

NÚMEROS COMPLEJOS

1. Preliminares

Definición. Se llama **número complejo** a todo par ordenado de números reales. Si $z = (a, b)$ es un número complejo, se dice que a es la **parte real** de z y b es la **parte imaginaria** de z :

$$a = \operatorname{Re} z \quad b = \operatorname{Im} z.$$

El conjunto de números complejos se denota por \mathbb{C} .

En \mathbb{C} se pueden definir las operaciones de suma y producto:

$$\begin{aligned} \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}, (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

con las cuales $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo. Además se puede establecer un relación biunívoca entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 .

Teniendo en cuenta que

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

podemos identificar el número real a con el número complejo $(a, 0)$. En este sentido decimos que \mathbb{C} contiene a \mathbb{R} .

Si llamamos $i = (0, 1)$, entonces $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, de modo que podemos escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Esta forma de expresar el número complejo (a, b) se llama **forma binómica**.

Definición. Si $z = a + bi$, entonces se define el **complejo conjugado** de z al número $\bar{z} = a - bi$.

Propiedades.

- | | |
|---|---|
| (a) $\overline{\bar{z}} = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$ | (b) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z.$ |
| (c) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z.$ | (d) $z = \bar{z}$ si y sólo si $\operatorname{Im} z = 0.$ |
| (e) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$ | (f) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$ |
| (g) $\overline{-z} = -\bar{z}.$ | (h) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ si $z \neq 0.$ |

Definición. Se define el **módulo de un número complejo** $z = a + bi$ como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Propiedades.

- (a) $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$.
- (b) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
- (c) $|z| = |\bar{z}|$.
- (d) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.
- (e) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Todo número complejo $z = a + bi \neq 0$ se puede escribir como $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$, donde $|z|$ es un número real positivo y $z/|z|$ tiene módulo 1. Por tanto, existe un ángulo ϑ , llamado argumento de z , tal que $z/|z| = \cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta$.

Obtenemos así la **representación módulo-argumental** de cualquier complejo no nulo,

$$z = r(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta),$$

donde $r = |z|$ y ϑ representa el ángulo que forma el segmento que une el origen con el punto $P = (a, b)$ y la horizontal. Como dicho ángulo no es único (pues valen todos los de la forma $\vartheta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), se llama **argumento principal**, y se denota por $\operatorname{Arg} z$, al único que pertenece al intervalo $[0, 2\pi)$. Entonces

$$\arg z = \{\vartheta : \vartheta = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Propiedades.

- (a) $\operatorname{Arg} z = 0$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}^+$.
- (b) $\operatorname{Arg} z = \pi$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}^-$.
- (c) $\arg z = -\arg \bar{z}$.
- (d) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.
- (e) $\arg(z^{-1}) = -\arg z$, para $z \neq 0$.

2. Potencias de números complejos

Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define $z^0 = 1$, $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$, $z^{-n} = (z^{-1})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Propiedades. $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$,

- (a) $z^m z^n = z^{m+n}$.
- (b) $(z^m)^n = z^{mn}$.
- (c) $(z_1 z_2)^m = z_1^m z_2^m$.

- (d) $|z^n| = |z|^n$.
- (e) $|z^{-n}| = |z|^{-n}$.
- (f) $\arg z^n = n \arg z$.
- (g) $\arg z^{-n} = -n \arg z$.

Teniendo en cuenta este resultado se deduce fácilmente la **fórmula de Moivre**:

Si $z = |z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$, entonces $z^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta)$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición. Si $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, se define la **raíz n -ésima de z** como el número complejo ω que verifica $\omega^n = z$. Es decir $\omega = \sqrt[n]{z}$ si y sólo si $\omega^n = z$.

Teorema. *Todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces n -ésimas complejas distintas.*

Concretamente, si $z = r(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$ y $w = s(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta')$ es su raíz n -ésima, entonces $s = \sqrt[n]{r}$ y $\vartheta' = \frac{\vartheta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Como todas las raíces tienen el mismo módulo, estarán situadas en una circunferencia de radio su módulo y como la diferencia entre los argumentos de dos raíces consecutivas es constante, estarán equidistribuidas en esa circunferencia.

3. Exponencial de un número complejo

Se define

$$e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b, \quad -\infty < b < +\infty.$$

De este modo, si $z = a + bi$, $z \neq 0$, se tiene

$$e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Entonces

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z.$$

Propiedades.

