Corolario 5.51. *Para $q \geq n \geq 1$, se obtiene*

$$H_n(\mathbb{S}^q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } q = n \\ 0 & \textit{si } q > n \end{cases}$$

Y del cálculo de la homología sobre esferas, se deducen las propiedades

Corolario 5.52. *Para $n \geq 1$, $\mathbb{S}^{n-1}$ no es un retracto de $\mathbb{D}^n$.*

Tenemos el **teorema del punto fijo de Brouwer**

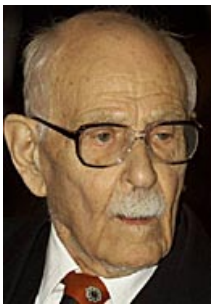
Corolario 5.53. *Toda aplicación $f\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ posee un punto fijo.*

Corolario 5.54. *Si $m \neq n$, las esferas $\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n$ no son homeomorfas. De hecho, ni siquiera tienen el mismo tipo de homotopía.*

Corolario 5.55. *Si $m \neq n$, $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.*

Corolario 5.56. *Si $n \geq 0$, $\mathbb{S}^n$ no es contráctil.*

5.8. La sucesión de Mayer–Vietoris



Leopold Vietoris (1891–2002) es uno de los topológos que descubrió esta técnica que da excelentes resultados para el cálculo de grupos de homología. Murió el 9 de abril de 2002, a los 110 años, siendo el *abuelo* de Austria.

Vamos a considerar ahora ternas ordenadas (X, X_1, X_2) de espacios, donde X_1 y X_2 son subespacios de X. Se consideran las aplicaciones de inclusión

$$k_1\colon (X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2) \quad \text{y} \quad k_2\colon (X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1),$$

obtenidas al excindir $X_2 - (X_1 \cap X_2)$ y $X_1 - (X_1 \cap X_2)$ de $X_1 \cup X_2$, respectivamente.

Definición 5.24. Si k_1 y k_2 son excisiones, se dice que la terna (X, X_1, X_2) es *exacta*. Observar que la exactitud de la terna depende de $X_1 \cup X_2$ y no de X.

Ejemplos 5.7. Algunos ejemplos de ternas exactas son

(i) si X_1 y X_2 son abiertos y $X = X_1 \cup X_2$, entonces la terna (X, X_1, X_2) es exacta, siendo $A = X_1$ y $U = X_1 - (X_1 \cap X_2)$ los *ingredientes* de la excisión;

(ii) $(\mathbb{S}^n, \mathbb{E}_n^+, \mathbb{E}_n^-)$ es una terna exacta.

El **lema de Barratt–Whitehead** es esencial para la demostración del teorema de Mayer–Vietoris

Lema 5.57. *Sea un diagrama de grupos y homomorfismos, en el que los cuadrados conmutan y las líneas son exactas*

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow & C_{i+1} \arrow[r, "h_{i+1}"] \arrow[d, "\gamma_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\alpha_i"] & B_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & C_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "\gamma_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] & {} \\
\longrightarrow & \widehat{C_{i+1}} \arrow[r, "\widehat{h_{i+1}}"] & \widehat{A_i} \arrow[r, "\widehat{f_i}"] & \widehat{B_i} \arrow[r, "\widehat{g_i}"] & \widehat{C_i} \arrow[r, "\widehat{h_i}"] & \widehat{A_{i-1}} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Si las aplicaciones γ_i son isomorfismos, existe una sucesión exacta larga, llamada sucesión de Barratt–Whitehead, $\ldots \longrightarrow A_i \xrightarrow{\Phi_i} \widehat{A_i} \oplus B_i \xrightarrow{\Psi_i} \widehat{B_i} \xrightarrow{\Gamma_i} A_{i-1} \longrightarrow \ldots$, donde

(i) $\Phi_i(a_i) = (\alpha_i \oplus f_i)(a_i, a_i)$,

(ii)$\Psi_i(\widehat{a_i}, b_i) = -\widehat{f_i}(\widehat{a_i}) + \beta_i(b_i)$,

(iii) $\Gamma_i(\widehat{b_i}) = h_i \circ \gamma_i^{-1} \circ \widehat{g_i}(\widehat{b_i})$.

La functorialidad de la sucesión es una consecuencia inmediata de su definición.

Si (X, X_1, X_2) es una terna exacta, $X = X_1 \cup X_2$ y $A = X_1 \cap X_2$, la aplicación de inclusión $i_{X_1}\colon (X_1, A) \longrightarrow (X, X_2)$ induce el diagrama de cuadrados conmutativos y con

filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "H_n(i_A^{X_1})"] \arrow[d, "H_n(i_A^{X_2})"] & H_n(X_1) \arrow[r, "H_n(1_{X_1}^A)"] \arrow[d, "H_n(i_{X_1}^X)"] & H_n(X_1, A) \arrow[r, "\delta_n^{(X_1,A)}"] \arrow[d, "H_n(i_{X_1})"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_n(X_2) \arrow[r, "H_n(i_{X_2}^X)"] & H_n(X) \arrow[r, "H_n(1_X^{X_2})"] & H_n(X, X_2) \arrow[r, "\delta_n^{(X,X_2)}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

con las notaciones obvias.

