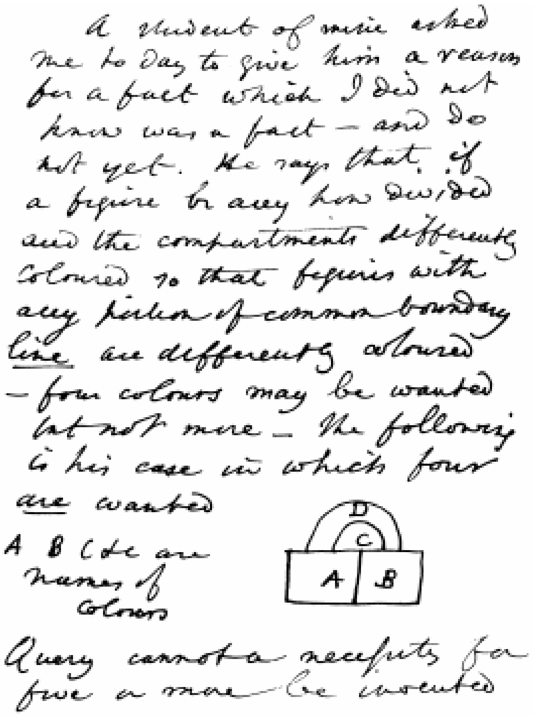
¿Cuatro colores son suficientes?

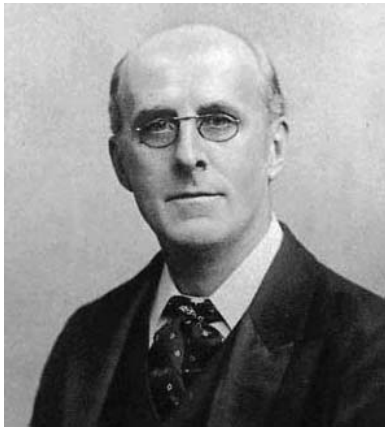


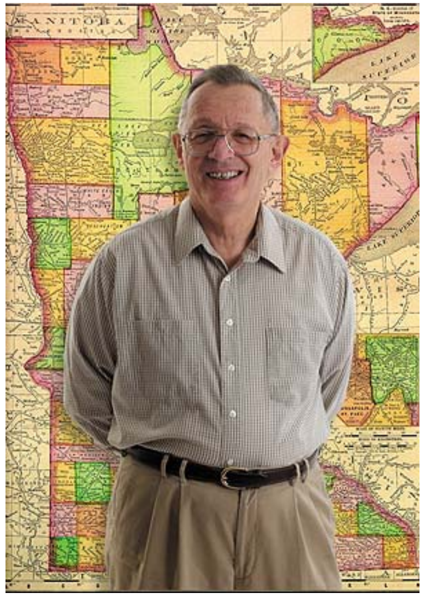
A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C &c are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.





Guión de la charla

- Un poco de historia sobre el problema de los cuatro colores: de 1852-1996

La “prueba” fallida de Kempe… y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la demostración con ayuda de ordenador

Conclusiones

Fechas importantes

- 1852: Francis Guthrie plantea el problema a su hermano Frederick y a Augustus de Morgan.
- 1878: Arthur Cayley publica el enunciado de la conjetura.
- 1879: Sir Alfred Bray Kempe publica su demostración.
- 1890: Percy Heawood descubre un error insalvable en la demostración de Kempe. Aporta ideas de coloreado para mapas sobre superficies de género mayor que 0.
- 1913: George Birkhoff formula la noción de configuración reducible.

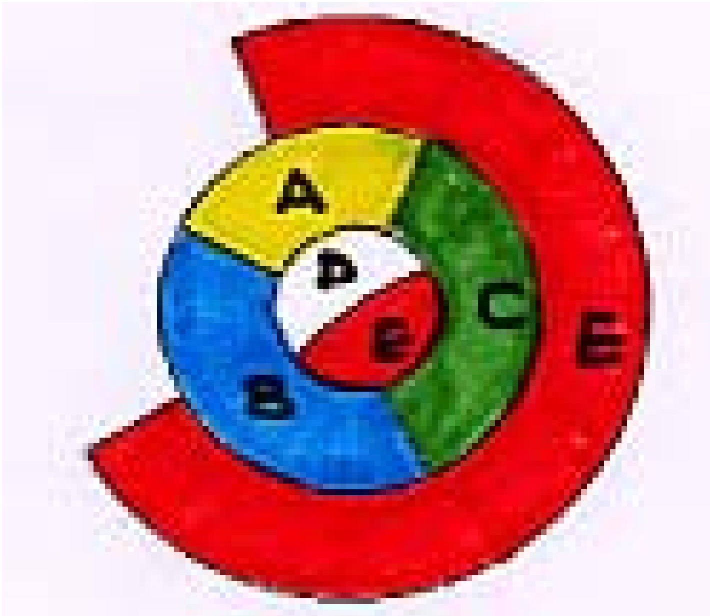
Fechas importantes

- 1960: El método de descarga.
- 1969: Avances de Heinrich Heesch en reducibilidad y la obtención de conjuntos inevitables de configuraciones.
- 1976: Ken Appel y Wolfgang Haken prueban con ayuda de un ordenador que sus 1478 configuraciones son reductibles (50 días de cálculo).
- 1995: Robertson, Sanders, Seymour y Thomas mejoran la demostración con ayuda de ordenador (sólo 633 configuraciones) y automatizan la prueba de la inevitabilidad.

¿Qué dice la conjetura?

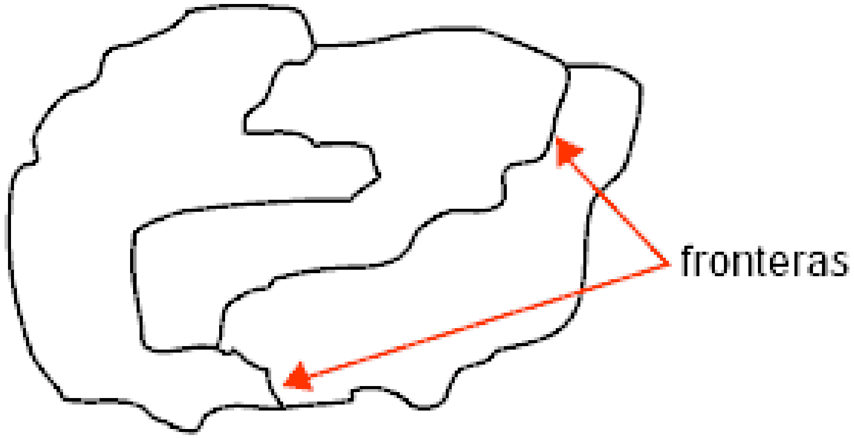
Bastan 4 colores para colorear un mapa geográfico plano sin que dos países con frontera común tengan el mismo color.

Un mapa es conexo y cada una de sus regiones es conexa, es decir no se admite una figura como la adjunta.



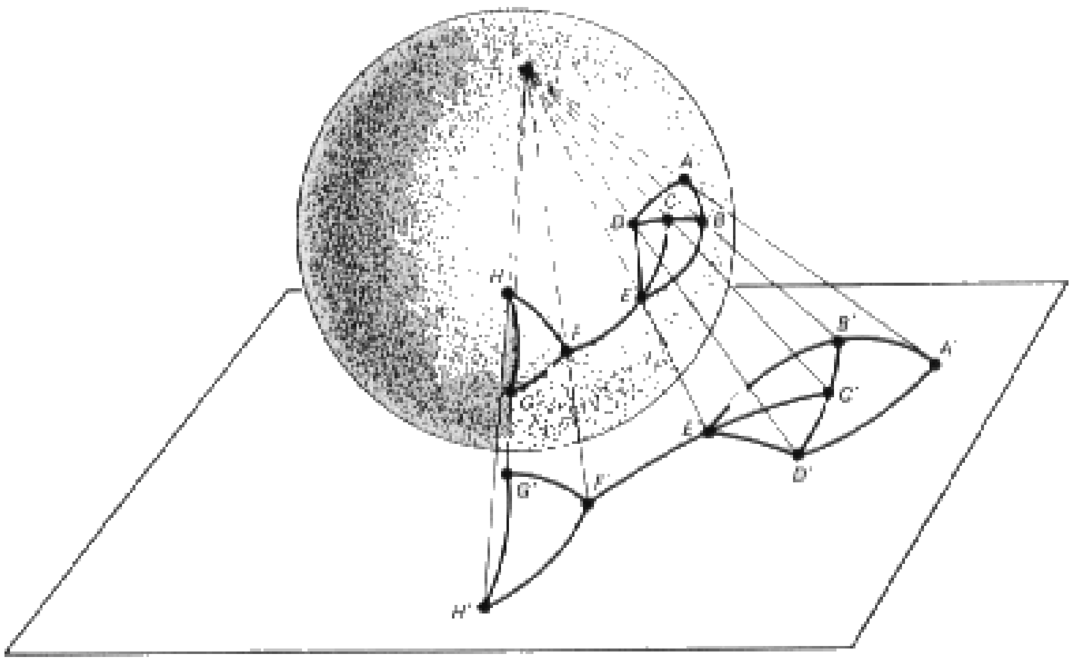
¿Qué dice la conjetura?

Dos regiones no pueden tocarse sólo en un punto, y así, se pueden ignorar regiones con una única línea frontera.



Es un *problema topológico*, pues no importa la forma de las regiones, sino como están colocadas las unas respecto a las otras.

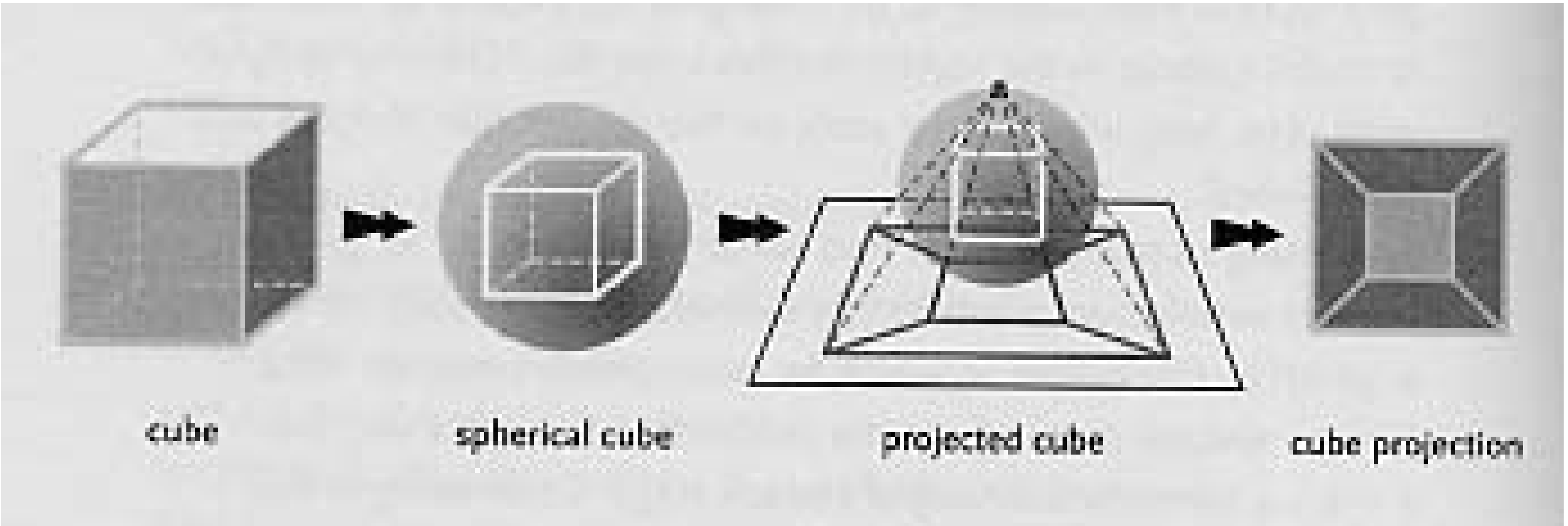
Equivalencia para mapas esféricos



La conjetura de 4-coloreado sobre mapas planos equivale a la conjetura de 4-coloreado sobre mapas esféricos… basta con proyectar estereográficamente.

La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Se puede pasar de poliedros a mapas del siguiente modo: se infla el poliedro sobre una esfera, se proyecta estereográficamente y se tiene el poliedro proyectado sobre el plano.



