INTEGRAL MÚLTIPLE

Así como la integral simple resuelve el problema del cálculo de áreas de regiones planas, la integral doble es la herramienta natural para el cálculo de volúmenes en el espacio tridimensional. En estas notas se introduce el concepto de integral múltiple, el cual incluye los casos anteriores en un contexto general. De este modo, las aplicaciones no se limitan al cálculo de áreas y volúmenes sino que se extienden a otros problemas físicos y geométricos.

1. Integral sobre regiones elementales.

1.1. Definiciones previas.

Todo conjunto de la forma $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de intervalo n-dimensional o **n-intervalo.**
Una **partición** de I se define al dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ mediante los puntos $\{x_0^i, \dots, x_{m_i}^i\}$ y formar las celdas n-dimensionales $J_k = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n]$, $0 \le j_i \le m_i - 1$ $(i = 1, \dots, n)$. De este modo, una partición de un n-intervalo I es un conjunto $P = \{J_1, \dots, J_N\}$, formado por celdas n-dimensionales, tal que $\text{int } J_i \cap \text{int } J_k = \emptyset$ $(i \ne k)$, y $J_1 \cup \cdots \cup J_N = I$.
Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ acotada, si definimos la **medida n-dimensional** de una celda como el producto de las longitudes de sus aristas, llamaremos **suma inferior** de f con respecto a la partición P a

$$L(f, P) = \sum_{J_k \in P} \text{ínf}\{f(x) : x \in J_k\} \cdot m(J_k).$$

Análogamente, la **suma superior** de f respecto a P es

$$U(f, P) = \sum_{J_k \in P} \sup\{f(x) : x \in J_k\} \cdot m(J_k).$$

1.2. Propiedades.

i) $L(f, P) \le U(f, P)$, para toda partición P de I.

ii) Si P' es un refinamiento de P (es decir, cada celda de P' está contenida en alguna celda de P), entonces $L(f, P) \le L(f, P')$ y $U(f, P') \le U(f, P)$.

iii) Si P' y P'' son dos particiones arbitrarias de I, $L(f, P') \le U(f, P'')$.

iv) $\sup\{L(f, P) : P \text{ partición de } I\} \le \text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ partición de } I\}$.

1.3. Definición.

Se define la **integral superior** de f sobre I a

$$\overline{\int_I} f = \text{ínf}\{U(f,P) : P \text{ partición de } I\}.$$

Del mismo modo, se define la **integral inferior** de f sobre I a

$$\underline{\int_I} f = \sup\{L(f,P) : P \text{ partición de } I\}.$$

Diremos que la función f es **integrable** sobre I cuando $\overline{\int}_I f = \underline{\int}_I f$ y dicho valor común se llama **integral** de f sobre I, que denotaremos por $\int_I f$. En el caso particular $n = 2$ utilizaremos frecuentemente la notación $\displaystyle\iint_I f(x,y)\,dxdy$ y, si $n = 3$, utilizaremos la notación análoga $\displaystyle\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz$.

1.4. Teorema.

Sea $f : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

i) f es integrable en I.

ii) (Condición de Riemann.) Para todo $\varepsilon > 0$, existe P_ε partición de I tal que $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

iii) (Condición de Darboux.) Existe una constante L con la siguiente propiedad:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : \left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)m(J_i) - L\right| < \varepsilon,$$

donde $P = \{J_1,\dots,J_N\}$ es una partición de I cuyas aristas tienen longitud menor que δ y $x_i \in J_i$ $(i = 1,\dots,N)$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es integrable y veamos que se cumple la condición de Riemann. Llamemos $L = \int_I f$. Por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P'_ε tal que $U(f,P'_\varepsilon) < L + \varepsilon/2$.
Análogamente, existe una partición P''_ε tal que $L(f,P''_\varepsilon) > L - \varepsilon/2$. Si llamamos $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, entonces

$$L - \varepsilon/2 < L(f,P''_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) \le U(f,P_\varepsilon) < U(f,P'_\varepsilon) < L + \varepsilon/2.$$