Y de aquí se obtiene la **sucesión de Mayer–Vietoris**

Teorema 5.58. *En el diagrama anterior,* $H_n(i_{X_1})\colon H_n(X_1, A) \longrightarrow H_n(X, X_2)$ *es un isomorfismo, para cada* $n \geq 0$. *La sucesión de Barrat–Whitehead asociada,*

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \stackrel{\Gamma_{n+1}}{\to} H_n(A) \stackrel{\Phi_n}{\to} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \stackrel{\Psi_n}{\to} H_n(X) \to \dots,$$

se llama sucesión de Mayer–Vietoris de la terna (X, X_1, X_2), y es functorial.

Ejemplos 5.8. Aplicando la sucesión de Mayer–Vietoris, se pueden calcular grupos de homología en muchos ejemplos

(i) tomando $X_1 = \mathbb{S}^1 - \{\mathbf{N}\}$ y $X_2 = \mathbb{S}^1 - \{\mathbf{S}\}$, se deduce que $H_n(\mathbb{S}^1) = 0$, si $n > 1$;

(ii) para $q, n \geq 1$, se obtiene

$$H_n(\mathbb{S}^q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases},$$

observar que en el corolario 5.51 se requería la condición $q > n$ en vez de $q \neq n$;

(iii) para la rosa de m pétalos G_m (la suma topológica de m copias de $\mathbb{S}^1$ identificadas a través de un punto),

$$H_n(G_m) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \overset{(m)}{\cdots} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

(iv)

$$H_n(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(v) para $\mathbb{T}_g$, la superficie compacta de género g,

$$H_n(\mathbb{T}_g) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5.9. Algunas aplicaciones de la Homología

5.9.1. Grado de una aplicación entre esferas

Sea $n \geq 1$ y $f\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ una aplicación. Si α es un generador de $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$, entonces $H_n(f)\colon H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ es tal que $H_n(f)(\alpha) = m\alpha$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Además, el entero m es independiente del generador elegido.

Definición 5.25. Este entero se llama *grado de Brouwer de* f y se denota por $d(f)$.

Observación 5.9. Con las notaciones anteriores y del problema **8** de 3.6, para $n = 1$ es $d(f) = ind([f])$.

Lema 5.59. *Se verifican las siguientes propiedades*

(i) $d(1_{\mathbb{S}^n}) = 1$*;*

(ii) si $f, g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$*,* $d(f \circ g) = d(f).d(g)$*;*

(iii) $d(cte) = 0$*;*

(iv) si $f \simeq g$*, entonces* $d(f) = d(g)$*;*

(v) si f *es una equivalencia de homotopía, entonces* $d(f) = \pm 1$*.*

Observación 5.10. Existe un recíproco de (iv), debido a Hopf, y puede además probarse que existen aplicaciones de cualquier grado (ver [Z], pág. 186). Con esto, quedaría demostrado que el grado es un invariante algebraico completo para estudiar las clases de homotopía de aplicaciones de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{S}^n$: es decir, existe una biyección $\chi\colon [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $\chi([f]) = d(f)$.

Se puede probar además

Proposición 5.60. *Sean* $n \geq 1$ *y* $f, g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *funciones continuas; se verifica*

(i) si $f(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, x_{n+1})$*, entonces* $d(f) = -1$*;*

(ii) si $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots - x_i, \ldots, x_{n+1})$*, entonces* $d(f) = -1$*;*

(iii) si f *es aplicación antipodal, entonces* $d(a) = (-1)^{n+1}$*;*

(iv) si $f(x) \neq g(x)$ *para cada* $x \in \mathbb{S}^n$*, entonces es* $g \simeq a \circ f$ *y* $H_n(f) = (-1)^{n+1} H_n(g)$*;*

(v) si f *no tiene puntos fijos, entonces* $f \simeq a$*;*

(v) si $f \simeq cte$*, entonces* f *tiene un punto fijo.*

Corolario 5.61. *Si $f\colon \mathbb{S}^{2n} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n}$ es continua, existe $x \in \mathbb{S}^{2n}$, tal que $f(x) = x$ o existe $y \in \mathbb{S}^{2n}$ tal que $f(y) = -y$.*

Corolario 5.62. *No existe $f\colon \mathbb{S}^{2n} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n}$ continua, tal que para cada $x \in \mathbb{S}^{2n}$, x sea ortogonal a $f(x)$.*

Una aplicación $f\colon \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ puede verse como una familia de vectores, con $f(x)$ *pegado* a $\mathbb{S}^m$ por x, es decir, $\mathbb{S}^m$ es una *bola peluda*. Un pelo está *peinado*, cuando es tangente a la esfera. El **teorema de la bola peluda** afirma que no es posible *peinar* una bola peluda de dimensión par

Corolario 5.63. *No existe un campo de vectores tangentes no nulo sobre $\mathbb{S}^{2n}$.*

Observación 5.11. Sin embargo, esto no sucede en grados impares: en efecto, en $\mathbb{S}^{2n+1}$

$$X(x_1, \dots x_{2n+2}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

es un campo de vectores tangentes, que verifica la propiedad deseada.