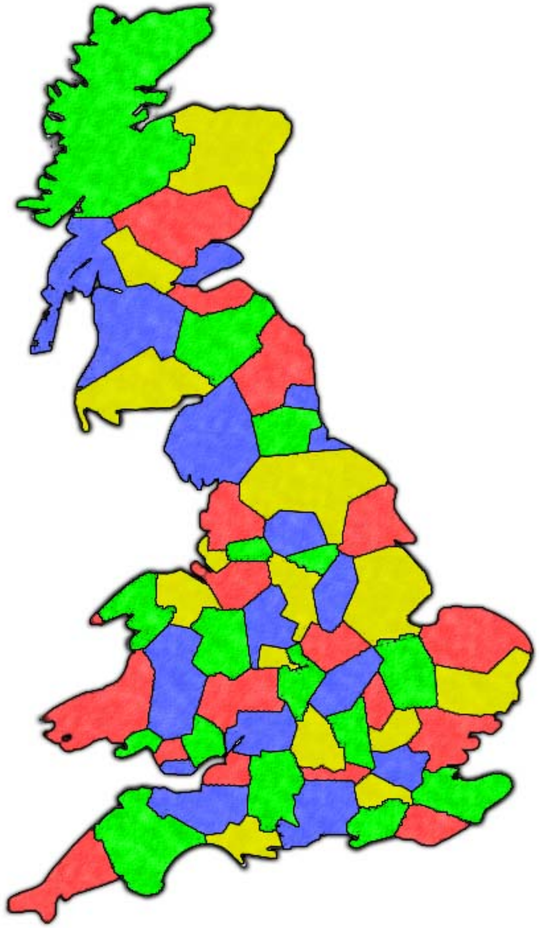
La propiedad fundamental: la fórmula de Euler

Puede hablarse de la *fórmula de Euler para mapas* (sin olvidarse de la región exterior):

Núm(regiones) – Núm(líneas frontera) + Núm(puntos encuentro) = 2

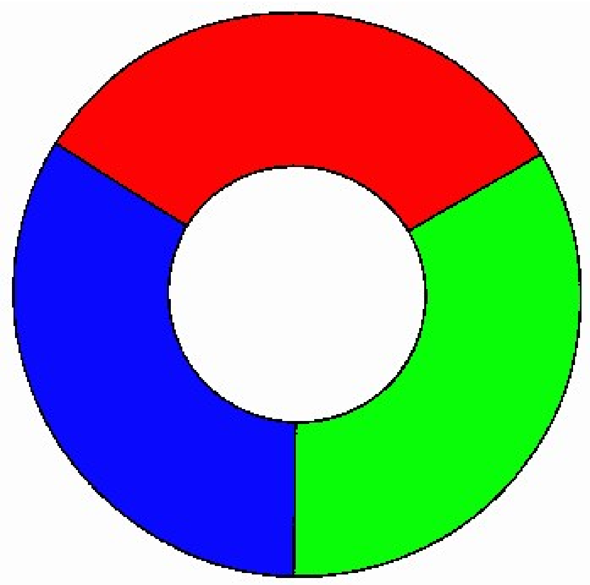
Francis Guthrie

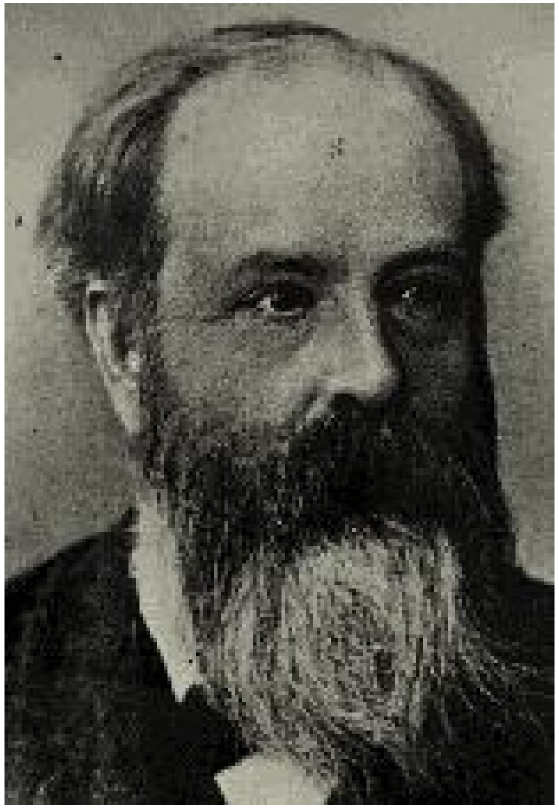
Francis Guthrie (1839-1899) abogado y botánico, observa que puede colorear un mapa complejo de los cantones de Inglaterra con 4 colores. En 1852, enuncia el problema a su hermano Frederick y a Augustus de Morgan, …



Francis Guthrie

… probando que
3 colores no
bastan con el
diagrama “crítico”:





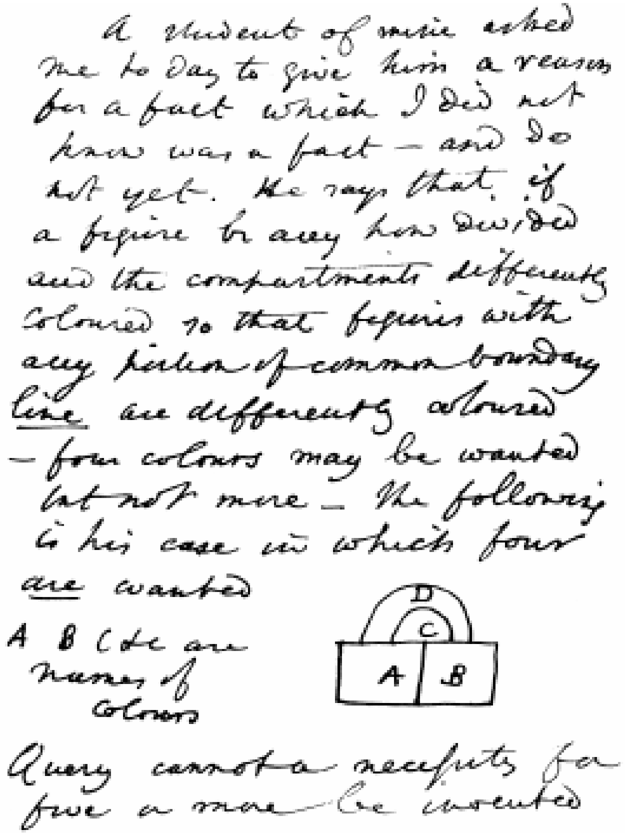
Frederick Guthrie,
fundador de la
Physical Society
en 1874

Francis Guthrie

Francis Guthrie va a vivir en 1861 a Sudáfrica, donde trabaja como profesor de Matemáticas. Es un botánico entusiasta y estudia la flora local. Tres especies raras llevan su nombre:
Cyrtanthus guthrieae, Gladiolous guthriei y Homoglossum guthriei

Augustus de Morgan

Augustus de Morgan (1806-1871) estaba muy interesado en la conjetura de los 4 colores y difundió entre sus colegas su importancia.



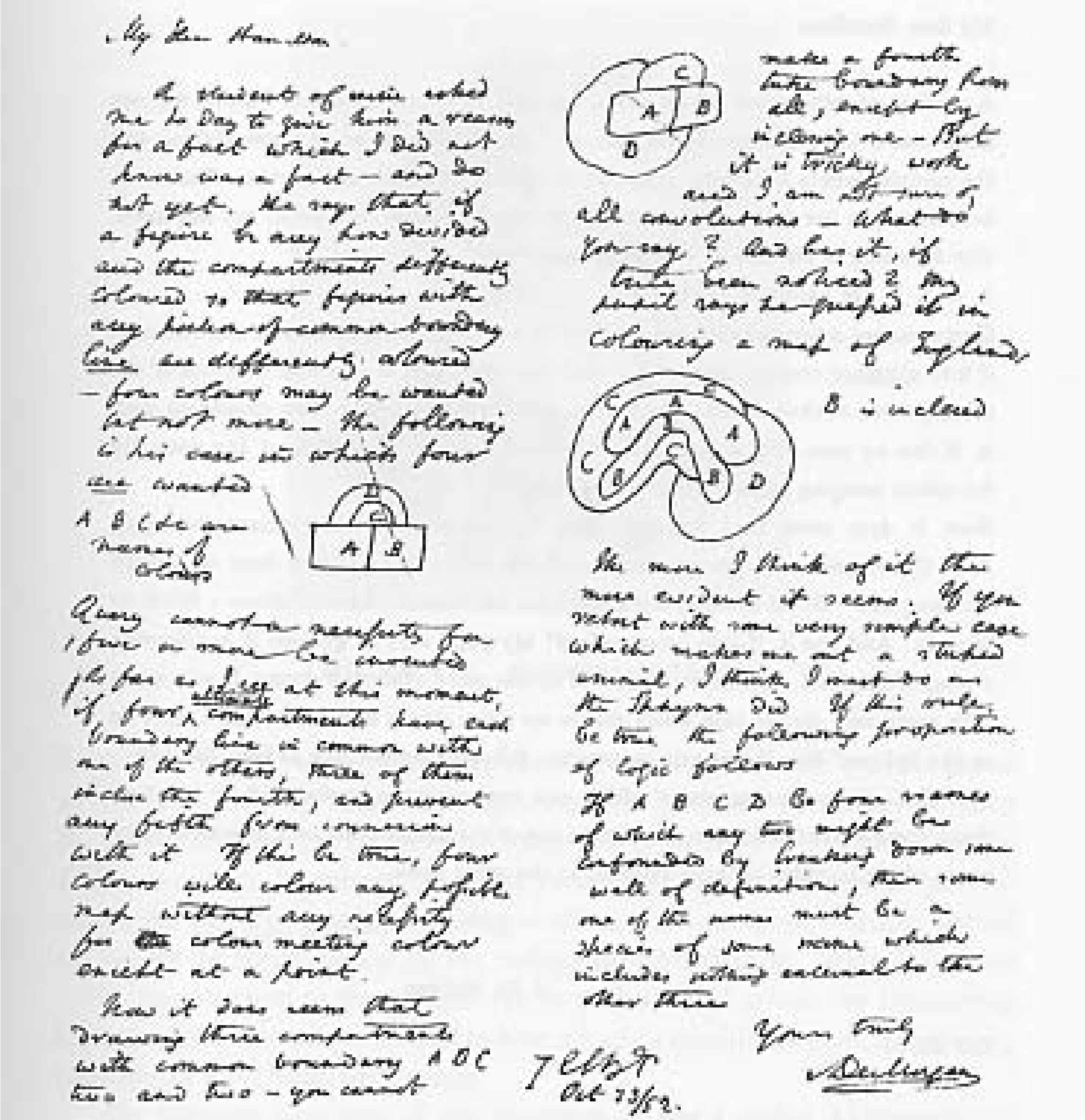
A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C &c are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

Part of Augustus De Morgan's letter to Sir William Rowan Hamilton, 23 October 1852.

Una de las primeras personas con las que habló fue William Rowan Hamilton, que en principio no compartía el interés de De Morgan por el problema.



My dear Hamilton

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented

As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two — you cannot make a fourth take boundary from all, except by inclosing one — But it is tricky work and I am not sure of all convolutions — What do you say? And has it, if true been noticed? My pupil says he guessed it in colouring a map of England.

B is inclosed

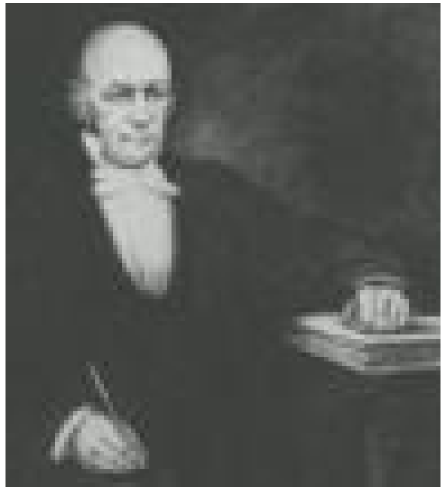
The more I think of it the more evident it seems. If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be confounded by breaking down some wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes nothing external to the other three

Yours truly
A De Morgan

7 Camden St
Oct 23/52

Extract from de Morgan's original letter to Hamilton, printed with kind permission from *The Board of Trinity College, Dublin.*



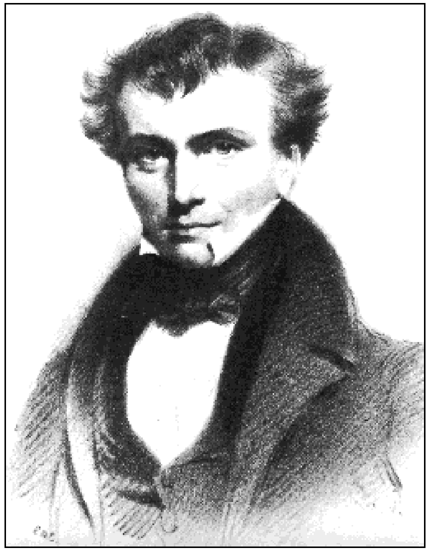
Cuatro días después, Hamilton le contesta:

“I am not likely to attempt your “quaternion” of colours very soon”

Augustus de Morgan

Decepcionado por el desinterés de Hamilton, De Morgan se puso en contacto con otros matemáticos. En 1853, escribe al famoso filósofo William Whewell (Cambridge),

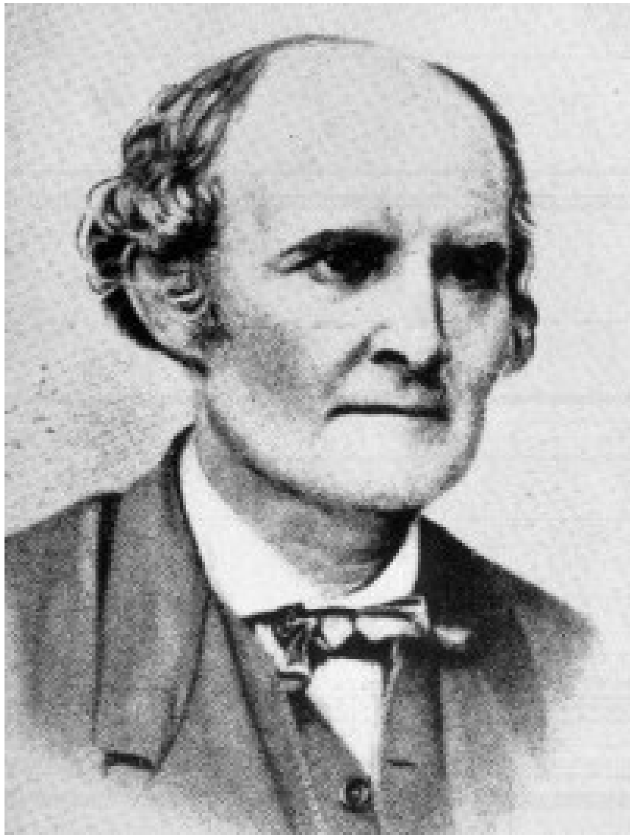
describiendo su observación como un axioma matemático.



Augustus de Morgan

El problema de los 4 colores cruza el Atlántico y llega hasta el matemático, filósofo y lógico Charles Sanders Peirce (1839-1914) que da un seminario sobre la demostración… aunque nunca la escribió.

Arthur Cayley



Tras la muerte de De Morgan en 1871, el problema de los cuatro colores parece dormido. Peirce continúa intentando probarlo en EE.UU., pero ninguno de los amigos británicos de De Morgan lo mencionan.
Pero, el problema no está del todo olvidado gracias a Arthur Cayley (1821-1895) de la Universidad de Cambridge. Cayley ejerció de abogado, y continúo durante esa época con sus investigaciones matemáticas, en particular es uno de los padres fundadores del álgebra de matrices.