- (a) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
- (b) $|e^{ib}| = 1$.
- (c) $e^z \neq 0, \forall z$.
- (d) $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (e) $e^{z_1} = e^{z_2}$ si y sólo si $z_1 - z_2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teniendo en cuenta que $e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta$, por definición se tiene la llamada **forma exponencial** de z :

$$z = |z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta) = |z|e^{i\vartheta}.$$

Definición. Si $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq 0$, llamaremos **logaritmo** de z a cualquier complejo ω que verifique $e^\omega = z$. Entonces, si $\omega = x + iy$,

$$e^\omega = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = z = |z|(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta).$$

Por lo tanto, debe verificarse $e^x = |z|$ es decir $x = \ln |z|$ y $\arg e^\omega = y = \vartheta + 2k\pi$.

Luego

$$\omega = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cualquiera de esos complejos es el **logaritmo natural** de z . El valor correspondiente a $k = 0$ es el llamado **logaritmo principal** de z y se denota por

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Ejercicios.

- 1.- Calcular las raíces cuartas de $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ y comprobar que z coincide con una de ellas.
- 2.- Calcular en forma binómica $\sqrt[3]{-i}$.
- 3.- Demostrar que, si $n = 3k$, entonces $(1 + \sqrt{3}i)^n = \pm 2^n$.
- 4.- Resolver $z^2 - (6 + 8i)z + (1 + 30i) = 0$.
- 5.- Calcular el valor del número real a para que $\frac{2 + ai}{a + 2i}$ sea real y calcular ese cociente.
- 6.- Demostrar que

$$|z| = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \bar{z} = z^{-1} \quad \text{si y sólo si} \quad z = \frac{1 + xi}{1 - xi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 7.- Resolver $(z + 2i)^3 + (z + i)^3 = 0$.
- 8.- Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tales que $|z_1| = |z_2| = 1$ y $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$. Hallar el argumento de $1 + z_1 z_2$.
- 9.- Sean $z \neq 0$ y $\omega_1, \dots, \omega_n$ las raíces n -ésimas de z . Probar que

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \dots \omega_n = (-1)^{n+1} z.$$

- 10.- Resolver $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

- 11.- Sabiendo que $z^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{3}i)z + p = 0$ tiene una raíz que es $z_1 = -1 + i$. Hallar p y la otra raíz.
- 12.- Expresar el complejo z en forma binómica y exponencial sabiendo que verifica

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4}, \quad \left| \frac{z-1}{\sqrt{z}} \right| = \sqrt{|z|}.$$

4. Sucesiones y series de números complejos

Definición. Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos se dice que converge a z cuando

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0, \quad \forall n \geq n_0, \quad |z_n - z| < \epsilon.$$

Teorema. Sea la sucesión $\{z_n\}$ con $z_n = x_n + iy_n, \forall n$. Esta sucesión converge a $z = x + iy$, si y sólo si $\{x_n\}$ converge a x e $\{y_n\}$ converge a y .

Teorema. Sea $z_n = x_n + iy_n, \forall n$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y sólo si las series reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ son convergentes.}$$

5. Funciones Complejas de Variable Compleja

Sea $E \subset \mathbb{C}$. Toda función $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ se llama **función de variable compleja**. Si toma un solo valor para cada $z \in E$, se llama **función uniforme** y si puede tomar varios valores, se llama **función multiforme**. Por ejemplo, $f(z) = z^2$ es uniforme y $f(z) = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, es multiforme. Trataremos aquí sólo las funciones uniformes.

Sea $z = x + iy \in E$ y $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces la función f es equivalente a un sistema de dos funciones de dos variables reales

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Por ejemplo, si $\omega = z^2$, entonces

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \iff \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Definición. Sea z_0 un punto de acumulación de $E \subset \mathbb{C}$. Un complejo $A = \alpha + i\beta$ se dice que es **límite de f** sobre E cuando $z \rightarrow z_0$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in E, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Esto equivale a que, si $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{cases} u(x, y) \rightarrow \alpha, & \text{cuando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0), \\ v(x, y) \rightarrow \beta, & \text{cuando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0). \end{cases}$$

Es claro, a partir de la definición, que los límites de funciones de variable compleja verifican las mismas propiedades algebraicas que los límites de funciones de dos variables reales.