5.9.2. Teoremas de Jordan–Brouwer

Definición 5.26. Un *conjunto dirigido* Δ es un conjunto con un orden parcial $\leq$, tal que para cada $a, b \in \Delta$, existe $c \in \Delta$, tal que $c \geq a$ y $c \geq b$. Dado un conjunto dirigido Δ, un *sistema dirigido de conjuntos*, $\{X_a, f_a^b\}_{a,b\in\Delta}$, es una familia de conjuntos $\{X_a : a \in \Delta\}$ y de funciones $\{f_a^b\colon X_a \longrightarrow X_b : a \leq b\}$, satisfaciendo

(i) $f_a^a = 1_{X_a}$, para cada $a \in \Delta$,

(ii) si $a \leq b \leq c$, $f_a^c = f_b^c \circ f_a^b$.

Vamos a centrarnos en el caso en que los conjuntos son grupos abelianos y las aplicaciones son homomorfismos de grupos.

Definición 5.27. Sea $\{X_a, f_a^b\}$ un sistema dirigido de grupos abelianos y homomorfismos. Se define un subgrupo R de $\bigcup\limits_{a\in\Delta} X_a$, por

$$R = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_{a_i} : \text{existe } c \in \Delta, c \geq a_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} f_{a_i}^c(x_{a_i}) = 0 \right\}.$$

El *límite directo* del sistema dado, es el grupo cociente $\varinjlim X_a = \bigcup\limits_{a\in\Delta} X_a/R$.

Observación 5.12. En el caso particular en que si $a \leq b$, X_a es un subgrupo de X_b y $f_a^b \colon X_a \longrightarrow X_b$ es la aplicación inclusión, se verifica que $\varinjlim X_a = \bigcup_{a\in\Delta} X_a$. Observar que en este caso, dos puntos $x_a \in X_a$ y $x_b \in X_b$ son iguales en $\varinjlim X_a$, si existe $c \in \Delta$, tal que $c \geq a$, $c \geq b$ y $f_a^c(x_a) = f_b^c(x_b)$.

En la página 30 de [Vi], se prueba que

Lema 5.64. *Sea X un espacio y $\{X_a\}_{a\in\Delta}$ la familia de sus subespacios compactos, parcialmente ordenada por la inclusión. La familia de grupos de homología $\{H_n(X_a)\}_{a\in\Delta}$ forma un sistema dirigido, donde los homomorfismos están inducidos por las aplicaciones inclusión. Además, para cada $n \geq 0$, es $H_n(X) \simeq \varinjlim H_n(X_a)$.*

Lema 5.65. *Si $A \subset \mathbb{S}^q$ es homeomorfo a $[0,1]^k$, para $0 \leq k \leq q$, entonces*

$$H_n(\mathbb{S}^q - A) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Corolario 5.66. *Si $B \subset \mathbb{S}^q$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^k$, para $0 \leq k \leq q-1$, entonces el grupo $H_*(\mathbb{S}^q - B) = \bigoplus_{n\geq 0} H_n(\mathbb{S}^q - B)$, es abeliano libre con dos generadores, uno en dimensión 0 y otro en dimensión $q-k-1$. En particular, si $q \neq k+1$, el espacio $\mathbb{S}^q - B$ es conexo por caminos.*

Y se deduce el **teorema de separación de Jordan–Brouwer**

Teorema 5.67. *Una $(n-1)$–esfera embebida en $\mathbb{S}^n$ separa $\mathbb{S}^n$ en dos componentes acíclicas, siendo además la $(n-1)$–esfera la frontera común de esas dos componentes.*

Y se tiene también el **teorema de Jordan–Brouwer sobre invarianza de dominio**

Teorema 5.68. *Sean U_1 y U_2 subconjuntos de $\mathbb{S}^n$ y $h \colon U_1 \longrightarrow U_2$ un homeomorfismo. Si U_1 es un conjunto abierto en $\mathbb{S}^n$, entonces U_2 también lo es.*

5.9.3. Homología en algunos cocientes

Definición 5.28. Una *n–celda* es un espacio homeomorfo al disco $\mathbb{D}^n$. Consideremos $X = \mathbb{D}^n$, $A = fr(\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^{n-1}$, Y un espacio topológico y $f \colon A \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Se dice que $Y_f = \mathbb{D}^n \cup_f Y$ es el *espacio obtenido al adjuntar una n–celda a Y por f*.

Ejemplo 5.5. Sea $X = \mathbb{D}^2$ y $A = fr(\mathbb{D}^2) = \mathbb{S}^1$. Sea Y una copia disjunta de $\mathbb{S}^1$ y la aplicación $f\colon A \longrightarrow Y$, dada por $f(z) = z^2$. Entonces, $X \cup_f Y$ es el espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^2$. Se puede calcular su homología usando esta caracterización y la sucesión de Mayer–Vietoris, y se obtiene

$$H_n(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Proposición 5.69. *Sean $n \geq 1$ e Y_f el espacio obtenido a partir del espacio compacto y Hausdorff Y, adjuntándole una n–celda vía f. Existe una sucesión exacta*

$$\ldots \longrightarrow H_q(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_q(f)} H_q(Y) \xrightarrow{H_q(i_Y)} H_q(Y_f) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_0(f)} H_0(Y) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{H_0(i_Y)} H_0(Y_f),$$

donde $i_Y\colon Y \longrightarrow Y_f$ es la aplicación inclusión.