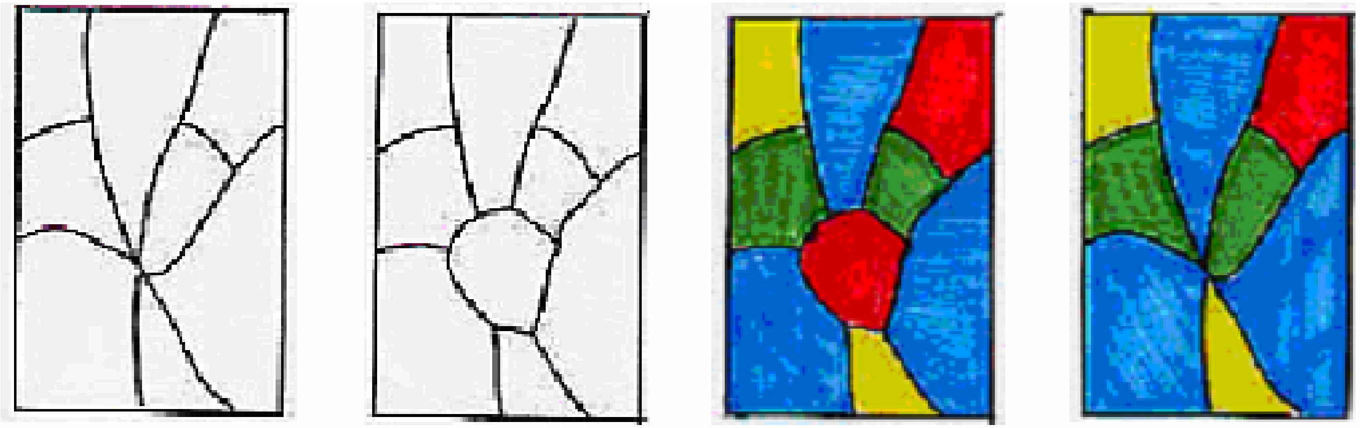
Arthur Cayley

En junio de 1878, Arthur Cayley acude a un Encuentro de la London Mathematical Society, donde hace la pregunta:
"Has a solution been given of the statement that in colouring a map of a country, divided into counties, only four colours are required, so that no two adjacent counties should be painted in the same colour?"

En 1879 Publica una nota sobre el tema en los "Proc. Royal Geographical Soc." , donde explica la dificultad del tema. Entre otros, hace la útil observación de que, cuando se intenta probar el teorema de los 4 colores, pueden imponerse condiciones más restrictivas sobre los mapas a colorear, en particular, basta con restringir nuestra atención a mapas cúbicos, es decir, aquellos en los que hay <u>exactamente</u> 3 regiones en cada punto de encuentro: en efecto…

Arthur Cayley

… en efecto, supongamos un mapa en el que hay más de 3 regiones en alguno de los puntos de encuentro. Sobre este punto puede pegarse un pequeño parche que produce un mapa cúbico. Si se puede colorear este mapa con cuatro colores, se puede obtener un 4-coloreado del mapa original, simplemente aplastando el parche en un punto…



mapa original   parcheado   coloreado   coloreado final

Guión de la charla

Un poco de historia sobre el problema de los cuatro colores: de 1852-1996

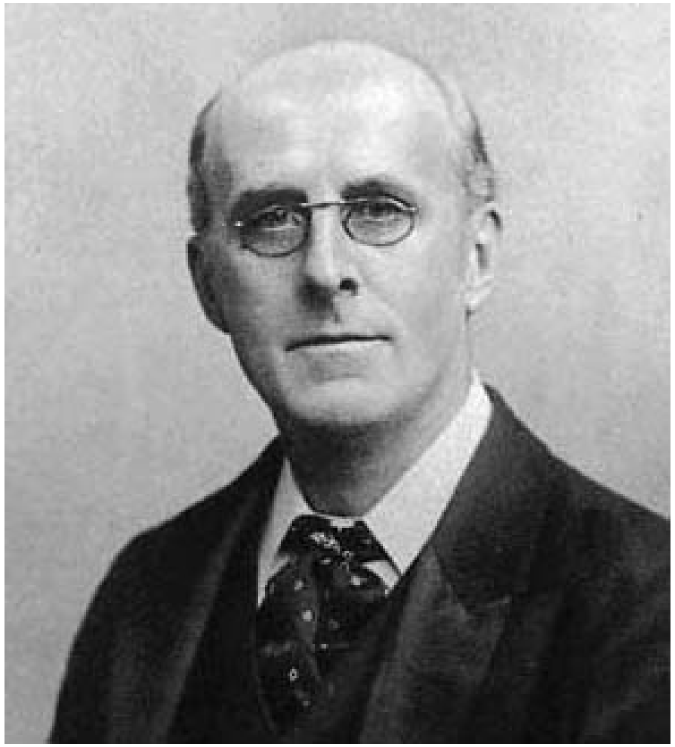
- La “prueba” fallida de Kempe… y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la demostración con ayuda de ordenador

Conclusiones

Alfred Bray Kempe

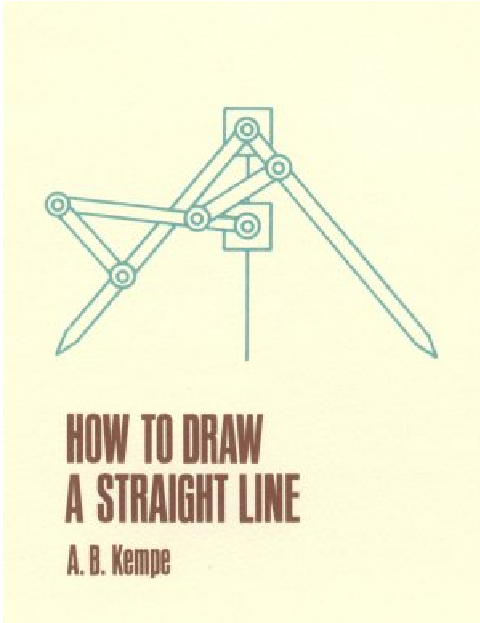
Alfred Bray Kempe (1849-1922) era un soberbio cantante. Aprendió matemáticas de Cayley y se graduó en 1872, con distinción en matemáticas.
A pesar de su pasión por las matemáticas y la música, eligió la profesión de abogado (especializado en la ley eclesiástica), dejando las matemáticas y la música (y el alpinismo, existe un monte Kempe en el Antártico) como pasatiempos.



Alfred Bray Kempe

En 1872 escribió su primer trabajo matemático sobre la solución de ecuaciones por medios mecánicos y cinco años más tarde, estimulado por un descubrimiento de Peaucellier sobre un mecanismo para trazar líneas rectas, publicó su famosa memoria sobre mecanismos titulada *"Como trazar una línea recta".*

Kempe se interesa por el problema de los 4 colores tras la pregunta de Cayley en la London Mathematical Society.



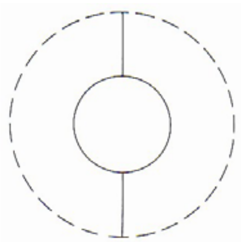
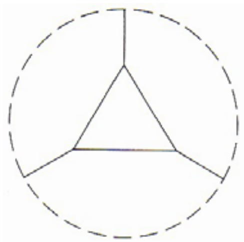
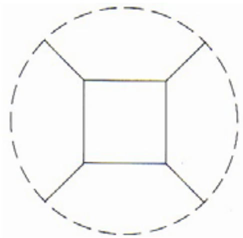
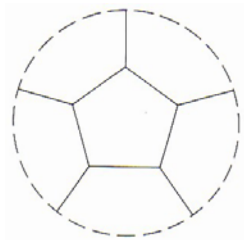
En junio de 1879 obtiene su solución del teorema de los 4 colores y lo publica en el Amer. Journal of Maths. En 1880, publica unas versiones simplificadas de su prueba, donde corrige algunas erratas de su prueba original, pero deja intacto el error fatal.

Alfred Bray Kempe

Kempe usa la fórmula de Euler para mapas cúbicos para obtener la llamada *“counting formula*”, que permite probar:

“Todo mapa tiene al menos una región ≤ 5 regiones vecinas”

Es decir, cada mapa contiene al menos un digon, un triángulo, un cuadrado o un pentágono.

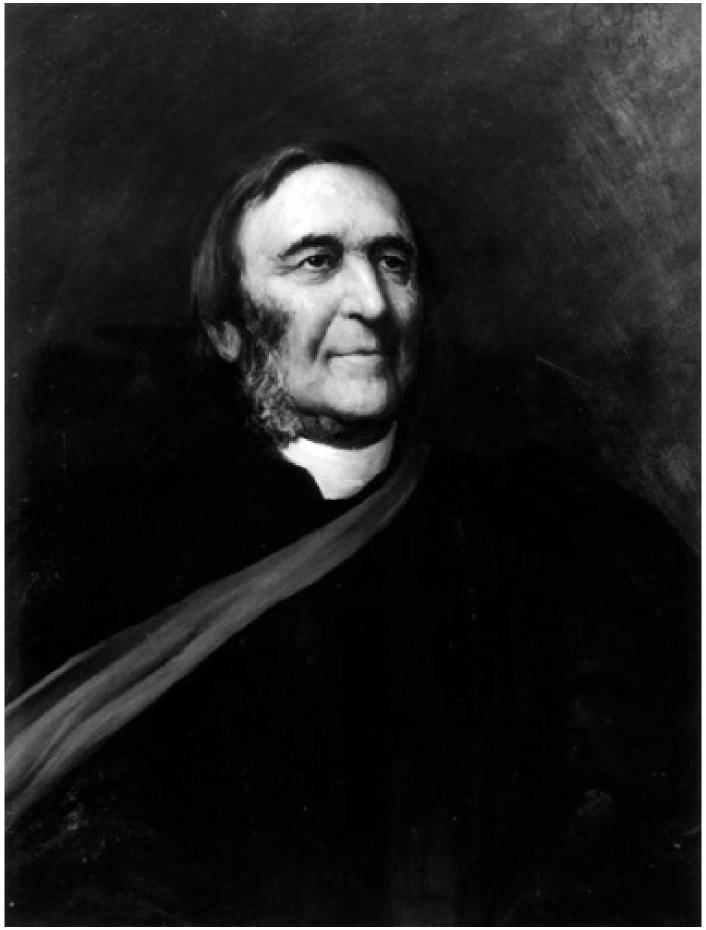





“Un mapa cúbico que no contiene digones, triángulos o cuadrados debe contener al menos 12 pentágonos”.

Por fin la “demostración”

Todos pensaban que la prueba tenía que ser más corta…

En 1887, el director del Clifton College organiza un concurso para encontrar una demostración del teorema de los 4 colores que ocupase menos de 30 líneas.
Entre otros, presentaron una prueba conjunta el obispo de Londres y el que más tarde sería el arzobispo de Canterbury (Frederick Temple).

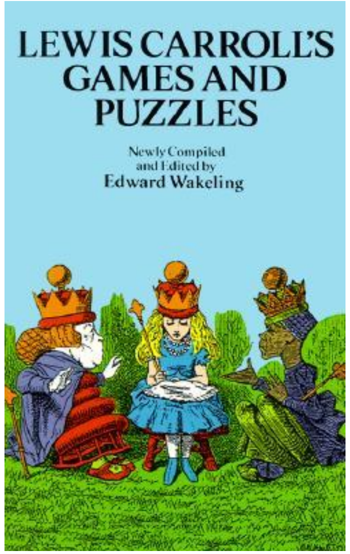


Por fin la “demostración”

Uno de los ingleses victorianos que se divirtió con el teorema de los 4 colores fue Lewis Carroll (1832-1898). A Carroll le encantaba inventar puzzles y juegos. Uno de ellos es precisamente:

- ***A is to draw a fictitious map divided into counties.***
- ***B is to colour it (or rather mark the counties with names of colours) using as few colours as possible.***
- ***Two adyacent counties must have different colours.***
- ***A’s object is to force B to use as many colours as possible.***

How many can he force B to use?

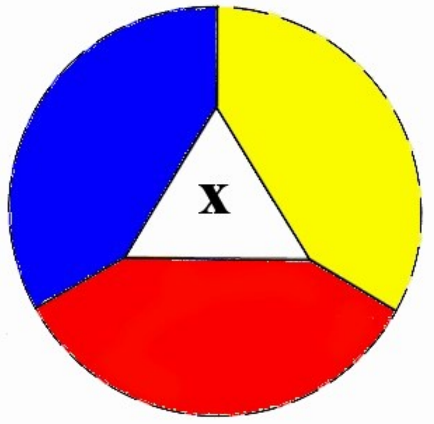


La "demostración"

Si X es una región del mapa cúbico ***M***, denotamos por v(X) el número de sus regiones vecinas. La prueba se hace por inducción sobre el número de regiones. Como ***M*** es un mapa cúbico, sabemos que existe una región X con v(X) ≤ 5.

Hipótesis de inducción: ***M*** - {X} es 4-coloreable.