Definición. Sea $f : E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y $z_0 \in E$. Se dice que f es **continua en z_0** si existe

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0). \end{cases}$$

Como ejemplo de función no continua tenemos a $f(z) = \text{Arg } z$ que es discontinua en los puntos del semieje real derecho.

Propiedades.

- (a) *La función f es continua si lo son sus componentes real e imaginaria.*
- (b) *Las propiedades de las funciones continuas de dos variables se extienden a las funciones de variable compleja.*
- (c) *La continuidad se mantiene a través de las operaciones algebraicas y la composición.*
- (d) *Las funciones de variable compleja continuas conservan la compacidad.*
- (e) *Una función de variable compleja en un compacto es uniformemente continua.*

6. Funciones Diferenciables

Definición. Sea $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables en (x_0, y_0) , se dice que la función f es **diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$ en el sentido del Análisis Real** y la diferencial se denota por

$$df = du + idv.$$

Como

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy, \end{cases}$$

entonces sustituyendo

$$df = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

Considerando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

nos queda

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Si escribimos $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$, se tiene

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

y sustituyendo

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}.$$

Si llamamos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

que se denominan derivadas formales, se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

que es la expresión para la diferencial de una función de variable compleja diferenciable en el sentido del Análisis Real.

Definición. Sea $f(z)$ diferenciable en el sentido del Análisis Real en z_0 . Se dice que esta función es **diferenciable en el sentido del Análisis Complejo** si en z_0

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

En este caso $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$. La expresión $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ se traduce en

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

lo que equivale, sustituyendo esas expresiones, a que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \implies \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

y que se denominan **condiciones de Cauchy-Riemann**.

Luego una función es diferenciable en el sentido del Análisis Complejo si es diferenciable en el sentido del Análisis Real y su parte real e imaginaria verifican las condiciones de Cauchy-Riemann.

Si las funciones u y v se pueden seguir derivando (se puede probar precisamente que las funciones derivables en \mathbb{C} son infinitamente derivables), se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

y análogamente para la v , por lo que se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

es decir ambas son soluciones de la ecuación de Laplace que se escribe $\nabla^2 u = \Delta u = 0$ y por ello se llaman **funciones armónicas**. Como además verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, se dice que la parte real y la parte imaginaria de una función diferenciable en el sentido del Análisis Complejo son armónicas conjugadas. Conocida una de las dos se puede obtener la otra, ya que si por ejemplo conocemos la u , se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = P, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = Q. \end{cases}$$

Luego el campo vectorial $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es un campo gradiente ya que su rotacional $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Podemos entonces recuperar el campo potencial que será v .

Definición. Sea $\omega = f(z)$, se dice que f tiene **derivada en** z_0 , si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

y se escribe $f'(z_0)$.

Se tiene que si f tiene derivada y es diferenciable en el sentido del Análisis Complejo en z_0 , todas las derivadas direccionales son iguales y se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

que, como no depende de la dirección, si consideramos la derivada en la dirección del eje OX para calcularla, se tiene

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

aunque podemos hacerlo en cualquier otra dirección y obtener distintas expresiones. Por eso escribiremos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}.$$

Es pues equivalente tener derivada en un punto que ser derivable en el sentido del Análisis Complejo en dicho punto.

Definición. Si f es diferenciable en el sentido del Análisis Complejo en todo un entorno del punto z_0 , se dice que es **analítica en z_0** . Si G es un recinto (no vacío, abierto y conexo) de \mathbb{C} , y f es analítica en todo punto de G , se dice que es analítica en G (o holomorfa o regular).

Como ejemplo podemos comprobar algunas derivadas.

a) Si $f(z) = z^n$, se tiene $f'(z) = nz^{n-1}$.

b) Si $f(z) = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xyi$, se tiene $f'(z) = 2x + 2yi$.

7. Integración de Funciones Complejas

Teniendo en cuenta la isometría entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 , podremos definir curvas en el espacio complejo como las curvas en el plano.

Toda función $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua define una trayectoria en el plano complejo, cuyos puntos son $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, y los extremos son $z(a)$ y $z(b)$. Si $z(a) = z(b)$, se trata de una curva cerrada.