Observación 5.13. Esta sucesión exacta muestra lo *cerca* que están los grupos de homología de Y e Y_f. Si se pega una n–celda a Y, entonces $H_n(i_Y)\colon H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y_f)$ es un monomorfismo, con conúcleo 0 o cíclico infinito. Así, si $coker(H_n(i_Y)) \neq 0$, se ha creado un nuevo *agujero n–dimensional*.

Por otro lado, $H_{n-1}(i_Y)\colon H_{n-1}(Y) \longrightarrow H_{n-1}(Y_f)$ es un epimorfismo, de núcleo 0 o cíclico, y si $ker(H_{n-1}(i_Y)) \neq 0$, esta nueva n–celda ha *tapado* un agujero $(n-1)$–dimensional en Y. Aparte de estas dimensiones, la adjunción de n-celdas no afecta a la homología.

5.10. Problemas

1.- Sean A, B y C grupos. Probar

(i) si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es exacta, f es inyectiva;

(ii) si $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es exacta, g es sobreyectiva;

(iii) si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta, f es un isomorfismo;

(iv) si $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ es exacta, $A = 0$.

2.- Calcular los grupos de homología de un espacio discreto, del conjunto de Cantor y de $\mathbb{S}^0$.

3.- Se considera una terna de espacios topológicos (X, A, B) (es decir, $B \subset A \subset X$) y las aplicaciones inclusión $i_A\colon (A, B) \longrightarrow (X, B)$ y proyección $1_X\colon (X, B) \longrightarrow (X, A)$. Se pide

(i) probar que se tiene una sucesión exacta larga

$$\longrightarrow H_{n+1}(A,B) \overset{H_{n+1}(i_A)}{\longrightarrow} H_{n+1}(X,B) \overset{H_{n+1}(1_X)}{\longrightarrow} H_{n+1}(X,A) \overset{\Delta_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(A,B) \longrightarrow,$$

llamada *sucesión exacta larga de homología* de la terna (X,A,B), donde el homomorfismo Δ_{n+1} es precisamente el compuesto de los dos homomorfismos:

$$H_{n+1}(X,A) \overset{\delta_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(A) \overset{H_n(1_A)}{\longrightarrow} H_n(A,B).$$

Además, si $B=\emptyset$, esta sucesión se reduce a la sucesión exacta larga de homología usual;

(ii) si la inclusión $i_B\colon B \longrightarrow A$, induce para cada $n \geq 0$ un isomorfismo entre los grupos de homología, $H_n(i_B)\colon H_n(B) \longrightarrow H_n(A)$, $H_n(1_X)\colon H_n(X,B) \longrightarrow H_n(X,A)$ es también un isomorfismo para cada n;

(iii) si A es un retracto de X, entonces para cada n, $H_n(X,B) \simeq H_n(X,A) \oplus H_n(A,B)$;

(iv) dada la terna (**N**,$\mathbb{S}^{q-1}, \mathbb{D}^q$), donde **N** es el polo norte, probar que $H_n(\mathbb{D}^q, \mathbb{S}^{q-1})$ es isomorfo a $H_{n-1}(\mathbb{S}^{q-1}$,**N**), y usarlo para calcular la homología del par $H_n(\mathbb{S}^{q-1}$,**N**);

(v) si $\mathbb{H}^q_+ = \{(x_1,\ldots,x_{q+1}) \in \mathbb{S}^q : x_{q+1} \geq 0\}$, calcular con ayuda de la sucesión exacta de homología de la terna $(\mathbb{S}^{q-1}, \mathbb{H}^q_+, \mathbb{S}^q)$, los grupos de homología $H_n(\mathbb{S}^q, \mathbb{S}^{q-1})$.

4.- Sea X un espacio topológico y $X = A \cup B$, donde A y B son abiertos disjuntos. Probar que para cada $n \geq 0$, es $H_n(X) \simeq H_n(A) \oplus H_n(B)$ y $H_n(X,A) \simeq H_n(B)$.

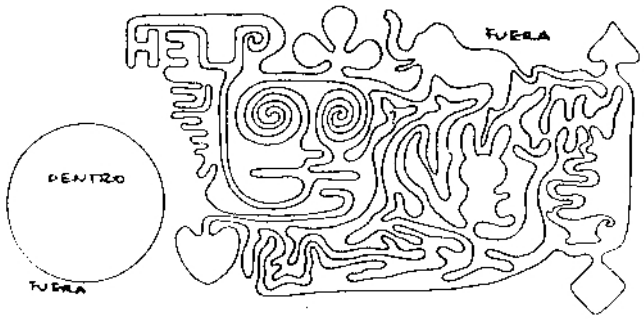
5.- Dados los pares de espacios (X,A) e (Y,B), donde $X = Y = [0,1]$, $A = [0,1] - \{\frac{1}{2}\}$ y $B = \{0,1\}$, probar que aunque $X \simeq Y$ y $A \simeq B$, es $(X,A) \not\simeq (Y,B)$.

6.- Calcular la homología de los siguientes pares de espacios: (X,X), $([a,b],(a,b))$, $([a,b],\{a,b\})$, $(\mathbb{D}^n, \mathbb{H}^{n-1}_+)$ y $(\mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1)$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), X es un espacio topológico y $\mathbb{H}^{n-1}_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} : x_n \geq 0\}$.