Veamos que ***M*** también lo es. Hay tres casos**.**



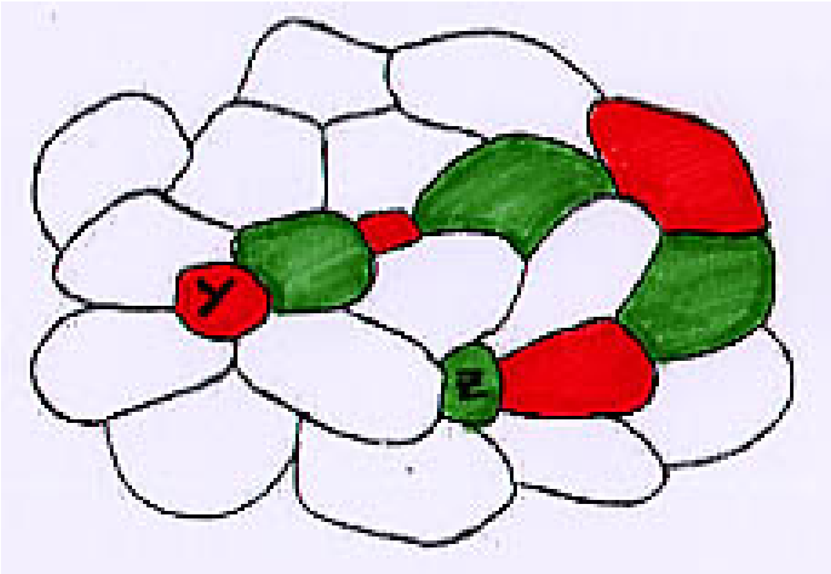
CASO 1: v(X) = 3

Basta con colorear X con el cuarto color

La “demostración”

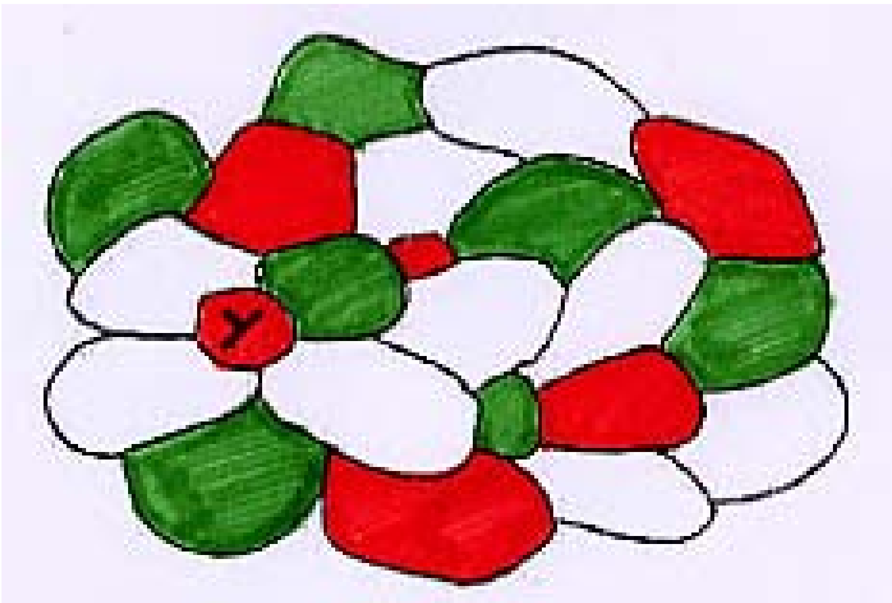
<u>**CASO 2**</u>**: v(X) = 4**

Si Z e Y son dos regiones, Y de color **rojo** de un mapa 4-coloreado, se llama **cadena de Kempe rojo-verde** de Y a Z a un camino que va de Y a Z, alternando los colores **rojo** y **verde.**



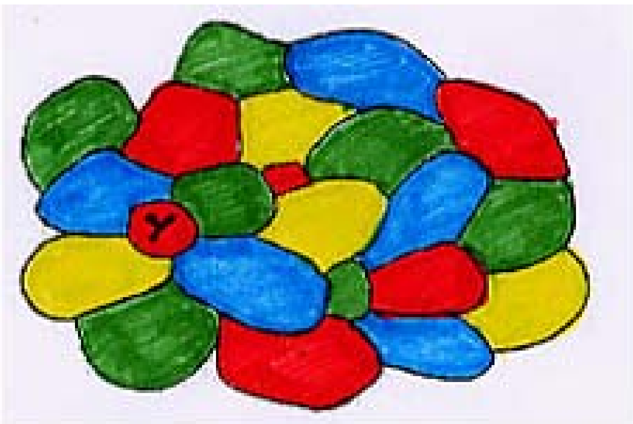
La “demostración”

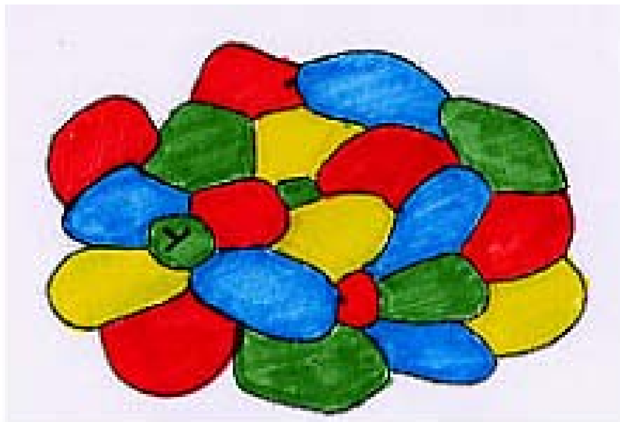
Una componente **rojo-verde** de Y es el conjunto de todas las regiones Z del mapa, tales que existe una cadena de Kempe **rojo-verde** de Y a Z.



La “demostración”

El interés de estas dos definiciones es que se pueden invertir los colores **rojo** y **verde** en una componente **rojo**-**verde** cualquiera de un grafo 4-coloreado para obtener un nuevo 4-coloreado respetando la regla de los 4 colores.

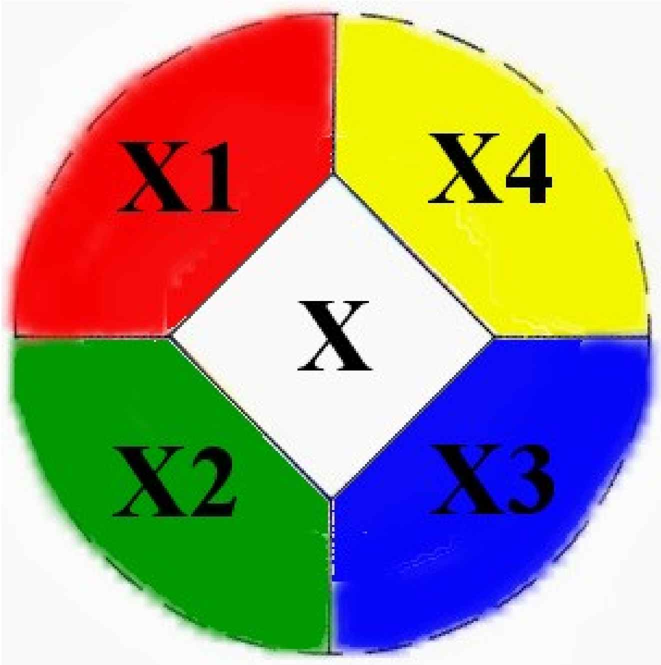




Carta original y carta obtenida por inversión de la componente **rojo**-**verde.**

La “demostración”

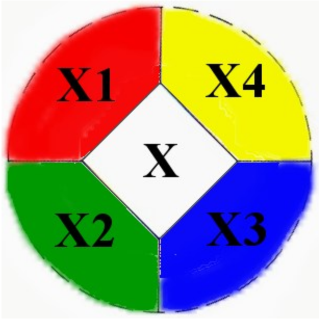
En este caso en que **v(X) = 4,** un entorno de X es de la forma:



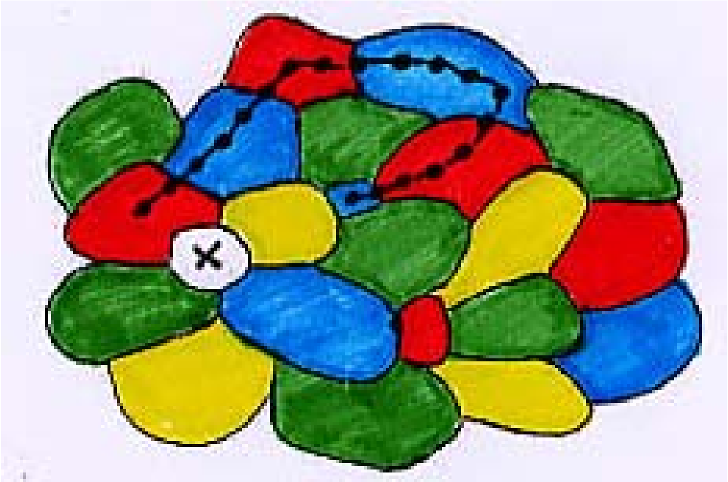
Y se distinguen dos casos:

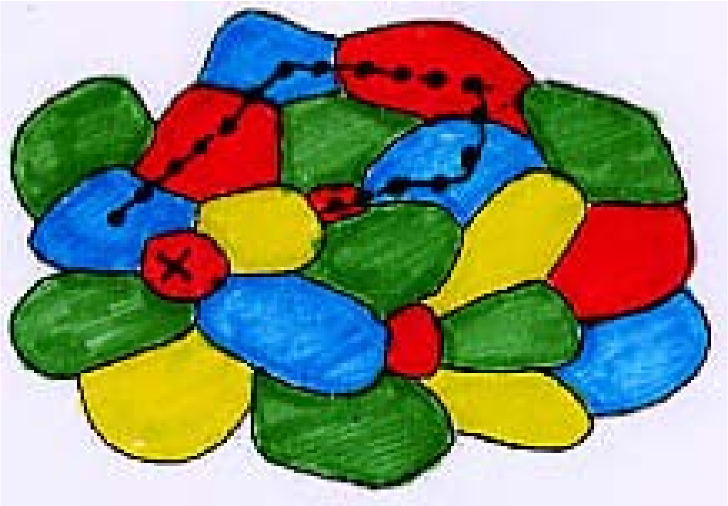
1. X_3 no está en la componente **rojo-azul** de X_1
2. X_3 está en la componente **rojo-azul** de X_1

La “demostración”



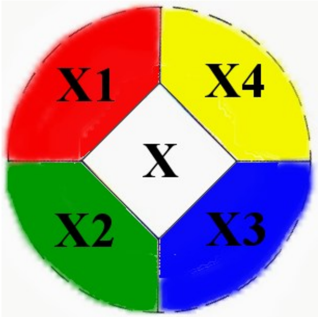
1. Si X_3 no está en la componente **rojo**-**azul** de X_1



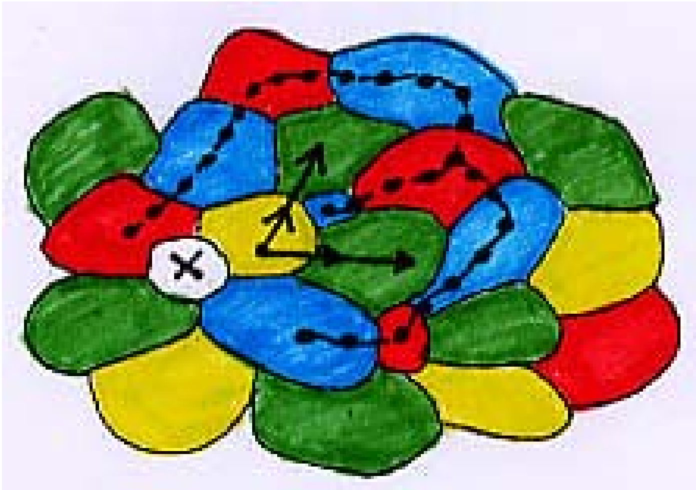


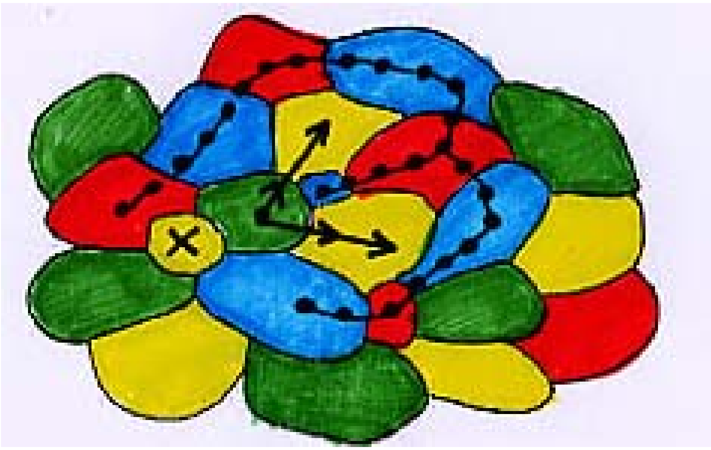
Entonces, se invierten el **rojo** y el **azul** en esta componente y se libera un color para X.

La “demostración”



2. Si X_3 está en la componente **rojo-azul** de X_1

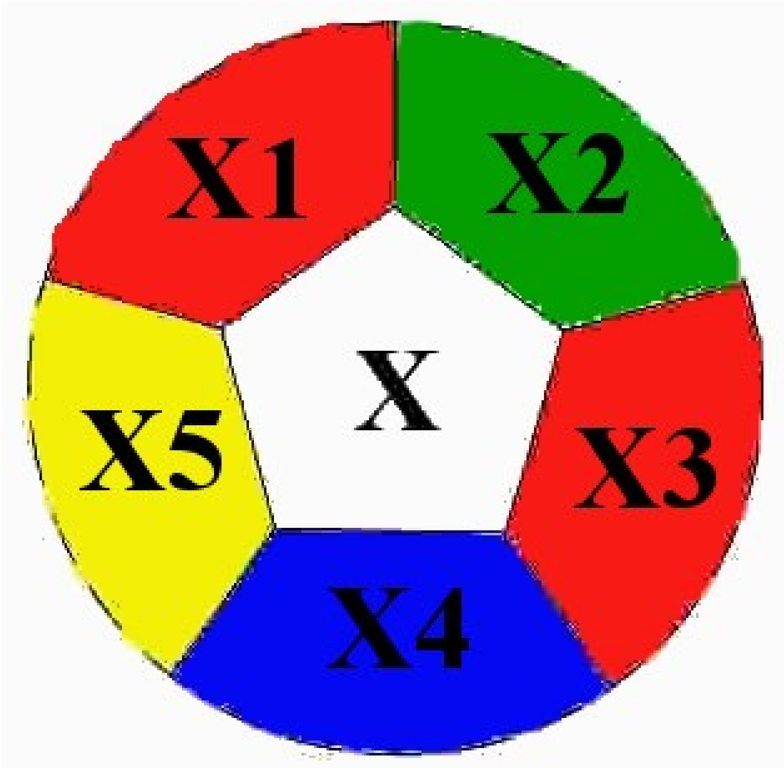




Entonces, X_2 no está en la componente **amarillo-verde** de $X_{4,}$ y se hace un cambio en la componente de X_4.

