Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

Cierto tipo de problemas de extremos consiste en encontrar los valores máximo y mínimo de una función cuyas variables están sometidas a ciertas condiciones de dependencia; éstos reciben el nombre de *problemas de máximos y mínimos condicionados.*

Por ejemplo, en el caso de una función de dos variables $z = f(x, y)$, si éstas están relacionadas por la condición $y = g(x)$, los extremos condicionados de f son precisamente los máximos y mínimos de la función de una variable $z = f\big(x, g(x)\big)$. Geométricamente, el problema consiste en encontrar los valores extremos de la curva en $\mathbb{R}^3$ que es la intersección de las superficies $z = f(x, y)$, $y = g(x)$.

El planteamiento general de estos problemas es el siguiente:

Problema. *Encontrar el valor máximo (o mínimo) de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en un dominio M definido del siguiente modo:*

$$M = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : F^i(\overrightarrow{x}) = 0,\ 1 \leq i \leq m\}.$$

El conjunto de funciones $F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ constituye lo que llamaremos <u>*restricciones de las variables.*</u> Denotaremos por $f|_M$ a la restricción de f al conjunto M.

Estableceremos a continuación las nociones básicas que permiten enunciar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de máximos y mínimos condicionados.

Definición. Dado un entero positivo $r < n$, decimos que un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ es una <u>*variedad r-dimensional*</u> (o <u>*r-variedad*</u>) <u>*de clase $C^{(q)}$*</u> cuando $\forall \overrightarrow{x} \in M$, existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto que contiene a $\overrightarrow{x}$ y existe una función $F : U \to \mathbb{R}^{n-r}$, con $F \in C^{(q)}(U)$, tal que

i) $\operatorname{rang} JF(\overrightarrow{x}) = n - r$, $\forall \overrightarrow{x} \in U$, y

ii) $M \cap U = \{\overrightarrow{x} \in U : F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}\}$.

Es fácil, a partir de la definición, demostrar el siguiente resultado.

Proposición. *Sean D un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : D \to \mathbb{R}^{n-r}$ una función de clase $C^{(q)}$ en D. Entonces el conjunto $M = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : F(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0},\ \operatorname{rang} JF(\overrightarrow{x}) = n - r\}$ es una r-variedad de clase $C^{(q)}$.*

Por ejemplo, si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^{(1)}$, cualquier conjunto de nivel $K_c = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : F(\overrightarrow{x}) = c\}$ no vacío y que no contenga puntos estacionarios de F es una $(n-1)$-variedad.

Con estos conceptos se prueba la siguiente condición necesaria de existencia de extremos condicionados.

Teorema de los multiplicadores de Lagrange. *Sean M una r-variedad de $\mathbb{R}^n$ de clase $C^{(1)}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, con $f \in C^{(1)}(D)$ y $M \subset D$. Si $f|_M$ tiene un extremo relativo en $\overrightarrow{x_0}$, entonces existen constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ($m = n - r$) tales que $\overrightarrow{x_0}$ es un punto estacionario de la función*

$$g = f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_m F^m,$$

donde $F^1, \dots, F^m$ son las componentes de la función F asociada a la variedad M.

Este resultado indica que, en un problema de búsqueda de extremos condicionados, los únicos posibles puntos de extremo local se encuentran entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\overrightarrow{x}) = 0, \ 1 \le i \le n \\ F^j(\overrightarrow{x}) = 0, \ 1 \le j \le m \end{cases}$$

de $m+n$ ecuaciones con las $m+n$ incógnitas $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Esto sugiere también considerar la función de $m+n$ variables

$$g(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j F^j(x_1, \dots, x_n)$$

y calcular los puntos estacionarios de g en $M \times \mathbb{R}^m$, los cuales serán los únicos posibles valores donde f tenga un extremo relativo (observar que $\dfrac{\partial g}{\partial \lambda_j} = F^j$). Se reduce así el problema de extremos condicionados a un problema de extremos ordinarios.

Las condiciones suficientes para la existencia de extremos pueden determinarse de la siguiente forma:

Teorema. *Se considera la función $g = f + \lambda_1 F^1 + \ldots + \lambda_m F^m$.*

(a) Si en un punto $\overrightarrow{x_0}$ la función alcanza un máximo relativo, entonces la forma cuadrática correspondiente a g, $Q_{x_0}(h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} g(\overrightarrow{x_0}) h_i h_j$, es semidefinida negativa en un entorno reducido de $\overrightarrow{x_0}$.

(b) Si $Q_{x_0}(h) > 0$ en algún entorno reducido de $\overrightarrow{x_0}$, entonces la función alcanza un mínimo relativo en $\overrightarrow{x_0}$.

En la mayoría de los ejemplos prácticos, para determinar si un punto estacionario corresponde a un máximo o un mínimo, utilizaremos métodos indirectos, sugeridos por cada situación particular.