7.- Sea $f\colon (\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0) \longrightarrow (\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)$ la aplicación $f(x) = -x$. Describir $H_n(f)$ y dar una base de $H_1(\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)$.

8.- Probar las siguientes propiedades, consecuencias del teorema de separación de Jordan–Brouwer

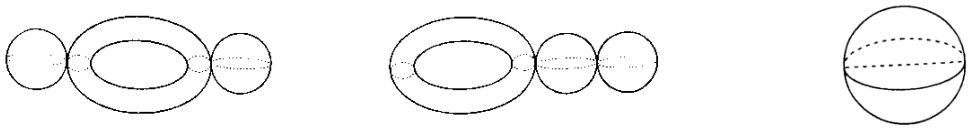
(i) si A es una $(n-1)$–esfera embebida en $\mathbb{R}^n$ (donde $n \geq 2$), entonces $\mathbb{R}^n - A$ tiene exactamente dos componentes conexas, una de las cuales es acotada y la otra no. La componente acotada es acíclica y la no acotada posee la misma homología que $\mathbb{S}^{n-1}$;



(ii) *invarianza del dominio*: si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $V \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a U, entonces V es también abierto;

(iii) *invarianza de la dimensión*: si $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ son abiertos homeomorfos, entonces $m = n$.

9.- Calcular la homología de los espacios que aparecen debajo



10.- Probar las siguientes propiedades

(i) toda rotación de $\mathbb{S}^n$ es homótopa a la aplicación identidad de $\mathbb{S}^n$;

(ii) sea $g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ la restricción de una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, la aplicación inducida en homología $H_n(g)\colon H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ es la multiplicación por el determinante de g (que es ± 1);

(iii) sea $a\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ la aplicación antipodal. Entonces, $H_n(a)\colon H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$ es la multiplicación por $(-1)^{n+1}$.

5.11. Problemas adicionales

1.- Homología del espacio proyectivo real

(i) Probar que el espacio proyectivo real de dimensión n, $\mathbb{RP}^n$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo real de dimensión $n-1$, $\mathbb{RP}^{n-1}$, una n–celda a través de la aplicación canónica $p_{n-1}\colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$;

(ii) utilizando lo anterior, comprobar que

- si n es par,

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ impar y } 1 \leq q \leq n-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- si n es impar,

$$H_q(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = n \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ impar y } 1 \leq q \leq n-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.- Homología del espacio proyectivo complejo

Se define el *espacio proyectivo complejo de dimensión* n, $\mathbb{CP}^n$ del modo siguiente: en el espacio complejo de dimensión $n+1$, $\mathbb{C}^{n+1}$, se considera el subespacio

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\|^2 = \|z_1\|^2 + \cdots + \|z_{n+1}\|^2 = 1\}.$$

Se define sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ la relación de equivalencia: $z \sim z'$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{C}$ con $\|c\| = 1$ y $z' = cz$. El cociente bajo esta relación de equivalencia es $\mathbb{CP}^n$. Sea $q_n \colon \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ la aplicación cociente. Intuitivamente, $\mathbb{S}^{2n+1}$ es *producto torcido* de $\mathbb{CP}^n$ y $\mathbb{S}^1$: se dice que $\mathbb{S}^{2n+1}$ es un *fibrado* sobre $\mathbb{CP}^n$, de *fibra* $\mathbb{S}^1$. Se pide probar

(i) $\mathbb{CP}^0$ es un punto y $\mathbb{CP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. La aplicación cociente $q_1 \colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ se llama *aplicación de Hopf*;

(ii) el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{CP}^n$ se obtiene al adjuntar al espacio proyectivo complejo de dimensión $n-1$, $\mathbb{CP}^{n-1}$, una $2n$–celda a través de la aplicación canónica $q_{n-1} \colon \mathbb{S}^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$;

(iii) $\mathbb{CP}^n$ con su topología cociente es homeomorfo al espacio métrico cuyos puntos son líneas complejas de $\mathbb{C}^{n+1}$ pasando por el origen, donde la métrica se define como el ángulo entre rectas (que toma valores en $[0, \frac{\pi}{2}]$);

(iv) utilizando lo anterior, comprobar que

$$H_q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.- Homología de la botella de Klein

(i) Probar que la botella de Klein $\mathbb{K}^2$ se obtiene adjuntando una 2–celda a $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$;

(ii) utilizando lo anterior, comprobar que

$$H_q(\mathbb{K}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \geq 2 \end{cases}$$

4.- Homología del toro generalizado
El toro generalizado es un producto de esferas $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$. Se pide probar

(i) denotamos por $\mathbb{I}$ al intervalo unidad de $\mathbb{R}$. El n–cubo $\mathbb{I}^n \subset \mathbb{R}^n$ tiene como frontera

$$fr(\mathbb{I}^n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \text{ existe } i \text{ tal que } x_i = 0 \text{ ó } 1\}.$$