La “demostración”

En este caso en que **v(X) = 5,** un entorno de X es de la forma:

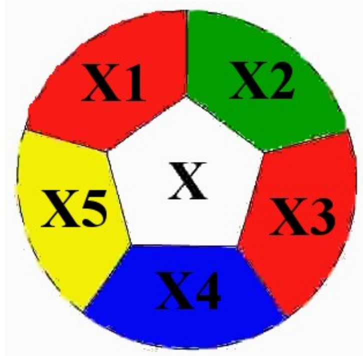


Se distinguen dos casos:

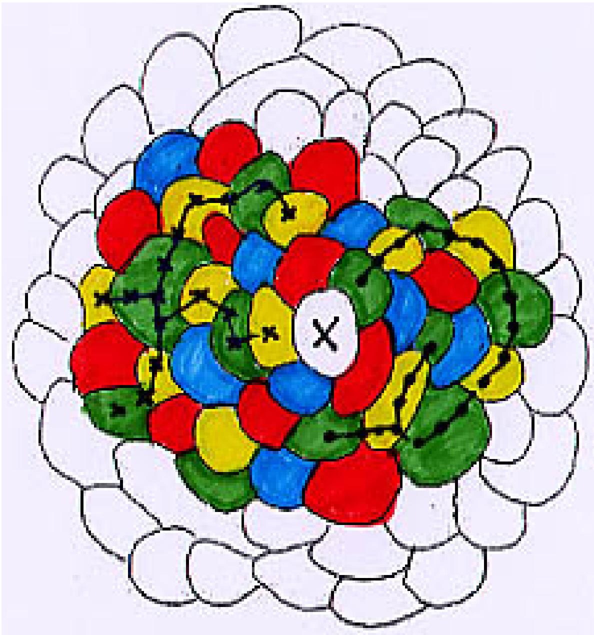
1. X_2 no pertenece a la componente **amarilla**-**verde** de X_5 **o** X_2 no pertenece a la componente **azul**-**verde** de X_4,

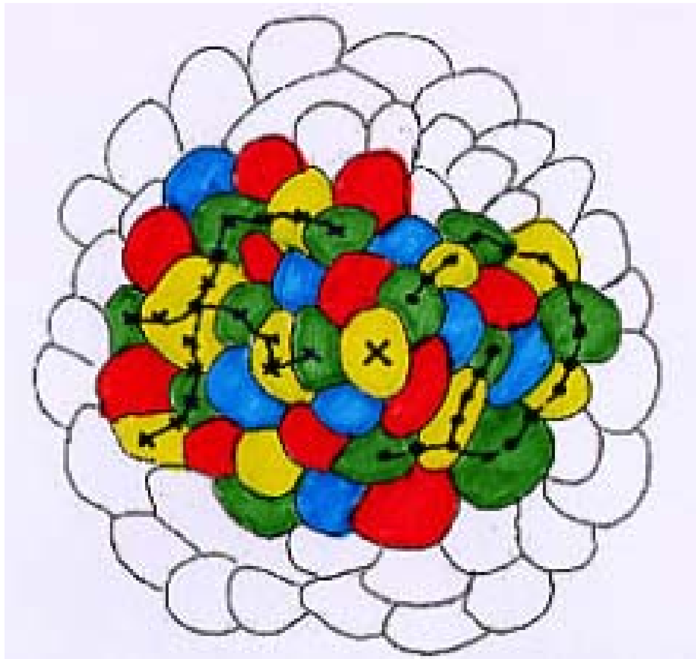
2. X_2 pertenece a la componente **amarilla**-**verde** de X_5 **y** X_2 pertenece a la componente **azul**-**verde** de X_4

La “demostración”



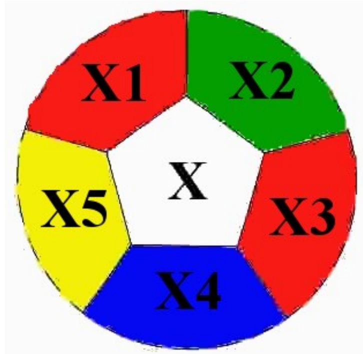
<u>CASO 1</u>: Supongamos que X_2 no pertenece a la componente **amarilla**-**verde** de X_5 (el otro caso se hace análogamente).



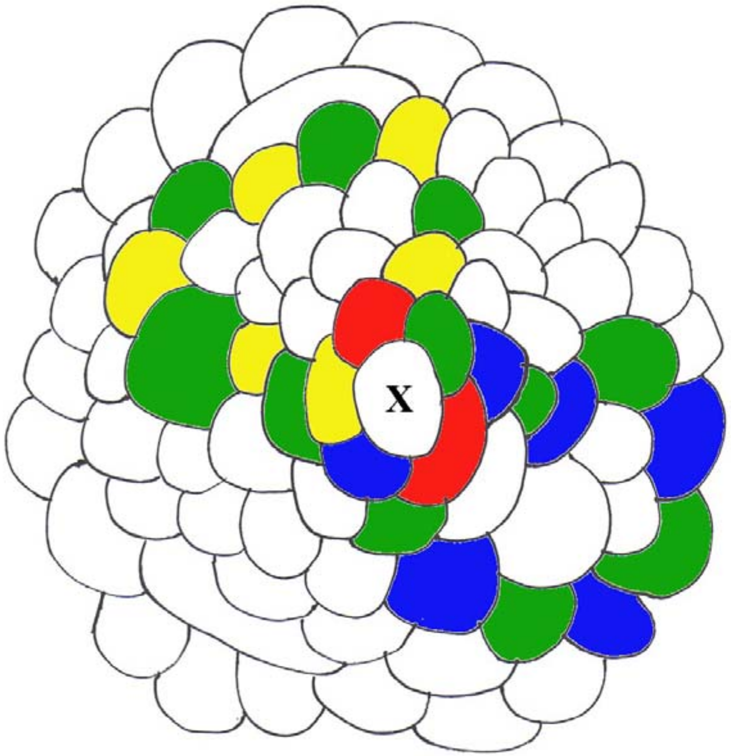


Se invierten el **amarillo** y el **verde** en esta componente y se libera un color para X.

La “demostración”



<u>CASO 2</u>: X_2 pertenece a la componente **amarilla**-**verde** de X_5 **<u>y</u>** X_2 pertenece a la componente **azul**-**verde** de X_4.

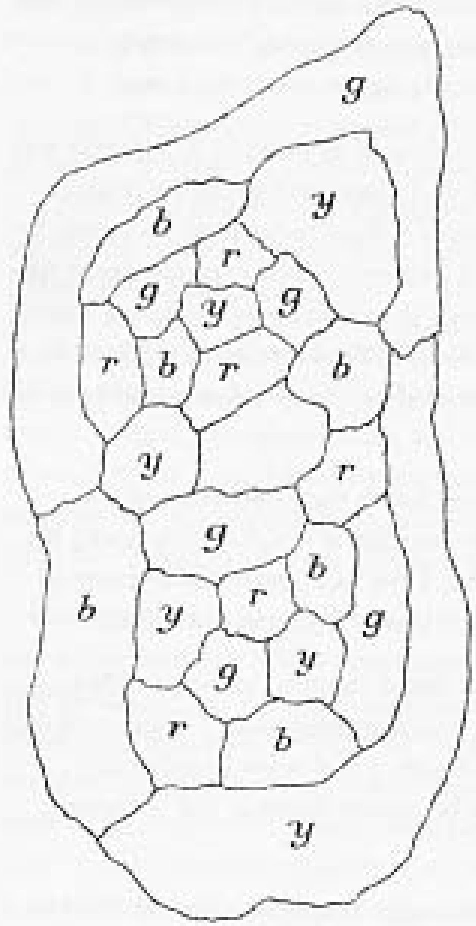


Se invierten las componentes **roja**-**azul** de X_1 y **roja**-**amarilla** de X_3 para liberar el **rojo** para X.

Percy Heawood

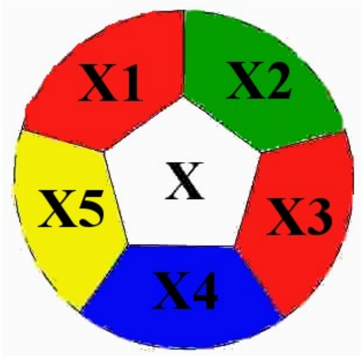
Percy John Heawood (1861-1955) publica *“Map Colour Theorem”* en el Jour. Pure Appl. Maths en 1890.

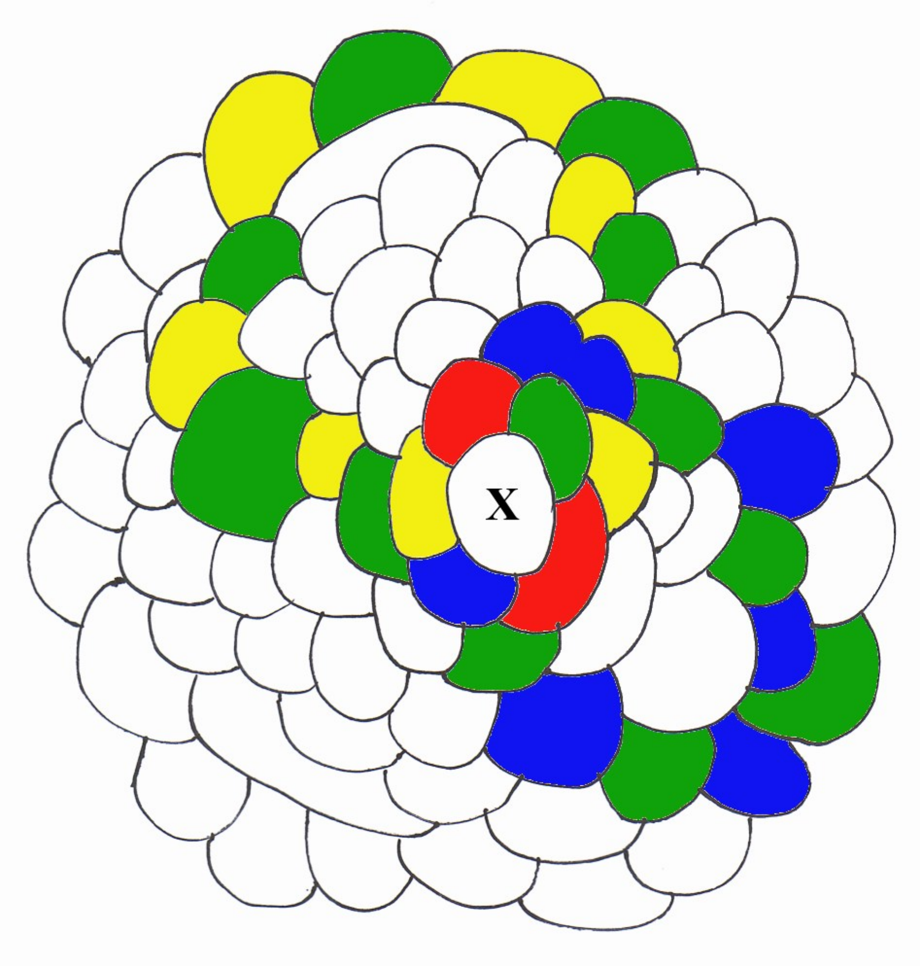
Encuentra, *muy a su pesar*, un caso para el que la prueba de Kempe no funciona .



Heawood's counter-example to Kempe's proof.

El error fatal…





Aquí se encuentra el error: en efecto, las componentes **amarilla**-**verde** de X_5 y **azul**-**verde** de X_4 pueden cruzarse. Entonces, las componentes **rojo**-**azul** de X_1 y **rojo**-**amarillo** de X_3 no son invertibles simultáneamente.

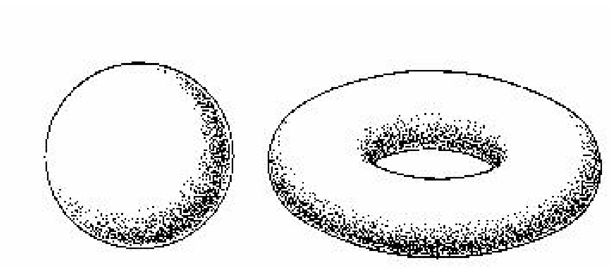
Percy Heawood

Heawood prueba además el teorema de los cinco colores usando el argumento de las cadenas de Kempe.

Heawood prueba también que el número máximo **N** de colores necesarios para colorear el mapa (su número cromático) sobre una superficie de género g > 0 (todas menos la esfera…) sin borde es la parte entera de: $\mathbf{1/2\,(7+ (48g+1)^{1/2})}$

Este es el llamado *"problema de coloreado de mapas de Heawood".*

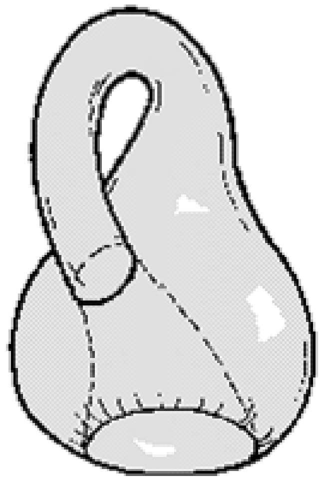
El género



La fórmula de Euler, para poliedros en género g > 0 (Lhuilier) queda:

- **Caso orientable**

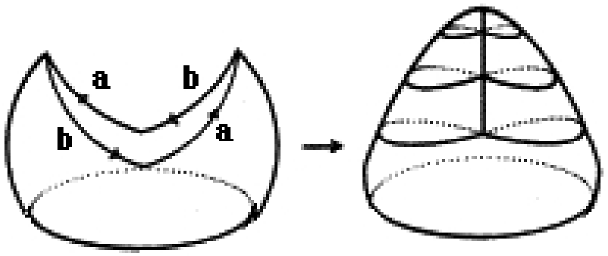
  Núm(caras) – Núm(aristas) + Núm(vértices) = 2-2g



Klein bottle

- **Caso no orientable**

Núm(caras) – Núm(aristas) + Núm(vértices) = 2-g



Percy Heawood

En 1968, Ringel y Youngs prueban que para toda superficie sin borde orientable de género g > 0 o toda superficie sin borde no orientable distinta de la botella de Klein, **N** no es el máximo sino el número exacto.