Por tanto, $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Supongamos ahora que se cumple la condición de Riemann y veamos que f es integrable en I.
Como $L(f,P) \leq \underline{\int}_I f \leq \overline{\int}_I f \leq U(f,P)$, entonces $\overline{\int}_I f - \underline{\int}_I f < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, con lo cual $\overline{\int}_I f = \underline{\int}_I f$.
Probemos ahora la equivalencia entre i) y iii). Supongamos en primer lugar que se cumple la condición de Darboux. Así pues, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) m(J_i) - L \right| < \varepsilon/2.$$

Elegimos también $x_i \in J_i$ de modo que

$$|f(x_i) - \sup\{f(x) : x \in J_i\}| < \frac{\varepsilon}{m(J_i) \cdot 2N}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |U(f,P) - L| &\leq \left| U(f,P) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i) m(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i) m(J_i) - L \right| \\ &< \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon \cdot m(J_i)}{m(J_i) \cdot 2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba para las sumas inferiores.

Para probar el recíproco, necesitamos el siguiente resultado.
Lema. *Dada una partición P de I y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada partición P' en celdas de aristas con longitud menor que δ, la suma de las medidas de las celdas de P' que no están totalmente contenidas en alguna celda de P es menor que ε.*

Demostración. Para demostrarlo, separaremos dos casos:
$\underline{n = 1}$: Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, basta elegir $\delta = \varepsilon/N$ porque los intervalos de P' que no estén contenidos en algún intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ deben incluir algún x_k, $k = 1, \ldots, N-1$; por tanto, la suma de sus longitudes es menor que $N \cdot \delta$ (número de intervalos multiplicado por la longitud de cada uno).
$\underline{n > 1}$: Si $P = \{J_1, \ldots, J_N\}$, llamamos T a la longitud total de las aristas situadas entre dos celdas cualesquiera de P y elegimos $\delta = \varepsilon/T$.
Sea $J' \in P'$ una celda no contenida en ningún J_k. Esto indica que corta a dos celdas adyacentes de P. Por tanto, su n-medida es menor o igual que $\delta \cdot A$, donde A es la medida de las caras comunes a dichas celdas. Entonces $\sum_{J' \in P', J' \not\subset J_k} m(J') \leq \delta \cdot T = \varepsilon$. □

Terminemos ahora la demostración del teorema suponiendo que f es integrable en I. Por ser f acotada, existe M tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.

Por ser f integrable, existen dos particiones P_1, P_2 tales que:

$$\begin{aligned} L - L(f, P_1) &< \varepsilon/2 \\ U(f, P_2) - L &< \varepsilon/2 \end{aligned}$$

(donde L es la integral y $\varepsilon > 0$ arbitrario).
Si P es un refinamiento de P_1 y P_2, entonces

$$U(f, P) - \varepsilon/2 < L < L(f, P) + \varepsilon/2.$$

Por el lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que si P' es una partición de I cuyas aristas tienen longitud menor que δ, entonces

$$\sum_{J' \in P', J' \not\subset J_k, J_k \in P} m(J') < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Sea $P' = \{S_1, \dots, S_N\}$ una partición de aristas con longitud menor que δ donde cada $S_1, \dots, S_k$ está contenido en alguna celda de P y $S_{k+1}, \dots, S_N$ no lo están. Si $x_j \in S_j$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f(x_j) m(S_j) &= \sum_{j=1}^k f(x_j) m(S_j) + \sum_{j=k+1}^N f(x_j) m(S_j) \le U(f, P) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < L + \varepsilon. \\ \sum_{j=1}^N f(x_j) m(S_j) &= \sum_{j=1}^k f(x_j) m(S_j) - \sum_{j=k+1}^N -f(x_j) m(S_j) \ge L(f, P) - M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} > L - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| \sum_{j=1}^N f(x_j) m(S_j) - L \right| < \varepsilon,$$

lo que corresponde a la condición de Darboux. $\square$

Ejemplos. Estudiar la integrabilidad y calcular la integral (en caso de existir) de las siguientes funciones en las regiones indicadas:

a) $f(x, y) = [x] + [y]$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) $f(x, y) = [x + y]$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$, $(x, y) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + y^3$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

e) $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 2]$.

2. Extensión del concepto de integral a regiones acotadas.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado tal que $A \subset I$, donde I es un n-intervalo, y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que f es **integrable en** A cuando

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus A \end{cases}$$

es integrable en I.
Esto sugiere que el tipo de regiones para las que una función es integrable no puede tener “frontera muy complicada”. Por tanto, necesitamos las siguientes definiciones.

