ISOMORPHISME DE THOM ET FEUILLETAGES PRESQUE SANS HOLONOMIE

Gilbert HECTOR et Marta MACHO-STADLER

Isomorphisme de Thom et feuilletages presque sans holonomie

Resumé.- Grâce à la représentation du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage presque sans holonomie, comme graphe de groupes abéliens, on va montrer que ces feuilletages vérifient la conjecture de Baum-Connes dans une version tout à fait analogue à celle utilisée par A. Connes pour les actions de $I\!R$.

Thom isomorphism and almost without holonomy foliations

Abstract.- We describe the holonomy groupoid of a foliation almost without holonomy as a graph of abelian groups. As a consequence, we obtain that the Baum-Connes conjecture holds true for these foliations in a way similar to the one described by A. Connes for $I\!R$-actions.

1.- Groupoïdes et feuilletages

Tout groupoïde de Lie G induit sur son espace d'unités M une relation d'équivalence ouverte, qui définit sur M un feuilletage de Stefan. Il est dit *régulier* lorsque ses fibres sont connexes et les sous-groupoïdes d'isotropie sont discrets; dans ce cas, le feuilletage induit sur M est régulier. Un groupoïde régulier *réalise un feuilletage* $\mathcal{F}$, lorsque ses orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$. Un groupoïde de Lie régulier à fibres contractiles est appelé *groupoïde classifiant*: cette appellation est justifiée par le fait que dans ce cas, le classifiant BG de G a le type d'homotopie de G (et donc aussi de M). Le groupoïde G est *K-orienté*, si le groupe structural du fibré $T(\mathcal{F})$ est réduit à $Mln^c(I\!R)$ (ou de façon équivalente, si le classifiant BG de G admet une structure $Spin^c$).

On désignera par $C^*(G)$ la C*-algèbre réduite du groupoïde de Lie (ou plus généralement, du groupoïde localement compact) G. Les notions d'équivalence de Morita sont définies pour les groupoïdes (respectivement, les C*-algèbres) dans [2] (respectivement, [9]). Enfin, dans [9], on montre que les C*-algèbres de groupoïdes équivalents sont équivalentes.

Si G est le groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$, il est Morita-équivalent (voir [2]) au groupoïde d'holonomie transverse $G_T^T = \{\gamma \in G : \alpha(\gamma), \beta(\gamma) \in T\}$, où T est une sous-variété transverse (en général non connexe). Deux feuilletages sont dits *Morita-équivalents*, si leurs groupoïdes d'holonomie respectifs le sont. Tout feuilletage est Morita-équivalent à un feuilletage à feuilles de dimension paire.

2.- Suite exacte en K-théorie topologique

On transpose à la catégorie des groupoïdes de Lie (puis de leurs C*-algèbres) la construction de la suite exacte de K-théorie d'une paire (M, U), où U est un ouvert d'une variété M, et on obtient: si G est un groupoïde de Lie régulier, on considère $U \subset M$ un ouvert saturé (pour le feuilletage réalisé par G sur M) et $F = M - U$. Alors G_U est un sous-groupoïde ouvert plein de G, et l'inclusion naturelle de G_U dans G induit un homomorphisme injectif de C*-algèbres (l'extension par zéro), $e: C^*(G_U) \longrightarrow C^*(G)$, dont l'image est un idéal fermé de $C^*(G)$. On appelle e un *morphisme d'inclusion* entre C*-algèbres. Le sous-groupoïde fermé $G_F = G - G_U$ n'est pas en général un groupoïde de Lie, mais seulement un groupoïde localement compact, dont l'inclusion dans G est propre. Cette inclusion induit un *morphisme de restriction* $r: C^*(G) \longrightarrow C^*(G_F)$. On obtient donc la suite: $0 \to C^*(G_U) \xrightarrow{e} C^*(G) \xrightarrow{r} C^*(G_F) \to 0$, où, en général, $Ker(r) \not\subset Im(e)$. On dit que le fermé F est *permis*, lorsque la suite ci-dessus est exacte: ces fermés permis seront obtenus à l'aide de conditions de moyennabilité (voir théorème 6). En procédant de façon tout à fait analogue au cas topologique, on montre [8]:

Proposition 1 *Avec les notations ci-dessus, si F est un fermé permis, on a la suite exacte longue:*

$$\to K_1(C^*(G_U)) \overset{e_*}{\to} K_1(C^*(G)) \overset{r_*}{\to} K_1(C^*(G_F)) \overset{\partial}{\to} K_0(C^*(G_U)) \overset{e_*}{\to} K_0(C^*(G)) \overset{r_*}{\to} K_0(C^*(G_F)).$$

Le morphisme de connexion ∂ est construit par un procédé en tout point semblable à celui utilisé dans le cas des espaces localement compacts et C*-algèbres commutatives: c'est donc une composition de morphismes d'inclusion et de restriction. Il en est ainsi pour tous les morphismes de groupes qui apparaissent dans la suite exacte longue ci-dessus; ceci servira pour établir les propriétés de fonctorialité au paragraphe 3.

3.- L'homomorphisme de Thom

Si G est un groupoïde K-orienté, qui réalise un feuilletage sur M à feuilles de dimension paire, A. Connes et G. Skandalis [1] construisent l'*homomorphisme de Thom* $\mu: K_0(C_0(M)) \longrightarrow K_0(C^*(G))$, qui en fait est induit par la *correspondance fondamentale* (au sens des groupoïdes, voir [8]) entre le groupoïde trivial M et le groupoïde d'holonomie G. Il possède les propriétés fonctorielles suivantes (voir [7] et [8]):

Proposition 2 *Si le groupoïde G est K-orienté et à feuilles de dimension paire, alors il en est de même pour les groupoïdes G_U et G_F et on a les diagrammes commutatifs:*

$$\begin{array}{ccc} K_0(C_0(U)) & \overset{(e_0)_*}{\longrightarrow} & K_0(C_0(M)) \\ \mu_U \downarrow & & \downarrow \mu \\ K_0(C^*(G_U)) & \overset{(e)_*}{\longrightarrow} & K_0(C^*(G)) \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} K_0(C_0(M)) & \overset{(r_0)_*}{\longrightarrow} & K_0(C_0(F)) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu_F \\ K_0(C^*(G)) & \overset{(r)_*}{\longrightarrow} & K_0(C^*(G_F)) \end{array}$$

Théorème 1 [8] *Dans les conditions ci-dessus, si U est un ouvert saturé et $F = M - U$ un fermé permis, on a un diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} K_1(C_0(U)) & \overset{(e_0)_*}{\to} & K_1(C_0(M)) & \overset{(r_0)_*}{\to} & K_1(C_0(F)) & \overset{\partial_0}{\to} & K_0(C_0(U)) & \overset{(e_0)_*}{\to} & K_0(C_0(M)) & \overset{(r_0)_*}{\to} & K_0(C_0(F)) \\ \downarrow \mu_U & (1) & \downarrow \mu & (2) & \downarrow \mu_F & (3) & \downarrow \mu_U & (4) & \downarrow \mu & (5) & \downarrow \mu_F \\ K_1(C^*(G_U)) & \overset{e_*}{\to} & K_1(C^*(G)) & \overset{r_*}{\to} & K_1(C^*(G_F)) & \overset{\partial}{\to} & K_0(C^*(G_U)) & \overset{(e)_*}{\to} & K_0(C^*(G)) & \overset{(r)_*}{\to} & K_0(C^*(G_F)) \end{array}$$

Preuve: Tous les homomorphismes qui apparaissent ont été obtenus à partir de morphismes d'inclusion ou de restriction, il suffit donc d'utiliser la proposition 2. ∎

4.- Feuilletages presque sans holonomie

On va appliquer les considérations précédentes à certains feuilletages $\mathcal{F}$ de codimension un, de classe C^r $(r \geq 1)$, transversalement orientés par un champ de vecteurs Y, de norme finie, sur une variété riemannienne complète M, de dimension m, tangent au bord si $\partial(M) \neq \emptyset$.