Así, $\mathbb{I}^m \times \mathbb{I}^n = \mathbb{I}^{m+n}$ y $fr(\mathbb{I}^{m+n}) = (fr(\mathbb{I}^m) \times \mathbb{I}^n) \cup (\mathbb{I}^m \times fr(\mathbb{I}^n))$. Sean $z_m \in \mathbb{S}^m$ y $z_n \in \mathbb{S}^n$ puntos base. Existe una aplicación entre pares $f_k \colon (\mathbb{I}^k, fr(\mathbb{I}^k)) \longrightarrow (\mathbb{S}^k, z_k)$, para $k \in \{m, n\}$, que es un *homeomorfismo relativo*, es decir, tal que la restricción $f_k|_{\mathbb{I}^k - fr(\mathbb{I}^k)} \colon \mathbb{I}^k - fr(\mathbb{I}^k) \longrightarrow \mathbb{S}^k - z_k$ es un homeomorfismo. Tomando productos cartesianos, se obtiene una aplicación $f_m \times f_n \colon \mathbb{I}^m \times \mathbb{I}^n \longrightarrow \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$, que lleva $fr(\mathbb{I}^{m+n})$ sobre $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$. Concluir, utilizando el problema **4** del apartado 1.5, que $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ es homeomorfo al espacio obtenido al adjuntar una $(m+n)$-celda a $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$ a través de la aplicación $f_m \times f_n|_{fr(\mathbb{I}^{m+n})} \colon fr(\mathbb{I}^{m+n}) \simeq \mathbb{S}^{m+n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$;

(ii) utilizar la sucesión de Mayer–Vietoris para calcular los grupos de homología de $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n$;

(iii) basándose en lo anterior, probar que $H_*(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$, $m, n \geq 0$, es un grupo abeliano libre con 4 generadores, en las dimensiones 0, m, n y $m + n$.

5.- Números de Betti y característica de Euler
La característica de Euler–Poincaré sobre X es un poderoso invariante que tiene numerosas aplicaciones fuera del ámbito de la topología, por ejemplo

(a) sólo las esferas impares admiten campos de vectores que no se anulan. Estas son justo las esferas con característica de Euler–Poincaré nula. Se puede definir la noción de campo de vectores sobre una variedad diferenciable X; la diferenciabilidad se precisa para poder hablar de vectores tangentes. Si X es compacto y conexo, existe un campo de vectores tangente no nulo si y sólo si $\chi(X) = 0$. Luego, para superficies compactas, sólo $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{K}^2$ poseen un tal campo de vectores. Si X es de dimensión impar y compacta, siempre admite uno. Argumentos de geometría diferencial prueban que un espacio X no compacto siempre admite uno;

(b) una clase un poco más general de característica de Euler juega un papel clave en el teorema de Riemann–Roch para variedades algebraicas proyectivas no singulares.

Si G es un grupo abeliano finitamente generado, se sabe que los elementos de orden finito en G constituyen el subgrupo de torsión T y que el grupo cociente G/T es abeliano libre. El número minimal de generadores de G/T es el *rango* de G.
El rango de $H_n(X)$ (para aquellos espacios X en que los que tenga sentido esta definición) se llama *n–ésimo número de Betti*, $\beta_n(X)$, de X. Si $H_n(X)$ es abeliano libre, entonces está caracterizado por su rango, en otro caso, hay más información contenida en el grupo de homología.

Se define también la *característica de Euler* por la fórmula $\chi(X) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\beta_n(X)$, cuando esta suma es finita.

Estos dos números son, por supuesto, invariantes topológicos. Se puede definir de la misma manera los números de Betti relativos $\beta_n(X, A)$ y la característica de Euler relativa $\chi(X, A)$ para un par de espacios (X, A). Se pide

(i) calcular los números de Betti y la característica de Euler para $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^n$, la rosa de n pétalos y la superficie compacta de género g;

(ii) cuando estén definidos, probar que si $A \subset X$ se cumple $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$;

(iii) dada una sucesión exacta de grupos abelianos finitamente generados

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{i_1} A_2 \xrightarrow{i_2} \cdots \xrightarrow{i_{n-1}} A_n \longrightarrow 0,$$

entonces $rg(A_1) - rg(A_2) + \cdots + (-1)^{n+1}rg(A_n) = 0$;

(iv) usar lo anterior para probar que si Z se obtiene a partir de Y adjuntándole una n–celda y $\chi(Y)$ está definido, entonces $\chi(Z) = \chi(Y) + (-1)^n$.

6.- Homología de los espacios lenticulares

Los espacios lenticulares $L(p, q)$ son variedades de dimensión tres orientables *con torsión*. Estos espacios tienen una especie de propiedad de *autoenrollamiento*: sean p y q enteros relativamente primos, la esfera $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$, y el homeomorfismo $h\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3$, definido por $h(z_1, z_2) = (z_1.e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_2.e^{\frac{2\pi iq}{p}})$. Se cumple que $h^p = 1_{\mathbb{S}^3}$ y el grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ opera sobre $\mathbb{S}^3$ por: $n.(z_1, z_2) = h^n(z_1, z_2)$ para $n \in \mathbb{Z}_p$. En el problema **2** de 4.10, probamos que la aplicación cociente $p\colon \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ es un revestimiento y el espacio cociente $L(p, q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$, es el *espacio lenticular*. Se pide comprobar que

$$H_n(L(p, q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si} \quad n = 0, 3; \\ \mathbb{Z}_p & \text{si} \quad n = 1; \\ 0 & \quad\ \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Bibliografía

La luna es un pozo chico,
las flores no valen nada,
lo que valen son tus brazos
cuando de noche me abrazan,
lo que valen son tus brazos
cuando de noche me abrazan.