2.1. Definición.

Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **contenido (según Jordan)** si la función constante $f(x) = 1$ es integrable en A. En este caso, el contenido de A se define como $c(A) = \int_A 1$.
Por definición de integral, un conjunto A tiene **contenido cero** si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_1, \dots, J_N\} \text{ } n\text{-intervalos que cubren a } A \ : \sum_{i=1}^{N} m(J_i) < \varepsilon.$$

Diremos entonces que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es un **dominio de Jordan** si su frontera tiene contenido cero.

Ejemplo. *La gráfica de una función $y = f(x)$ continua en $[a, b]$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^2$.*
En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como f es uniformemente continua en $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta$.
Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ una partición de $[a, b]$ con $x_j = a + jh$ ($j = 0, 1, \dots, N$), donde $h = (b - a)/N$ y elegimos N suficientemente grande para que $h < \delta$. Si llamamos

$$R_j = \{(x, y) : x_{j-1} \le x \le x_j, \ |y - f(x_j)| < \varepsilon\},$$

entonces $(x, f(x)) \in R_j$ cuando $x_{j-1} \le x \le x_j$, es decir la gráfica de f está contenida en $\bigcup_{j=1}^{N} R_j$. Como el área de R_j es igual a $2\varepsilon(x_j - x_{j-1})$, entonces la suma de las áreas de todos los rectángulos es igual a $2\varepsilon(b - a)$.

De forma similar se puede probar que la gráfica de cualquier función continua $z = f(x, y)$ sobre un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^3$.

2.2. Definición.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, no necesariamente acotado, tiene **medida nula (según Lebesgue)** cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_m\}_{m\in\mathbb{N}} \text{ } n\text{-intervalos que cubren a } A \ : \sum_{m\in\mathbb{N}} m(J_m) < \varepsilon.$$

Ejemplo. Para ver que $\mathbb{R}$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^2$, para cada $\varepsilon > 0$, basta elegir $J_n = [-n, n] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2n \cdot 2^{n+1}}, \frac{\varepsilon}{2n \cdot 2^{n+1}}\right]$. De este modo, $m(J_n) = \varepsilon/2^n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon/2^n = \varepsilon$.

2.3. Propiedades.

- Si A tiene contenido nulo, entonces tiene medida nula.
- Si A tiene medida nula y $B \subset A$, entonces B tiene medida nula.
- Si $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tienen medida nula en $\mathbb{R}^n$, entonces $\cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ tiene medida nula en $\mathbb{R}^n$.

  [Por ejemplo, la sucesión $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, con $x_m \in \mathbb{R}^n$, tiene medida nula.]

  En efecto, existe para cada $i \in \mathbb{N}$ un recubrimiento $\{B_{i1}, B_{i2}, \dots\}$ de A_i tal que $\sum_{j\in\mathbb{N}} c(B_{ij}) < \varepsilon/2^i$. Entonces $\{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{m1}, B_{m2}, \dots\}$ recubre a $\cup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ y

  $$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} c(B_{ij}) < \varepsilon.$$

- Todo subconjunto de $\mathbb{R}^m$ tiene n-medida cero si $m < n$.

2.4. Proposición.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada e integrable, $f(x) = 0$ $\forall x \in A \setminus F$, donde F es un conjunto de contenido cero, entonces $\int_A f = 0$.

Demostración. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M, \forall x \in A$. Por otra parte, como F tiene contenido cero, dado $\varepsilon > 0$, $F \subset \bigcup_{j=1}^N R_j$, con $\sum_{j=1}^N m(R_j) < \varepsilon/M$. Llamamos R a un n-rectángulo que contiene a A y extendemos f a R de la manera usual. Sea P una partición de R tal que $R_j \in P$, $\forall j$. Entonces,

$$-\varepsilon \le L(f, P) \le U(f, P) \le \varepsilon,$$

con lo que $\int_A f = 0$. □

2.5. Teorema de Lebesgue.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ acotada. Si $A \subset I$, donde I es un n-intervalo, entonces f es integrable en A si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en I tiene medida nula.

Demostración. Definimos la oscilación de una función f en un punto $x_0 \in I$ como

$$\omega(f, x_0) = \lim_{h \to 0^+} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in B(x_0, h) \cap I\}.$$

Antes de proceder a la demostración veamos un par de resultados previos.