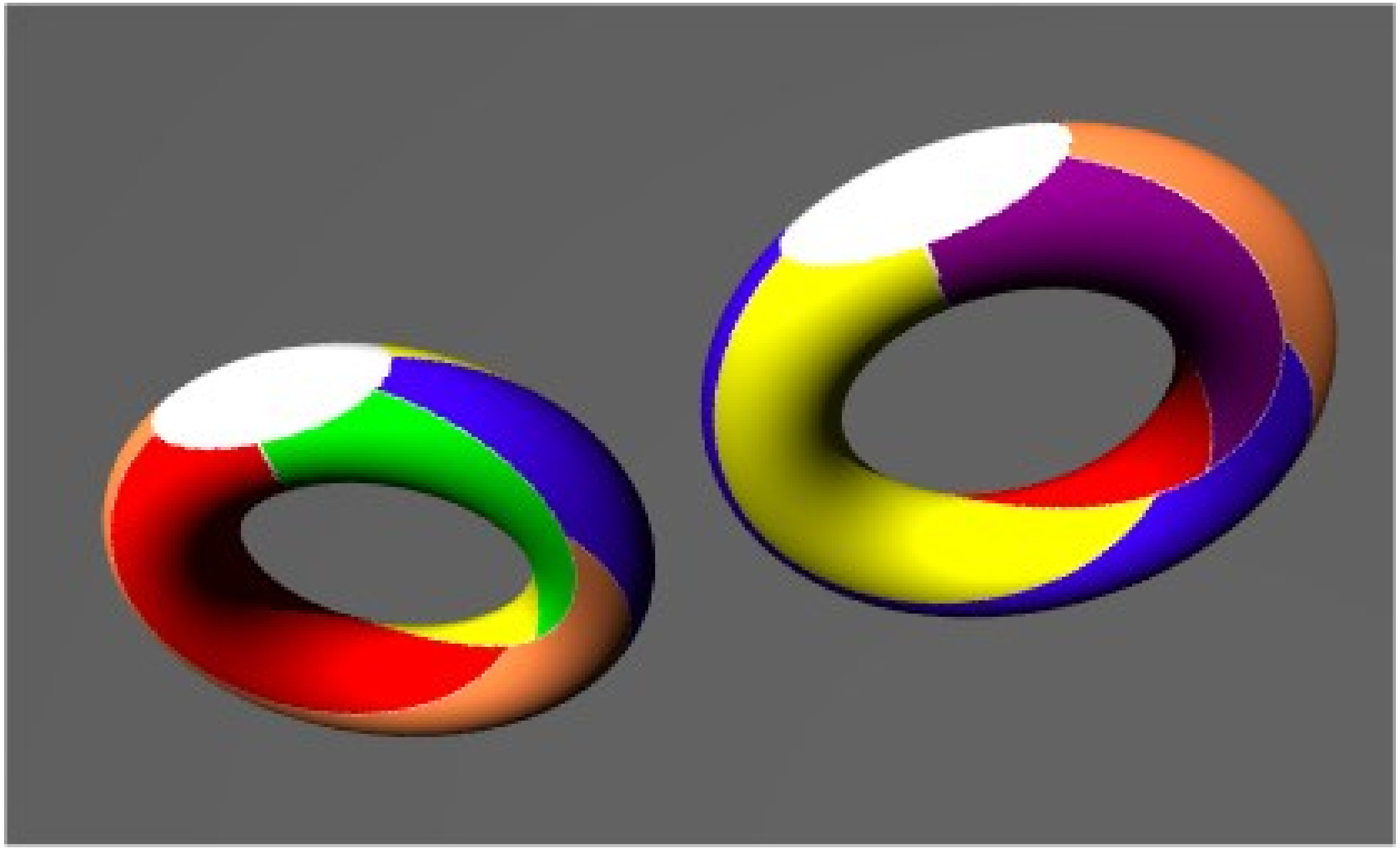
Para la botella de Klein se necesitan 6 colores (uno menos que su número **N**=7). Para la banda de Möbius que es una superficie con borde se necesitan también 6 colores (aquí la fórmula de Heawood no se puede aplicar).

¡El único caso no resulto es el caso de la esfera (el plano)!

Coloreado de mapas tóricos

Para
colorear
mapas
tóricos
son
necesarios …
¡7 colores!

Coloreado de mapas tóricos



http://www.johnstonsarchive.net

Guión de la charla

Un poco de historia sobre el problema de los cuatro colores: de 1852-1996

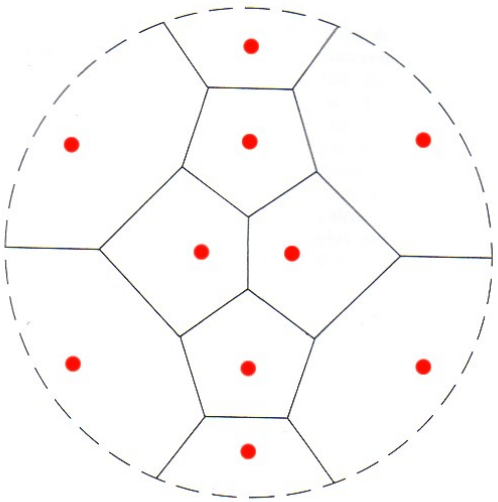
La “prueba” fallida de Kempe… y sus buenas ideas

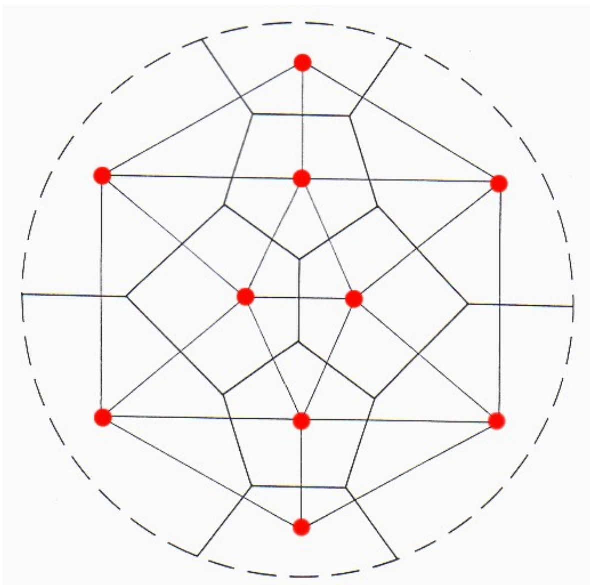
- Un siglo más tarde: llega la demostración con ayuda de ordenador

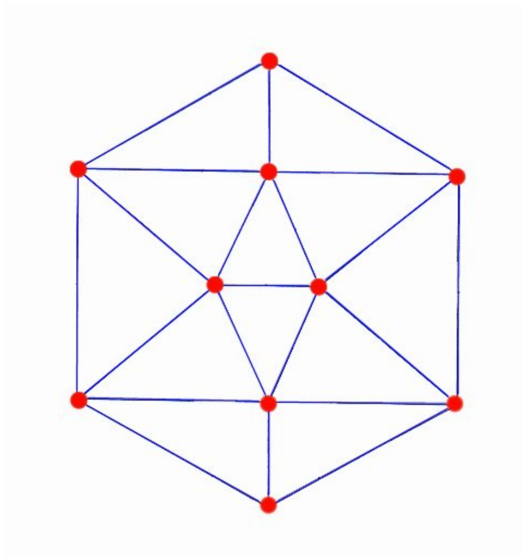
Conclusiones

¿Y qué hacer?

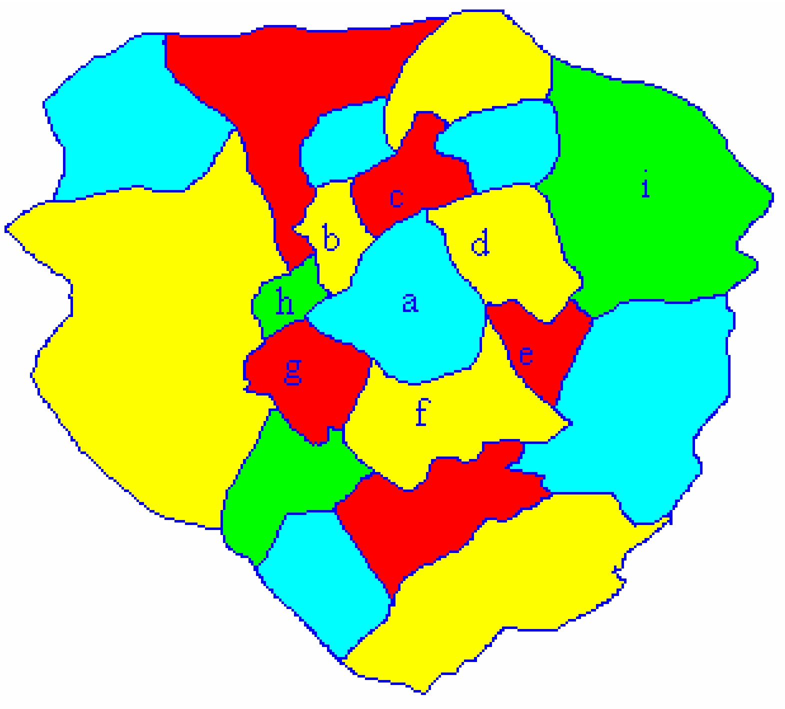
Por comodidad, se trabaja con grafos en vez de con mapas: se marca la capital de cada país, se unen las capitales de países contiguos, y se obtiene el ***grafo de incidencia (o dual)*** del mapa. Colorear el mapa equivale a colorear las capitales (vértices), asignando distintos colores a dos capitales unidas por una ruta (arista).

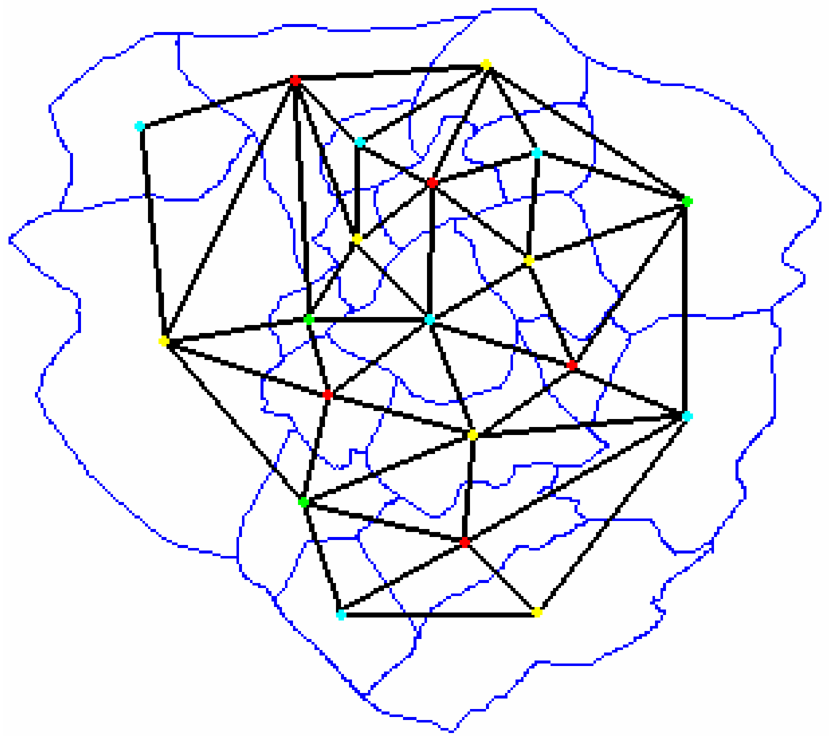






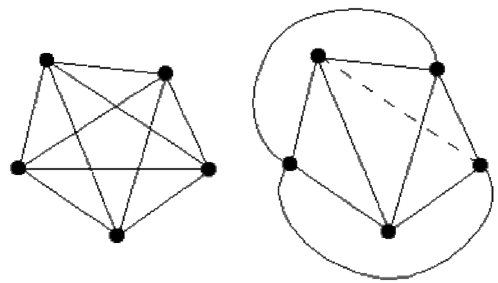
¿Y qué hacer?





Grafos de incidencia

- Estos grafos son siempre planares (se puede dibujar en el plano una representación concreta del grafo, en la cual las aristas no se corten excepto en un eventual vértice común).



- Un mapa es cúbico si y sólo si su grafo de incidencia es triangulado (un grafo plano en los que cada cara tiene tres aristas exactamente).

- El número de regiones vecinas se corresponde ahora con el grado de cada vértice (i.e. número de aristas incidentes).

- La fórmula de Euler se hereda para grafos de incidencia

Núm(vértices) – Núm(aristas) + Núm(caras) = 2

Minimales criminales

Hay un acercamiento alternativo para resolver el teorema de los 4 colores: imaginar que el teorema de los 4 colores es falso, es decir, existen algunos mapas (grafos) que no pueden 4-colorearse.
Entre estos mapas (grafos) que necesitan 5 colores o más, debe de haber alguno con el *menor número posible de regiones*.

Estos ejemplos se llaman ***minimales criminales***… así un minimal criminal no puede 4-colorearse, pero un mapa (grafo) con menos regiones (vértices) **si**.

Para probar el teorema de los 4 colores hay que demostrar que no existen minimales criminales... y eso se consigue encontrando condiciones restrictivas sobre este tipo de mapas (grafos) .