"Zorongo"
Federico García Lorca (1898-1936)

[Ag] M.K. Agoston, *Algebraic Topology*, Marcel Dekker, 1976.

[AGP] M. Aguilar, S. Gitler y C. Prieto, *Topología Algebraica: un enfoque homotópico*, McGraw Hill, 1998.

[Al] P. Alexandroff, *Elementary concepts of topology*, Dover, 1961.

[Arm] * M.A. Armstrong, *Topología básica*, Reverté, 1987.

[Arn] B.H. Arnold, *Intuitive concepts in elementary topology*, Prentice Hall, 1962.

[AB] E. Artin and H. Braun, *Introduction to Algebraic Topology*, Merry Publ. Co., 1969.

[ADQ] R. Ayala, A. Dominguez y A. Quintero, *Elementos de teoría de homología clásica*, Pub. Universidad de Sevilla, 2002.

[Ba] S. Barr, *Expériences de Topologie*, Lysimaque, 1987.

[BBIF] Y. Borisovich, N. Blinznyakov, Y. Izrailevich and T. Fomenko, *Introduction to Topology*, Mir, 1985.

[Bo] B. Botvinnik, *Algebraic Topology course*, University of Oregon, 1999.

[Br] * G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, 1993.

[BRS] S. Buoncristiano, C.P. Rourke and B.J. Sanderson, *A geometric approach to homology theory*, Cambridge, 1976.

[Ca] S.S. Cairns, *Introductory topology*, Ronald Press Co., 1968.

[CV] C.O. Christenson and W.L. Voxman, *Aspects of Topology*, BCS Associates, 1998.

[CC] J.M. Cohen y F. Colonna, *Introduzione alla Topologia Algebrica*, Meditarrenean Press, 1990.

[CC^2] * L. Contreras Caballero e I. Contreras Caballero, *250 problemas resueltos de topología algebraica y geométrica: homotopía, espacios recubridores, nudos*, Cuadernos de apoyo. Universidad Autónoma de Madrid, 1989.

[Cro] F.H. Croom, *Basic concepts of Algebraic Topology*, Springer, 1978.

[Crs] M.D. Crossley, *Essential Topology*, Springer, 2005.

[Cru] A. Crumeyrolle, *Bases géométriques de la topologie algébrique*, Cours et Séminaires du Dépt. de Maths de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1970.

[DK] J.F. Davis and P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics 35, A.M.S., 2001.

[De] S. Deo, *Algebraic topology: a primer*, Hindustain Book Agency, 2003.

[Di] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differerential topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1989.

[DP] C.J.J. Dodson and P.E. Parker, *A user's guide to Algebraic Topology*, Kluwer, 1997.

[Do] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[ES] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, 1952.

[ET] L. Evens and R. Thomson, *Algebraic Topology*, New York University Press, 2001.

[Fla] E. Flapan, *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality*, Cambridge University Press, 2000.

[Fle] H.G. Flegg, *From geometry to topology*, English Univ. Press, 1974.

[FFG] A.T. Fomenko, D.B. Fuchs and V.L. Gutenmacher, *Homotopic topology*, Akadémiai Kiadó, 1986.

[Fr] G.K. Francis, *A topological picture book*, Springer, 1987.

[FF] M. Fréchet y K. Fan, *Invitation to combinatorial topology*, Dover, 2003.

[Fu] W. Fulton, *Algebraic Topology: a first course*, Springer, 1995.

[GG] T.W. Gamelin and R.E. Greene, *Introduction to topology*, Dover, 1999.

[Godb] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1998.

[Gode] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[Goo] S.E. Goodman, *Beginning topology*, The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics, Thomson, 2005.

[Gr] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, 1971.

[GH] * M.J. Greenberg y J. Harper, *Algebraic topology: a first course*, Addison Wesley, 1981.

[GT] J.L. Gross and T.W. Tucker, *Topological graph theory*, Wiley, 1997.

[Ha] * A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

[He] M. Henle, *A combinatorial introduction to topology*, Dover, 1979.

[HW] P.L. Hilton and S. Wylie, *Homotopy theory: an introduction to algebraic topology*, Cambridge University Press, 1967.

[HY] J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Dover, 1961.

[Hu] S.T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.

[HJ] S. Huggett and D. Jordan, *A topological aperitif*, Springer, 2001.

[Jam] I.M. James (editor), *History of Topology*, North-Holland, 1999.

[Jan] K. Jänich, *Topology*, Springer, 1984.

[Jo] K. Johannson, *Topology I*, Frankfurt Universität, 2001.

[Ka] D.W. Kahn, *Topology: an introduction to the point-set and algebraic areas*, Dover, 1995.

[Ko] * C. Kosniowski, *Topología algebraica*, Reverté, 1985.

[Lah] B.K. Lahiri, *A first course in algebraic topology*, Alpha Science, 2000.

[Law] T. Lawson, *Topology: a geometric approach*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 9, Oxford University Press, 2003.

[Lee] * J.M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Maths 202, Springer, 2000.

[Lef] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, AMS Colloquium Publications 27, 1991.

[LS] D. Lehmann et C. Sacré, *Géométrie et Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, 1982.