Lema 1. $\omega(f, x_0) = 0 \iff f$ *es continua en* x_0.
Para probarlo, basta observar que f es continua en x_0 si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $B(x_0, h)$ tal que $\sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in B(x_0, h)\} < \varepsilon$ lo cual equivale a su vez a que $\omega(f, x_0) = 0$.

Lema 2. *El conjunto* $D_r = \{x \in I : \omega(f, x) \geq 1/r\}$ *es compacto.*
En primer lugar, D_r es acotado por estar contenido en el n-intervalo I. Para ver que es cerrado, sea y un punto de acumulación de D_r y supongamos que $y \notin D_r$. Así pues, $\omega(f, y) < 1/r$ y, por definición de oscilación, existe una bola $B(y, h)$ tal que

$$\sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in B(y, h) \cap I\} < 1/r.$$

Por tanto, $B(y, h) \cap D_r = \emptyset$, lo que contradice el hecho de ser punto de acumulación.

Vayamos ahora con la demostración del teorema. Supongamos en primer lugar que el conjunto D de discontinuidades de f en I tiene medida cero. Como $D = \cup_{r \in \mathbb{N}} D_r$, también cada D_r tiene medida cero. Al ser compacto, sólo un número finito de n-intervalos recubren a D_r. Tenemos así que

$$D_r \subset \bigcup_{i=1}^{N} J_i, \ \sum_{i=1}^{N} m(J_i) < 1/r.$$

Consideremos ahora una partición de I suficientemente fina para que esté formada por $C_1 \cup C_2$, donde C_1 esté formado por las n-celdas contenidas en algún J_i y C_2 por las n-celdas disjuntas con D_r.
De este modo, si $J \in C_2$, $\omega(f, x) < 1/r, \forall x \in J$. Por tanto, existe $h > 0$ tal que $M_h(f) - m_h(f) < 1/r$, donde $M_h(f) = \sup\{f(y) : y \in B(x, h)\}$ y $m_h(f) = \text{ínf}\{f(y) : y \in B(x, h)\}$. Como J es compacto, una colección finita de $\{B(x, h) : x \in J\}$, digamos $\{U_1, \ldots, U_m\}$, recubre a J.

Dividimos J en celdas de modo que cada una de ellas esté en alguno de $\{U_1, \ldots, U_m\}$. La partición resultante verifica

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq \left(\sum_{J \in C_1} + \sum_{J \in C_2} \right) (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) \\ &\leq \sum_{J \in C_1} 2K \cdot m(J) + m(I)/r < 2K/r + m(I)/r < \varepsilon \end{aligned}$$

(donde hemos supuesto que $|f(x)| \leq K, \forall x \in I$).
Probemos ahora el recíproco, para lo cual supongamos que f es integrable. Escribimos nuevamente $D = \cup_{r \in \mathbb{N}} D_r$, con $D_r = \{x \in I : \omega(f,x) \geq 1/r\}$. Por hipótesis, existe una partición P de I tal que

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{J \in P} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) < \varepsilon.$$

Hacemos $D_r = J_1 \cup J_2$, con $J_1 = \{x \in D_r : x \in \operatorname{fr} J, \text{ para algún } J \in P\}$ y $J_2 = \{x \in D_r : x \in \operatorname{int} J, \text{ para algún } J \in P\}$. Es claro que J_1 tiene medida nula.
Sea C el conjunto de las celdas de P que tienen un elemento de D_r en su interior. Si $J \in C$, entonces $M_J(f) - m_J(f) \geq 1/r$ y

$$\frac{1}{r} \sum_{J \in C} m(J) \leq \sum_{J \in C} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) \leq \sum_{J \in P} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) < \varepsilon.$$

□

2.6. Consecuencias del teorema de Lebesgue.

- Un conjunto acotado A tiene contenido (según Jordan), es decir la función constante 1 es integrable si y sólo si la frontera de A tiene medida nula.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado que tiene contenido y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada con una cantidad finita o numerable de puntos de discontinuidad. Entonces f es integrable.

Teorema. *a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y tiene medida nula y $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\int_A f = 0$.*
b) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, $f(x) \geq 0$, $\forall x$ y $\int_A f = 0$, entonces el conjunto $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula.