Le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est *presque sans holonomie* ([3] et [4]), si l'holonomie de toute feuille non fermée est triviale. Si M est compacte, on retrouve les feuilletages presque sans holonomie habituels. Le feuilletage est *de type fini*, s'il ne possède qu'un nombre fini de feuilles fermées. Cette restriction n'est que provisoire; il s'agit plutôt d'une simplification technique (voir [6]). Dans la suite, $(M, \mathcal{F})$ sera un feuilletage presque sans holonomie de type fini.

Un *graphe fini de groupes d'homéomorphismes abéliens de type fini de $\mathbb{R}$* est défini par les données suivantes:

(i) un graphe $\Gamma = (\Gamma^0, \Gamma^1, s, r)$ fini et orienté,

(ii) pour $s \in \Gamma^0$, un groupe abélien de type fini G_s d'homéomorphismes de $\mathbb{R}$, sans point fixe,

(iii) pour chaque $a \in \Gamma^1$, un groupe abélien de type fini H_a d'homéomorphismes de $I\!R$, ayant 0 comme unique point fixe,

(iv) pour chaque $a \in \Gamma^1$, deux homomorphismes de groupes: $S_a : H_a \longrightarrow G_{s(a)}$ et $R_a : H_a \longrightarrow G_{r(a)}$, où $R_a(f) = log \circ f \circ exp$ et $S_a(f) = log \circ f \circ -exp$, pour $f \in H_a$.

Géométriquement, le passage de H_a à $G_{r(a)}$ consiste à restreindre f à $(0, \infty)$, puis reparamétrer pour obtenir un homéomorphisme de la droite, qui évidemment ne possédera plus de point fixe. La notion d'isomorphisme de deux de tels graphes se définit de façon évidente. Il s'agit d'associer à $(M, \mathcal{F})$ un graphe fini de groupes d'homéomorphismes abéliens de type fini de $I\!R$:

Théorème 2 [8] *Il existe une transversale totale T au feuilletage, qui se plonge de façon naturelle dans M et qui définit un graphe fini de groupes d'homéomorphismes abéliens de type fini de $I\!R$, $\Gamma(\mathcal{F})$. En fait, $\Gamma(\mathcal{F})$, n'est rien que le groupoïde transverse de $\mathcal{F}$, relativement à T. Il est appelé le graphe du feuilletage $(M, \mathcal{F})$.*

Proposition 3 *Le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est sans holonomie si et seulement si $\Gamma(\mathcal{F})$ est réduit à un unique sommet s, dont le groupe G_s est le groupe d'holonomie du feuilletage.*

Théorème 3 *Si $(M_1, \mathcal{F}_1)$ et $(M_2, \mathcal{F}_2)$ sont deux feuilletages presque sans holonomie de type fini, ils sont Morita-équivalents si et seulement si leurs graphes associés sont isomorphes.*

Réciproquement, on peut montrer:

Théorème 4 [8] *A partir d'un graphe fini de groupes d'homéomorphismes abéliens de type fini de $I\!R$, Γ, on peut construire un feuilletage $(M_0, \mathcal{F}_0)$, qui vérifie:*

(i) $\mathcal{F}_0$ est presque sans holonomie, classifiant et à feuilles de dimension paire,
(ii) le graphe associé au feuilletage $(M_0, \mathcal{F}_0)$, $\Gamma(\mathcal{F}_0)$, est isomorphe à Γ.