Las dos nociones clave

La demostración (bien hecha) del teorema de los 4 colores toma la de Kempe, pero para la inducción, en vez de eliminar un único vértice, se elimina un determinado trozo del grafo (una **configuración)**.

- ***Un conjunto inevitable*** K es un conjunto finito de configuraciones (una configuración es un ciclo con vértices internos triangulados) tal que todo grafo contiene una copia conforme de una k de K.

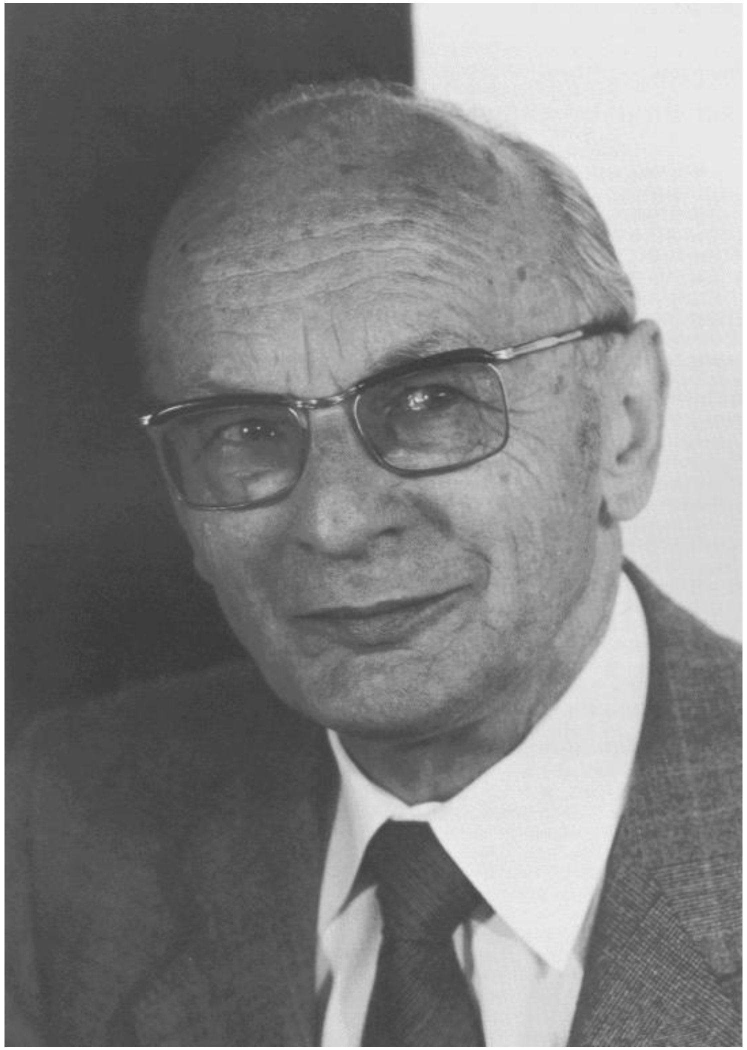
- k es *u**na configuración reducible,*** si se puede deducir el coloreado de cualquier grafo que contenga a k, a partir de un grafo menor.

Las dos nociones clave

El plan de la prueba consiste en encontrar un conjunto inevitable K (i.e. tal que todo grafo no 4-coloreable contenga una copia conforme de alguna k en K). Si K estuviese formado sólo de configuraciones reducibles, la prueba del teorema de los 4 colores estaría terminada: en efecto, en tal caso, no podría existir un minimal criminal.

En 1913, George David Birkhoff (1884-1944) publica "*The reducibility of maps*"

Heinrich Heesch



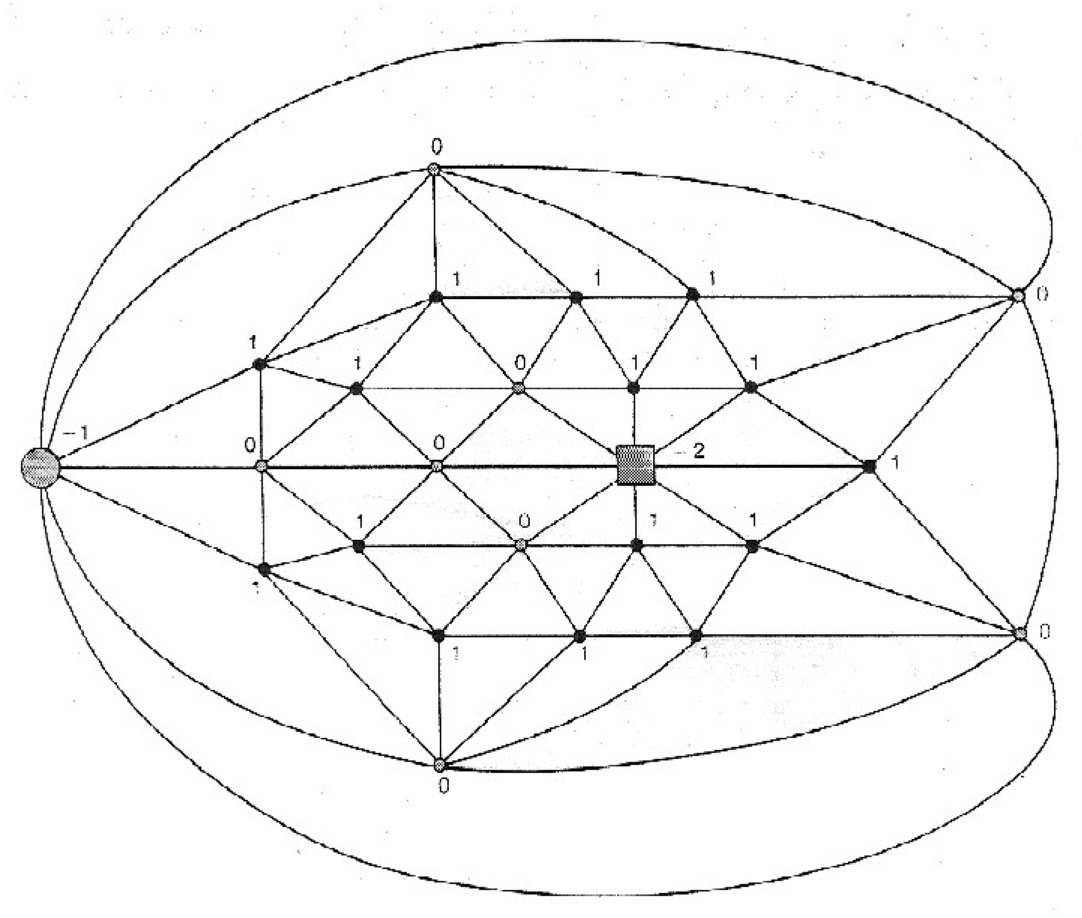
En 1969, Heinrich Heesch sistematiza la prueba de la reducibilidad, desarrollando un algoritmo que intenta implementar con ordenador.
Realiza diversos tests con el programa *Algol 60* en un CDC1604A.

Afirma que la conjetura puede resolverse considerando 8900 configuraciones.

Además, inventa la construcción de conjuntos inevitables (obstrucciones locales) a través de su *algoritmo de descarga.*

Construcción de conjuntos inevitables

Para generar un conjunto inevitable de configuraciones, la idea de Heesch es considerar el grafo como una red eléctrica, asociando a cada vértice una “carga” inicial de 6-d(v) (d(v) es el grado de v).



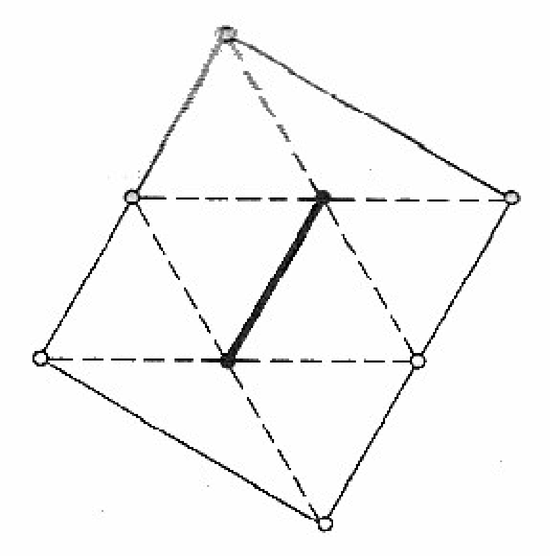
Construcción de conjuntos inevitables

Usando la fórmula de Euler, se prueba que la suma de las cargas en un grafo triangulado es 12.
Si ahora se desplazan las cargas eléctricas sobre la red (con su "algoritmo de descarga"), la suma total seguirá siendo 12: los vértices cargados positivamente pueden dar cargas, los cargados negativamente pueden recibir y los de carga nula no intercambian.

Al final del proceso, se eliminan los vértices de carga negativa y se obtiene un conjunto de configuraciones, de vértices de cargas positivas o nulas: como todo grafo triangular es de carga total 12, debe contener al menos una de las configuraciones (cuya geometría dependerá del proceso de descarga elegido) del conjunto anterior, que forma entonces un ***conjunto inevitable***.

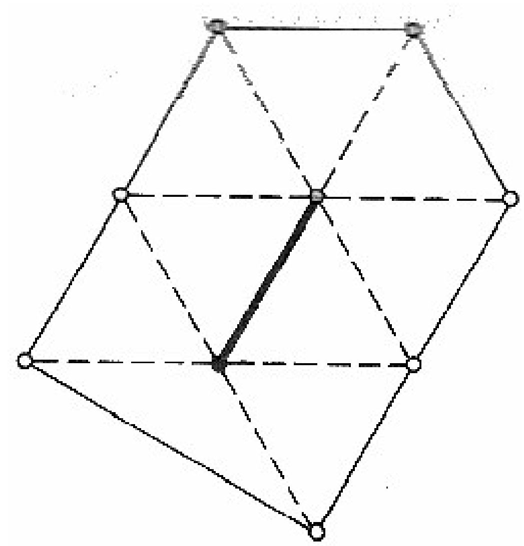
Ejemplo de transferencia de cargas

Transferencia de 1/5 de la carga unidad de cada vértice cargado positivamente hacia los vecinos cargados negativamente. Un vértice de grado 5 conserva una carga positiva sólo si tienen un vecino de grado 5 ó 6. Se obtienen entonces dos configuraciones:



Caso de dos vértices de grado 5 relacionados

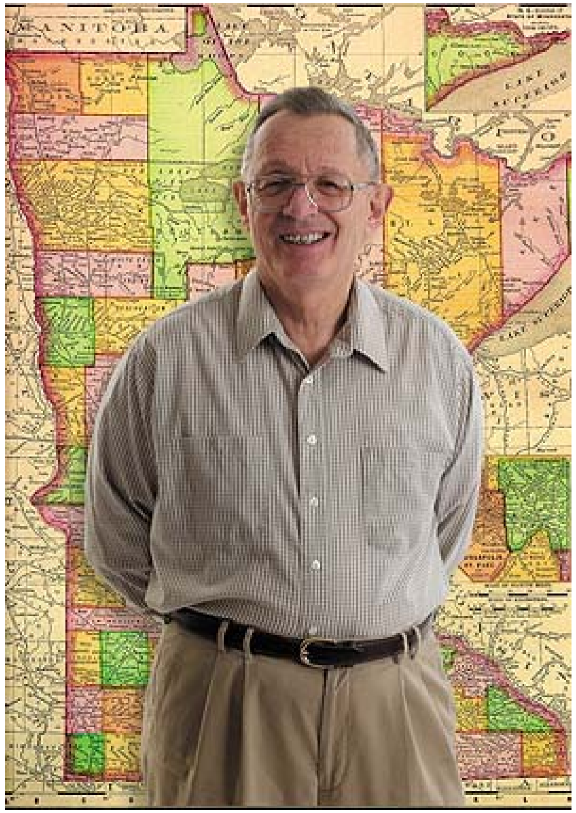
Un vértice de grado 5 y uno de grado 6 relacionados



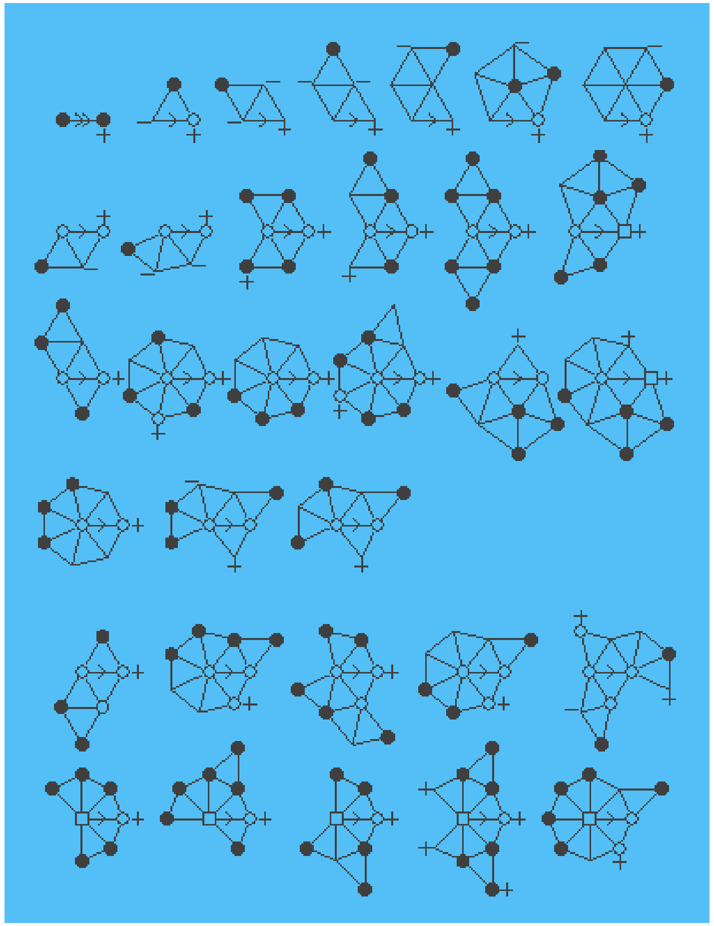
Plan de Haken y Appel

El progreso era lento, hasta que en 1976 Appel, Haken y Koch dieron una prueba cuyos principales ingredientes eran los conceptos de ***reducibilidad*** y ***descarga***.