Demostración. a) Supongamos que A es un conjunto de medida nula y sea S un n-intervalo que contiene a A. Extendemos f a S haciendo $f(x) = 0$, si $x \in S \setminus A$.
Sean $P = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$ una partición de S y M una constante tales que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$. Entonces

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{N} m_i(f) \cdot m(S_i) \leq M \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i(\chi_A) \cdot m(S_i).$$

Si $m_i(\chi_A) \neq 0$ para algún i, entonces $S_i \subset A$ lo que es absurdo pues $m(A) = 0$ pero $m(S_i) \neq 0$.
En definitiva, $L(f, P) \leq 0$.
Análogamente,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{N} M_i(f) \cdot m(S_i) = -\sum_{i=1}^{N} m_i(-f) \cdot m(S_i) = -L(-f, P) \geq 0.$$

Como f es integrable y $L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$, entonces $\int_A f = 0$.
b) Sea $A_r = \{x \in A : f(x) > 1/r\}$ y veamos que tiene contenido nulo.
Sea S un rectángulo que contiene a A y P una partición de S tal que $U(f, P) < \varepsilon/r$ (f se extiende a S de la forma usual). Si $\{S_1, \dots, S_k\} \subset P$ tienen intersección no nula con A_r,

$$\sum_{i=1}^{k} m(S_i) \leq \sum_{i=1}^{k} r \cdot M_i(f) \cdot m(S_i) \leq r \cdot U(f, P) < \varepsilon$$

lo que indica que A_r tiene contenido nulo.
Como $A = \cup_{r \in \mathbb{N}} A_r$, A tiene medida nula. $\square$

Ejemplos.
1) $f(x) = \text{sen}(1/x)$ es integrable en $[-1, 1]$.
2) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \text{sen}(1/y) & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ es integrable en $B(0, 1)$.

3. Propiedades de la integral.

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados, $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrables, $k \in \mathbb{R}$.

i) $f + g$ es integrable y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.

ii) kf es integrable y $\int_A (kf) = k \int_A f$.

iii) $|f|$ es integrable y $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

iv) Si $f \leq g$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$.

v) Si A tiene contenido y $|f| \leq M$, entonces $\left|\int_A f\right| \leq M \cdot c(A)$.

vi) Si f es continua, A tiene contenido y es compacto y conexo, entonces existe $x_0 \in A$ tal que $\int_A f = f(x_0) \cdot c(A)$.

vii) Sea $f : A \cup B \to \mathbb{R}$. Si $A \cap B$ tiene medida nula y $f|_{A \cap B}$, $f|_A$, $f|_B$ son integrables, entonces f es integrable en $A \cup B$ y $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

3.1. Teorema del valor medio.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de Jordan compacto y conexo y sea $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $g : K \to \mathbb{R}$ es acotada, $g(x) \geq 0$, $\forall x \in K$ y es continua excepto en un conjunto de contenido cero, entonces existe $z \in K$ tal que

$$\int_K f \cdot g = f(z) \int_K g.$$

Demostración. Sean $u, v \in K$ tales que $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$, $\forall x \in K$. Como g es no negativa,

$$f(u) \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq f(v) \cdot g(x), \ \forall x \in K,$$

de donde

$$f(u) \int_K g \leq \int_K f \cdot g \leq f(v) \int_K g.$$

Si $\int_K g = 0$, entonces $\int_K f \cdot g = 0$ y el teorema es cierto para cualquier $z \in K$.
Si $\int_K g > 0$, entonces

$$f(u) \leq \frac{\int_K f \cdot g}{\int_K g} \leq f(v).$$

Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $z \in K$ tal que $f(z) = \dfrac{\int_K f \cdot g}{\int_K g}$.

□

4. Integrales impropias.

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada y no negativa, con A no acotado. Extendemos f a todo $\mathbb{R}^n$ de la manera usual. Decimos que f es integrable en A cuando f es integrable en todo n-intervalo $[-a, a]^n$ y existe $\lim_{a \to \infty} \int_{[-a,a]^n} f$.
Nota. Al ser f no negativa, podemos expandir la región de integración simétricamente. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ cambia de signo y resulta que $\int_{-a}^{a} x dx = 0$ con lo que $\int_{-\infty}^{\infty} f = 0$ pero $\int_{-\infty}^{0} f$ y $\int_{0}^{\infty} f$ no existen.