Théorème 5 [8] *Le feuilletage construit dans le théorème 4, est Morita-équivalent à $(M, \mathcal{F})$.*

Si de plus $(M, \mathcal{F})$ est classifiant et F est la réunion des feuilles fermées, alors le groupoïde d'holonomie restreint G_F coïncide avec le groupoïde fondamental, $\Pi_1(F)$, et on en déduit:

Lemme 1 *Si U est une composante connexe de $M - F$, on a les isomorphismes de groupes $\mu_F : K^*(F) \longrightarrow K_*(\Pi_1(F))$ et $\mu_U : K_*(C_0(U)) \longrightarrow K_*(C^*((G_U))$.*

On obtient le résultat essentiel du travail:

Théorème 6 [8] *Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage presque sans holonomie, de type fini et classifiant, alors l'homomorphisme de Thom $\mu : K^*(M) \longrightarrow K_*(C^*((G))$ est un isomorphisme de groupes, appelé l'isomorphisme de Thom pour $(M, \mathcal{F})$.*

Idée de la preuve: On considère le fermé F réunion des feuilles à holonomie non nulle. Les groupes d'holonomie correspondants sont abéliens, donc moyennables; on en déduit aisément que F est un fermé permis. On pose $U = M - F$; le fibré $T(\mathcal{F})$ est trivial, donc les fibrés et les applications qui apparaissent dans les constructions précédentes sont évidemment K-orientées. Compte tenu du lemme 1 et du théorème 1, le lemme des cinq garantit que μ est aussi un isomorphisme. ∎

Par équivalence de Morita, on obtient le théorème final, qui généralise les résultats de [10]:

Théorème 7 *Si $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage presque sans holonomie de type fini sur M compacte, il vérifie la conjecture de Baum-Connes.*

Remarque.- Dans tout ce qui précède, on peut remplacer les C*-algèbres réduites par les C*-algèbres pleines $C^*_{\max}(G)$. Tous les résultats convenablement transposés restent valables, les preuves sont les mêmes simplifiées car il n'y a plus lieu d'introduire la notion de fermé permis: en effet, la suite $0 \to C^*_{\max}(G_U) \xrightarrow{e} C^*_{\max}(G) \xrightarrow{r} C^*_{\max}(G_F) \to 0$, est toujours exacte (voir [7]).

Références bibliographiques.-

[1] A. Connes and G. Skandalis, 1984, The longitudinal index theorem for foliations, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 20*, p.1139-1183.

[2] A. Haefliger, 1984, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, *Astérisque 116*, p.70-97.

[3] G. Hector, 1972, Sur les feuilletages presque sans holonomie, *C.R. Acad. Sc. Paris 274*, p.1703-1706.

[4] G. Hector, 1978, Croissance des feuilletages presque sans holonomie, *Springer Lecture Notes in Maths 652*, p.141-182.

[5] G. Hector, 1994, Groupoïdes, feuilletages et C*-algèbres (quelques aspects de la conjecture de Baum-Connes), *Proceedings Geometric Study of Foliations, Tokyo 1993, World Scientific*, p.3-34.

[6] G. Hector et M. Macho-Stadler, L'isomorphisme de Thom pour les graphes de groupes abéliens (à paraître).

[7] M. Hilsum et G. Skandalis, 1987, Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes), *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 20*, p. 325-390.

[8] M. Macho-Stadler, 1996, *Isomorphisme de Thom pour les feuilletages presque sans holonomie*, Thèse Lyon I.

[9] P.S. Mulhy, J. Renault and D.P. Williams, 1987, Equivalence and isomorphism for groupoid C*-algebras, *J. Operator Theory 17*, p.3-22.

[10] A.M. Torpe, 1985, K-theory for the leaf space of foliations by Reeb components, *J. of Funct. Anal. 61*, p.15-71.

G. Hector: Institut Girard Desargues. Université Claude Bernard Lyon I. 43, Bd 11 Novembre 1918. 69622 Villeurbanne Cedex, FRANCE. *Tél.:* 04.72.43.15.79. *Fax.:* 04.72.43.00.35.
e-mail: hector@geometrie.univ-lyon1.fr

M. Macho-Stadler: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del País Vasco, Apartado 644, 48080 Bilbao, ESPAGNE. *Tél.:* 34-4-4647700. *Fax.:* 34-4-4858147.
e-mail: mtpmastm@lg.ehu.es