Una vez obtenida la larga lista de configuraciones inevitables, si se demuestra que cualquiera de estas configuraciones inevitables es reducible, se obtiene finalmente una prueba inductiva del teorema.



Plan de Haken y Appel



Plan de Haken y Appel

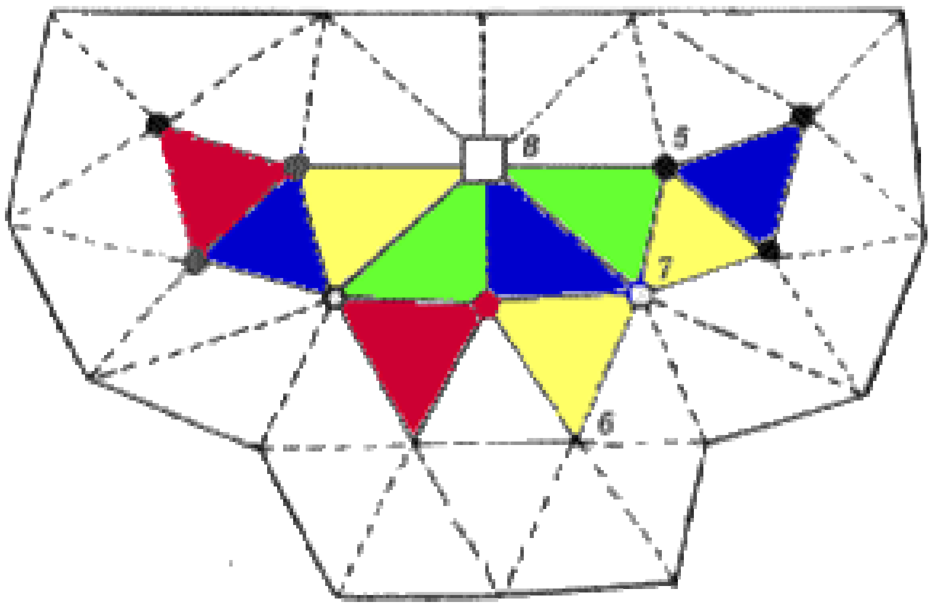
La primera prueba de Appel, Haken y Koch usó un algoritmo de descarga muy complicado, que produjo una lista de **1936** “configuraciones inevitables”, cada una de las cuales se demostró reducible, con la ayuda de un ordenador.

Modificando consecutivamente el algoritmo de descarga (para producir un conjunto inevitable cada vez mejor), encontraron un algoritmo de descarga (con **300** reglas) que produjo un conjunto de **1468** configuraciones inevitables: se demostró que eran reducibles con la ayuda de un ordenador programado por Koch para buscar las extensiones requeridas del coloreado, llevó **1200** horas de cálculo en un **IBM 360**.

La demostración fue completada por Appel y Haken en 1976.

… Uno de los 1482

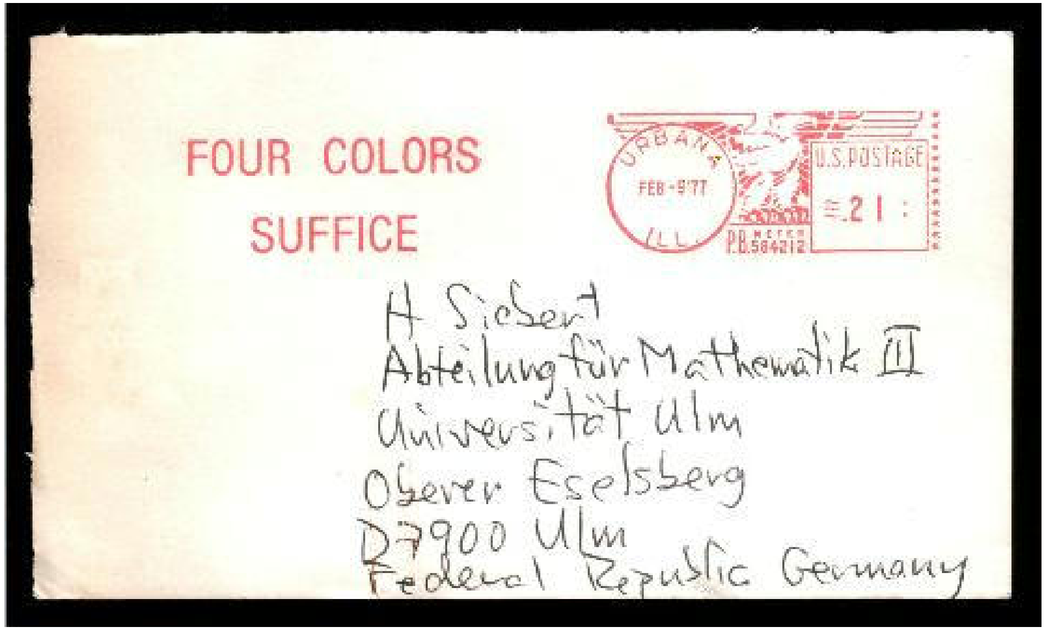
Por ejemplo, en la prueba de reductibilidad de esta configuración, se necesitan unos 199.000 coloreados…



Haken, Appel… y Kempe

En 1989, Appel y Haken dicen

"Kempe's argument was extremely clever, and although his "proof" turned out not to be complete, it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later"



Otra nueva prueba

En 1996, N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour y R. Thomas (Georgia Institute of Technology), publican *“A new proof of the four-colour theorem*.

¿Qué hace la nueva prueba diferente de la prueba de Appel y Haken?

1. Elimina complicaciones confirmando que la inevitabilidad de un conjunto reducible puede probarse sin explorar tantos ejemplos como en la prueba de Appel y Haken.
2. El conjunto inevitable es de tamaño 633.
3. Dan un conjunto de 32 reglas de descarga.
4. Usan un algoritmo cuadrático.
5. La comprobación a mano de la inevitabilidad se reemplaza por una prueba formal que puede verificarse por ordenador.

Guión de la charla

Un poco de historia sobre el problema de los cuatro colores: de 1852-1996

La “prueba” fallida de Kempe… y sus buenas ideas

Un siglo más tarde: llega la demostración con ayuda de ordenador

- Conclusiones

Conclusiones

Dos características de la prueba de la conjetura de los 4 colores son:

1. Ha servido de **estímulo** en el desarrollo de teorías matemáticas como la teoría de grafos y de redes.

2. Es el **primer mayor teorema** probado usando un **ordenador**… pero la corrección de la compilación no ha sido probada… la infalibilidad del hardware no ha sido demostrada. Este asunto levantó muchas controversias en el momento de la aparición de su demostración… aplacadas con otras pruebas realizadas con ayuda de ordenador como la clasificación de los grupos simples finitos (que depende de cálculos imposibles de ejecutar con detalle a mano), o la solución de Hales del problema de Kepler sobre el empaquetamiento óptimo de esferas.

¿Qué es una demostración?

Esta prueba ha suscitado muchos interrogantes "meta-matemáticos" sobre el papel asignado a la mente humana y a los ordenadores en las matemáticas: ¿se puede aceptar como válida una afirmación que sólo una máquina, y no una mente humana, puede comprobar?

¿Qué es realmente una demostración? I. Lakatos da la definición siguiente:

"sucesión finita de fórmulas de algún sistema dado, donde cada uno de los pasos de la sucesión es o bien un axioma del sistema, una fórmula derivada por una regla del sistema a partir de una fórmula precedente"

¿Qué es una demostración?

Thomas Tymoczko, en *“The four-color problem and its philosophical significance”* (1979) caracteriza una demostración como algo

- ***convincente*** (suficiente como para convencer incluso a los escépticos que duden de la veracidad del resultado),
- ***formalizable*** (la conclusión debería alcanzarse partiendo de sistemas axiomáticos), y
- ***comprobable.***

Este último es el aspecto más controvertido en el caso del teorema de los 4 colores. La “*comprobabilidad”* se ilustra perfectamente por el acertijo del *“árbol cayendo”* ¿Puede el árbol caer si no se le oye? ¿Puede estar un teorema demostrado si no se puede leer su demostración?

¿Qué es una demostración?

¿Qué prueban las demostraciones? Teoremas.

Según E.R. Swart en *"The philosophical implications of the four-colour theorem"* (1980), no hay un tipo de teorema, sino cuatro:

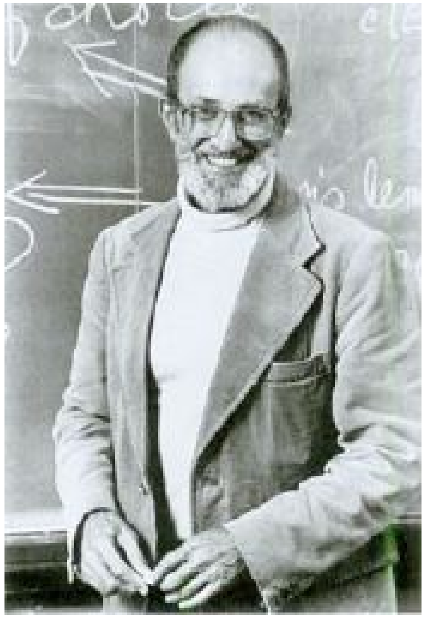
1. teoremas cuya prueba puede realizarse en la **cabeza** de uno,
2. teoremas que precisan **lápiz y papel** para demostrarse,
3. teoremas que no sólo requieren **lápiz y papel**, sino también una gran cantidad de **esfuerzo y tiempo**,
4. teoremas que sólo pueden probarse con ayuda de un **ordenador.**

La división no está clara... Pero, el teorema de los 4 colores se encontraría en la categoría 4.

Las dos corrientes…

Hay dos corrientes principales:

- **Los escépticos**: el aspecto de la "comprobabilidad" es el que pone en duda la credibilidad de la prueba. Si las pruebas deben ser verificadas, parece que entonces automáticamente una persona (lo opuesto a una máquina) debe completar esta tarea: esto no puede hacerse con la prueba del teorema de los 4 colores.



Halmos opina que la demostración realizada con un ordenador tiene la misma credibilidad que si está hecha por un ***adivino,*** las máquinas tienen algunas propiedades físicas que aún tenemos que entender. ***"No puedo aprender nada de la demostración. La prueba no indica la razón por la que sólo se necesitan 4 colores ¿por qué no 13? ¿Qué tiene de especial el número 4?"***

Las dos corrientes…

Tymockzo dice que usar un ordenador para establecer una verdad matemática es transformar pruebas en experimentos. Afirma que el teorema de los cuatro colores ha sido “confirmado” a través de un experimento de física teórica, pero no probado de una manera formal. Pero, aunque se tiene una pequeña idea de lo que el ordenador está “testando”, no se tiene el 100% de seguridad de lo que se está haciendo. Esto significa que la naturaleza de los resultados demostrados con ordenador es del tipo ***“Simon dice”,*** donde los matemáticos son invitados a “tener fe” y a creerse lo que una criatura “superior” afirma.

Las dos corrientes…

- **Los no escépticos**, que argumentan:

1. la queja de lo ordenadores tienen virus o producen errores, se puede aplicar de la misma manera a las personas, que comenten errores muy a menudo. Aunque los errores cometidos por los ordenadores son más difíciles detectar, los humanos se equivocan con más frecuencia, los ordenadores siguen un programa rígido predeterminado, y no tienen distracciones motivadas por los cambios de humor, el estrés u otros factores externos.
2. la longitud de algunas demostraciones está más allá de la capacidad de computación humana, pero es perfectamente aceptable por los estándares de las máquinas.
3. la idea de que **no** pueden usarse ordenadores será cada vez más extraña para la siguiente generación: es una cuestión de aceptación y familiaridad, serán (¿son?) herramientas como el *lápiz y el papel*…

Las dos corrientes…

4. la prueba de Appel y Haken es en cierto sentido convencional, consiste en una serie de pasos lógicos, que conducen a una conclusión: la conjetura puede reducirse a una predicción sobre el comportamiento de unos 2.000 mapas diferentes.
5. J. Casti afirma respecto a la prueba del teorema de los 4 colores: *“Como el problema se ha obtenido por medios totalmente inapropiados, ningún matemático de primera fila debería trabajar más en ello y por lo tanto una demostración decente puede ser retrasada indefinidamente… Así que hemos hecho una cosa mala, muy mala y pienso que una cosa similar no debería cometerse nunca más”*. En respuesta a esta opinión, D. Archdeacon (Vermont) responde ***“hay muchas malas pinturas de jardines, pero eso no impidió a Van Gogh pintar sus girasoles”…*** La gente busca cosas mejores en todos los aspectos de la vida, y de manera similar, los matemáticos buscan demostraciones mejores, más elegantes, más cortas y más bellas.

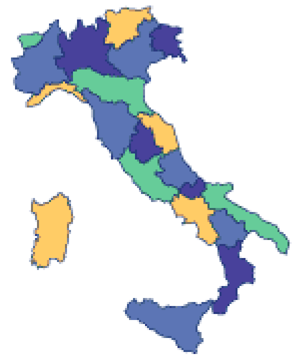
Propaganda hotelera…

IHC, ispirandosi al “Teorema dei Quattro Colori” di Guthrie, ha identificato in Affari, Cultura, Relax e Vacanza le quattro attività prevalenti che costituiscono il prodotto turistico italiano.

La ubicación de un albergue en una localidad particularmente rica y atractiva por su historia y su cultura se identifica con el color naranja. El azul es el color para pasar un largo periodo de vacaciones; el verde identifica las zonas de relax y el rojo es el indicado para el hombre de negocios, donde encuentra soluciones técnicas altamente profesionales.

Italy Hotel Club

"Per colorare una qualunque carta geografica, senza che paesi adiacenti abbiano lo stesso colore, bastano quattro colori diversi"



Teorema dei Quattro colori
Francis Guthrie - 1852

¿La excepción?