4.1. Teorema.

Si $f \geq 0$, está acotada y es integrable en cada $[-a, a]^n$, entonces f es integrable si y sólo si dada cualquier sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos acotados con contenido tales que $B_k \subset B_{k+1}$ y existe k tal que $C \subset B_k$, para todo n-cubo C, entonces existe $\lim_{k \to \infty} \int_{B_k} f$.

4.2. Definición.

a) Sea $f \geq 0$ no acotada definida en $A \subset \mathbb{R}^n$ no acotado. Para cada $M > 0$, se define

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq M \\ 0 & \text{si } f(x) > M \end{cases}.$$

Si existe $\lim_{M\to\infty} \int_A f_M$, decimos que f es integrable en A.
b) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es arbitraria, sean

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}.$$

Así, $f = f^+ - f^-$ y f es integrable en A si lo son f^+ y f^- y definimos $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$.
Como $|f| = f^+ + f^-$, si f es integrable, también lo es $|f|$ y $\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^- \geq \left|\int_A f\right|$.
Recíprocamente, si $|f|$ es integrable y f es integrable en cada cubo, entonces f es integrable.

5. Teorema de Fubini.

Una herramienta fundamental para abordar el problema del cálculo de integrales múltiples se obtiene a partir del teorema de Fubini. Veremos que, en situaciones favorables, el cálculo de una integral n-dimensional se reduce al cálculo de n integrales simples, llamadas integrales iteradas.
A lo largo de esta sección, representaremos todo punto de $\mathbb{R}^n$ como un par (x, y), donde $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Análogamente, todo n-intervalo lo escribiremos como $I = I_1 \times I_2$, con $I_1 \subset \mathbb{R}^k$, $I_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$.

5.1. Teorema.

Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un n-intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en I.
a) Supongamos que, para cada $x \in I_1$, la función $f_x(y) = f(x, y)$ es integrable en I_2. Si llamamos $g(x) = \int_{I_2} f_x(y)dy$, entonces g es integrable en I_1 y

$$\int_I f = \int_{I_1} g(x)dx = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x, y)dy\right] dx.$$

b) Si, para cada $y \in I_2$, la función $f_y(x) = f(x, y)$ es integrable en I_1, entonces $g(y) = \int_{I_1} f_y(x)dx$ es integrable en I_2 y

$$\int_I f = \int_{I_2} g(y)dy = \int_{I_2} \left[\int_{I_1} f(x, y)dx\right] dy.$$

Demostración. Por simplicidad en la notación, haremos la demostración del apartado a) para el caso $n = 2$ (el apartado b) es completamente análogo). Si llamamos $I = [a,b] \times [c,d]$, como f es acotada en I, entonces g es acotada en $[a,b]$. Además,

$$|g(x)| \leq \int_c^d |f(x,y)|dy \leq (d-c) \cdot \sup_{(x,y)\in I} |f(x,y)|.$$

Por ser f integrable, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{R_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ de I, con $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, tal que $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.
Si llamamos

$$\begin{aligned} M_{ij} = \sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y) \quad &, \quad m_{ij} = \inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y), \\ N_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) \quad &, \quad n_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x), \end{aligned}$$

entonces, fijado $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \leq M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Sumando para todos los valores de j,

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq g(x) \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq n_i \leq N_i \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Multiplicamos miembro a miembro por $(x_i - x_{i-1})$ y sumamos sobre i:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^m n_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$L(f,P) \leq L(g,P_x) \leq U(g,P_x) \leq U(f,P).$$

Deducimos así que $U(g,P_x) - L(g,P_x) < \varepsilon$, es decir g es integrable en $[a,b]$.
Además,

$$\int_I f = \sup L(f,P) \leq \int_a^b g(x)dx \leq \inf U(f,P) = \int_I f,$$

lo que demuestra el teorema. □

Corolario 1. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua, entonces*

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x,y)dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x,y)dx \right) dy.$$

Corolario 2. *Sean $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, con $f_1(x) \le f_2(x)$, $\forall x \in [a,b]$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces*