Si $z = z(t)$ con $a \leq t \leq b$, se tiene

$$z = x(t) + iy(t) \longrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b,$$

que es la ecuación de una curva en forma real. Se dice que un punto de la curva es múltiple cuando existen $t_1 \neq t_2$ y distintos de a y b tales que $z(t_1) = z(t_2)$. Se dice que una **curva es de Jordan** cuando no tiene puntos múltiples. Si $z'(t) \neq 0$ para cada t , se dice curva lisa o simple o arco elemental.

La longitud se calcula de la forma usual:

$$L = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

y cuando es finita se llama **curva rectificable**.

Definición. Sea Γ una curva rectificable y $f(z)$ definida sobre la curva. Se considera una partición de la curva en arcos por los puntos, $A = z_0, z_1, \dots, z_n = B$ y tomemos en cada arco un punto ξ_k . Si existe el límite de las sumas

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$$

cuando la longitud λ de los arcos de la partición tiende a cero, se dice que f es **integrable sobre la curva** y a dicho límite se le llama integral de f sobre la curva Γ entre los puntos A y B :

$$\int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k.$$

Teniendo en cuenta las partes real e imaginaria de la función, se puede expresar la integral como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz &= \int_{\Gamma_{AB}} (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy) \\ &= \int_{\Gamma_{AB}} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma_{AB}} v(x, y) dx + u(x, y) dy \end{aligned}$$

es decir, como una suma de integrales curvilíneas de campos vectoriales.

Teorema. Si la curva Γ es rectificable y la función f es continua, existe la integral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

y se calcula mediante la expresión anterior.

Propiedades.

(a) $\int_{\Gamma_{AB}} \left(\sum_{k=1}^n f_k(z) \right) dz = \sum_{k=1}^n \left(\int_{\Gamma_{AB}} f_k(z) dz \right).$

(b) $\int_{\Gamma_{AB}} k f(z) dz = k \int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz.$

(c) Si $\Gamma_{AB} = \cup \Gamma_k$, unión de arcos, entonces

$$\int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

(d) Si cambia el sentido de la orientación, entonces

$$\int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz = - \int_{\Gamma_{AB}^-} f(z) dz.$$

(e) $\left| \int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma_{AB}} |f(z)| dz.$

(f) Si la longitud de la curva es L y la función f está acotada por M ,

$$\left| \int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz \right| \leq ML.$$

Teniendo en cuenta que $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, podemos calcular la integral de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{AB}} f(z) dz &= \int_{\Gamma_{AB}} (u(x, y) + iv(x, y)) (dx + idy) \\ &= \int_{\Gamma_{AB}} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\Gamma_{AB}} v(x, y)dx + u(x, y)dy \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &= \int_a^b f(z(t))z'(t) dt. \end{aligned}$$

Ejemplo. Calcular

$$\oint_C (z - a)^n dz,$$

siendo C la circunferencia de radio R centrada en el punto a y recorrida en sentido positivo.

La curva se parametriza como $z = a + Re^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Así, $dz = Rie^{i\vartheta} d\vartheta$, de modo que

$$\begin{aligned} \oint_C (z - a)^n dz &= \int_0^{2\pi} R^n e^{in\vartheta} iRe^{i\vartheta} d\vartheta = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\vartheta} d\vartheta \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)\vartheta + i \operatorname{sen}(n+1)\vartheta] d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

(resultado independiente del punto a y del radio R de la circunferencia).

Ejercicio. Calcular $\int_A^B |z| dz$, con $A = -i$, $B = i$, en los siguientes casos:

- A lo largo del segmento que une A y B .
- A lo largo de la semicircunferencia unidad izquierda.

Teorema integral de Cauchy.

Sea G un recinto simplemente conexo del plano complejo. Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en G . Entonces para cualquier curva cerrada y rectificable Γ contenida en G , se verifica

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

La demostración es sencilla ya que se basa en el teorema de Green y en el hecho de que al ser la función analítica, su parte real e imaginaria verifican las condiciones de Cauchy-Riemann.

Concretamente, si D es la región del plano con frontera Γ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Ejercicios.

1. Calcular $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$, donde Γ es una curva de Jordan cerrada y orientada positivamente.
2. Calcular $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z dz$, donde Γ es la circunferencia $|z - 1| = 1$.
3. $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz$, donde Γ es la línea quebrada que une los puntos 0 , 1 y $1 + i$.