[Lev] R. Levi, *Geometric Topology*, Universiy of Aberdeen, 2000.

[Lie] W. Lietzmann, *Visual topology*, Chatto and Windus, 1965.

[Lim] E.L. Lima, *Grupo fundamental e espaços do recobrimiento*, Projeto Euclides (IMPA), 1993.

[Mas1] W.S. Massey, *Singular homology theory*, Springer, 1980.

[Mas2] * W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.

[Mato] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Springer, 2003.

[Matv] S.V. Matveev, *Lectures on Algebraic Topology*, EMS, 2006.

[Mau] C.R.F. Maunder, *Algebraic topology*, Dover, 1996.

[May] J.P. May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lecture Mathematical Series, 1999.

[McC] G. McCarty, *Topology: an introduction with applications to topological groups*, Dover, 1967.

[McL] S. McLane, *Homology*, Springer, 1963.

[MS] R. Messer y P. Straffin, *Topology. Now!*, The Mathematical Association of America,, 2006.

[Mu1] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, 1984.

[Mu2] * J.R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[Nab] G.L. Naber, *Topological methods in euclidean spaces*, Cambridge Univ. Press, 1980.

[Nak] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, IOP Publ., 1990.

[NS] C. Nash and S. Sen, *Topology and geometry for physicists*, Academic Press, 1983.

[NP] V. Navarro y P. Pascual, *Topologia Algebraica*, Collecció UB 34, 1999.

[O] P.V. O'Neil, *Fundamental concepts in topology*, Gordon and Breach, 1972.

[Pa] C.W. Patty, *Foundations of topology*, PWS-Kent Publ. Co., 1993.

[Pe] * J.P. Petit, *Las aventuras de Anselmo Lanturlu. El Topologicón*, **http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/ESPANOL/El_Topologicon_es.pdf**

[Po] J.C. Pont, *Topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Universitaires de France, 1974.

[Pr] V.V. Prasolov, *Intuitive topology*, A.M.S., 1994.

[RF] V. Rohlin et D. Fuchs, *Premier cours de topologie: chapitres géométriques*, Mir, 1981.

[Ro] * J.J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Springer, 1988.

[Sal] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Sociedad Matemática Mexicana, 1993.

[Sat] H. Sato, *Algebraic Topology: an intuitive approach*, A.M.S., 1999.

[Sc] A.S. Schwarz, *Topology for physicists*, Springer, 1993.

[Si] A.J. Sieradski, *An introduction to Topology and Homotopy*, PWS-Kent, 1992.

[ST] I.M. Singer and J.A. Thorpe, *Lecture Notes on elementary topology and geometry*, Springer, 1976.

[So] A. Sossinsky, *Noeuds: genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, 1999.

[Sp] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, 1966.

[Ste] I. Steward, *Concepts in modern mathematics*, Dover, 1975.

[Sti] J. Stillwell, *Classical topology and combinatorial group theory*, Springer, 1993.

[Sw] R.M. Switzer, *Algebraic topology: homotopy and homology*, Springer, 1975.

[T] B. Totaro, *Notes on Algebraic Topology*, University of Cambridge, 1999.

[Va] V.A. Vassiliev, *Introduction to topology*, A.M.S. Student Mathematical Library 14, 2001.

[Vi] * J.W. Vick, *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, Springer, 1994.

[W] C.T.C. Wall, *A geometric introduction to topology*, Dover, 1993.

[Wa1] * A.H. Wallace, *An introduction to algebraic topology*, Pergamon Press, 1957.

[Wa2] A.H. Wallace, *Algebraic Topology*, W.A. Benjamin Inc., 1970.

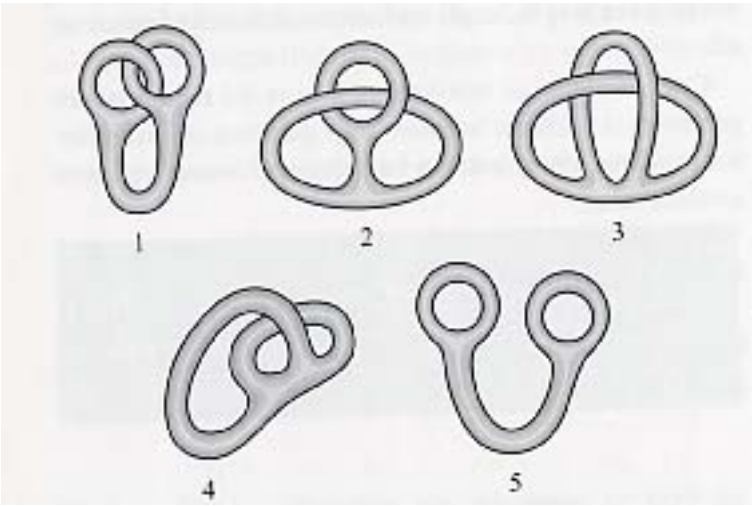
[War] G. Warner, *Topics in Topology and Homotopy theory*, Preprints Univ. Washington, 2001.

[Wh] G.W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Springer, 1978.

[Wi] K. Wirthmüller, *A topology primer*, 2002.

[Z] M. Zisman, *Topologie algébrique Élémentaire*, Armand Collin, 1972.

Demostración del teorema 0.1:



∎