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

Demostración. Extendemos f a $I = [a,b] \times [c,d]$, donde $c \le f_1(x) \le f_2(x) \le d$, definiendo $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in I \setminus D$. De este modo, el conjunto de discontinuidades de f está formado por los puntos $(x, f_1(x))$ y $(x, f_2(x))$ $(x \in [a,b])$, que tiene medida nula. Lo mismo ocurre con las funciones f_x y f_y, por lo que todas son integrables. Basta por tanto aplicar el teorema de Fubini para obtener el resultado. □

Observaciones.
(1) Un resultado análogo se obtiene para regiones de la forma $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \le x \le g_2(y), c \le y \le d\}$, con $g_1, g_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $g_1(y) \le g_2(y)$, $\forall y \in [c,d]$. En este caso, la integral se calcula como

$$\int_D f = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

En algunos casos, la región de integración se puede escribir de dos formas diferentes, por ejemplo:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \le x \le g_2(y), c \le y \le d\}. \end{aligned}$$

Entonces se puede calcular la integral doble de una función continua en D de dos formas diferentes. En la práctica ha de elegirse la que simplifique los cálculos.

(2) Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es discontinua en un segmento $\{(x,y) : a \le x \le b, y = y_0\}$, entonces $\int_a^b f_{y_0}(x)dx$ no existe; sin embargo, existe la integral doble $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$. Esto sugiere que se extienda el teorema de Fubini para tener en cuenta las integrales superior e inferior.

5.2. Teorema.

Sea f acotada en $I = [a,b] \times [c,d]$. Entonces *i)* $\displaystyle \underline{\int}_I f \le \underline{\int}_a^b \left(\overline{\int}_c^d f_x(y)dy \right) dx \le \overline{\int}_a^b \left(\overline{\int}_c^d f_x(y)dy \right) dx \le \overline{\int}_I f.$

ii) $\displaystyle \underline{\int}_I f \le \underline{\int}_a^b \left(\underline{\int}_c^d f_x(y)dy \right) dx \le \overline{\int}_a^b \left(\underline{\int}_c^d f_x(y)dy \right) dx \le \overline{\int}_I f.$

iii) $\displaystyle \underline{\int}_I f \le \underline{\int}_c^d \left(\overline{\int}_a^b f_y(x)dx \right) dy \le \overline{\int}_c^d \left(\overline{\int}_a^b f_y(x)dx \right) dy \le \overline{\int}_I f.$

iv) $\displaystyle \underline{\int}_I f \le \underline{\int}_c^d \left(\underline{\int}_a^b f_y(x)dx \right) dy \le \overline{\int}_c^d \left(\underline{\int}_a^b f_y(x)dx \right) dy \le \overline{\int}_I f.$

v) Si existe $\int_I f$, entonces las desigualdades anteriores son igualdades.

Ejemplos.

(1) Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Probar:

a) Existe $\int_0^t f(x,y)dy$ para todo $t \in [0,1]$ y
$\underline{\int}_0^1 \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t^2$, $\overline{\int}_0^1 \left(\int_0^t f(x,y)dy \right) dx = t$.
Deducir que existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$.

b) Existe $\int_0^1 \left(\overline{\int}_0^1 f(x,y)dx \right) dy$.

c) La función f no es integrable en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

(2) Sea $A = \{(i/p, j/p) \in \mathbb{R}^2 : p \text{ es primo}, 1 \le i, j \le p-1\}$. Es fácil probar que cada recta horizontal o vertical corta a A como máximo en un número finito de puntos. Sin embargo, A no tiene contenido cero porque es denso en $Q = [0,1] \times [0,1]$. De hecho A es un conjunto sin contenido (su frontera no tiene contenido cero).

Si definimos $f : Q \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in A \\ 0 & \text{si } x \in Q \setminus A, \end{cases}$ entonces f no es integrable en Q (la integral inferior vale cero y la integral superior vale 1). Sin embargo, existen $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy$, pues f_x y f_y tienen un número finito de discontinuidades.

(3) Sea $f : Q = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ ó } y \text{ son irracionales} \\ 1/n & \text{si } y \text{ es racional, } x = m/n \text{ con } m \text{ y } n \text{ primos entre sí y } n > 0. \end{cases}$$

Entonces $\int_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy = 0$ pero $\int_0^1 f(x,y)dy$ no existe si x es racional.