

## Máximos y mínimos de funciones

Los conceptos de máximo y mínimo de una función de varias variables son completamente análogos a los correspondientes de funciones de una variable y tienen también su origen en consideraciones geométricas.

**Definición.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , decimos que

(a)  $f$  tiene un máximo absoluto (o global) en un punto  $\vec{x}_0 \in D$  si

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in D;$$

(b)  $f$  tiene un mínimo absoluto (o global) en un punto  $\vec{x}_0 \in D$  si

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in D.$$

Los puntos donde una función toma indistintamente un valor máximo o mínimo reciben el nombre genérico de extremos.

El teorema de Weierstrass proporciona condiciones suficientes para la existencia de extremos absolutos.

**Teorema.** Sea  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continua en un compacto  $M \subset \mathbb{R}^m$ . Entonces  $f$  alcanza los valores máximo y mínimo, es decir

$$\exists x_1, x_2 \in M : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in M.$$

A continuación, daremos la versión local de estos conceptos.

**Definición.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , decimos que

(a)  $f$  tiene un máximo relativo (o local) en un punto  $\vec{x}_0 \in D$  si existe una bola  $B(\vec{x}_0, r)$  centrada en  $\vec{x}_0$  tal que  $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r) \cap D$ ;

(b)  $f$  tiene un mínimo relativo (o local) en un punto  $\vec{x}_0 \in D$  si existe una bola  $B(\vec{x}_0, r)$  centrada en  $\vec{x}_0$  tal que  $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r) \cap D$ .

En el caso de funciones de dos variables, la interpretación geométrica de estas nociones es evidente.

Estos conceptos están relacionados con el de punto estacionario.

**Definición.** Si una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en un punto  $\vec{x}_0$  y  $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = 0$ , se dice que  $\vec{x}_0$  es un punto estacionario o punto crítico de la función.

La relación citada viene dada por la siguiente condición necesaria de existencia de extremos.

**Teorema** (criterio de las derivadas primeras). Sea  $D$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  una función de clase  $C^{(1)}$  en  $D$ . Si  $f$  tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en un punto  $\vec{x}_0 \in D$ , entonces  $\vec{x}_0$  es un punto estacionario de  $f$ .

En el caso particular de funciones de dos variables, lo anterior quiere decir que el plano tangente a una función diferenciable en un máximo o un mínimo es necesariamente horizontal. Dicho plano queda por encima de la superficie en un entorno del punto donde la función tiene un máximo y queda por debajo de la superficie en un entorno del punto donde la función tiene un mínimo.

Debemos observar que dicha condición no es suficiente. Por ejemplo, si consideramos la función  $f(x, y) = x \cdot y$ , entonces  $\vec{\nabla} f(x, y) = (y, x)$  y el gradiente se anula sólo en el origen. Sin embargo, es evidente que en dicho punto no puede haber un máximo ni un mínimo de la función, pues en cualquier entorno del origen la función toma valores positivos y negativos.

La determinación de condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos se basa en el estudio del signo del término de segundo orden en el polinomio de Taylor asociado a la función. Para formular dichas condiciones debemos recordar algunos conceptos relativos a la teoría de formas cuadráticas.

**Definición.** Dada una matriz simétrica  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ , (es decir con  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $\forall i, j$ ), se define la forma cuadrática asociada a  $A$  como la función  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$Q(\vec{h}) = \vec{h} \cdot A \cdot \vec{h}^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad \forall \vec{h} = (h_1, \dots, h_n).$$

Decimos que una forma cuadrática  $Q$  es

- i) definida positiva si  $Q(\vec{h}) > 0$ ,  $\forall \vec{h} \neq 0$ ,
- ii) definida negativa si  $Q(\vec{h}) < 0$ ,  $\forall \vec{h} \neq 0$ .

Una caracterización de esta definición la da el siguiente criterio de Sylvester:

**Proposición.** Si  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  es una matriz simétrica y denotamos por

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n),$$

a los menores principales de  $A$ , entonces:

- (a) La forma cuadrática asociada a  $A$  es definida positiva si y sólo si  $\det A_k > 0$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ .
- (b) La forma cuadrática asociada a  $A$  es definida negativa si y sólo si

$$(-1)^k \det A_k > 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

(es decir, los signos de los determinantes de los menores principales se van alternando empezando con  $a_{11} = \det A_1 < 0$ ).

Con estos hechos, las condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos de una función de varias variables se pueden enunciar como sigue:

**Teorema** (criterio de las derivadas segundas). *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(2)}$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $\vec{x}_0 \in D$  un punto estacionario de  $f$ . Si definimos la forma cuadrática*

$$Q_{x_0}(\vec{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j = \frac{1}{2} \vec{h} \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}^T,$$

entonces:

- (a)  $f$  tiene un mínimo local en  $\vec{x}_0$  si  $Q_{x_0}$  es definida positiva.
- (b)  $f$  tiene un máximo local en  $\vec{x}_0$  si  $Q_{x_0}$  es definida negativa.

El recíproco de este teorema no es cierto: por ejemplo, el origen es un punto estacionario de las funciones  $f(x, y) = x^3 + y^3$  y  $g(x, y) = x^4 + y^4$ ; en ambas funciones, la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana en el origen es degenerada (es decir  $Q(h_1, h_2) = 0, \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ); ahora bien, en el origen  $g$  tiene un mínimo pero  $f$  no tiene máximo ni mínimo.

Sin embargo, el teorema anterior será cierto con una pequeña modificación basada en los siguientes conceptos:

**Definición.** Una forma cuadrática  $Q$  es

- (a) semidefinida positiva cuando  $Q(\vec{h}) \geq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ , y es
- (b) semidefinida negativa cuando  $Q(\vec{h}) \leq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$

(esto quiere decir que la forma cuadrática puede anularse también para valores no nulos).

**Teorema.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(2)}$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$  y  $x_0 \in D$  un punto estacionario de  $f$ . Si llamamos nuevamente*

$$Q_{x_0}(\vec{h}) = \frac{1}{2} \vec{h} \cdot Hf(x_0) \cdot \vec{h}^T,$$

entonces

- (a) si  $f$  tiene un mínimo local en  $x_0$ , entonces  $Q$  es semidefinida positiva;
- (b) si  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$ , entonces  $Q$  es semidefinida negativa.

De lo anterior se deduce que, si  $Q$  es indefinida (no es semidefinida positiva ni semidefinida negativa) y  $x_0$  es un punto estacionario, entonces no corresponde a un máximo ni a un mínimo local. Estos puntos reciben el nombre de puntos de ensilladura de la función.

Terminaremos esta introducción teórica con la aplicación de los resultados anteriores al caso más común de funciones de dos variables.

**Teorema.** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^{(2)}$  en un abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$  y  $(x_0, y_0) \in D$  un punto estacionario de  $f$ . Si llamamos*

$$\Delta = \det Hf(x_0, y_0) \text{ y } a_{11} = D_{11}f(x_0, y_0),$$

entonces

- (a)  $f$  tiene un mínimo local en  $(x_0, y_0)$  si  $a_{11} > 0$  y  $\Delta > 0$ ;
- (b)  $f$  tiene un máximo local en  $(x_0, y_0)$  si  $a_{11} < 0$  y  $\Delta > 0$ ;
- (c)  $f$  tiene un punto de ensilladura en  $(x_0, y_0)$  si  $\Delta < 0$ .

En el caso de que  $\Delta = 0$ , debe compararse, a partir de la definición, el valor de la función en  $(x_0, y_0)$  con el que toma en puntos de algún entorno de  $(x_0, y_0)$ .