

Teorema de la función implícita

Nos planteamos en esta sección el siguiente problema:

¿Bajo qué condiciones una ecuación del tipo $F(\vec{x}, \vec{z}) = 0$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$, tiene alguna solución $\vec{z} = g(\vec{x})$?

Si dicha solución existe y es única localmente, decimos que F define implícitamente a \vec{z} en función de \vec{x} .

Un caso particular de este problema es el de la solución de un sistema lineal

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}z_j = x_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

el cual tiene solución única cuando la matriz de los coeficientes tiene determinante no nulo y, en este caso, la solución viene dada por la regla de Cramer.

Si denotamos por $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$ y $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y definimos las funciones

$$f_i(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}z_j - x_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

la matriz $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es precisamente la matriz jacobiana de la función $F = (f_1, \dots, f_n)$ con respecto a las variables (z_1, \dots, z_n) y, de lo anterior, deducimos que $\det JF \neq 0$ es una condición suficiente para que el sistema defina de forma implícita a \vec{z} como función de \vec{x} . Esta condición también será esencial en el caso general.

Veamos otro ejemplo sencillo: la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ representa la esfera centrada en el origen y radio unidad. Al despejar z en la ecuación, obtenemos dos posibles soluciones, $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que representan la semiesfera superior y la semiesfera inferior, respectivamente, y definen dos funciones diferenciables, pero únicamente si $x^2 + y^2 < 1$. Esto significa que, en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0) perteneciente a la esfera, si $z_0 \neq 0$, la ecuación inicial define implícitamente una única función $z = z(x, y)$ diferenciable pero, si $z_0 = 0$, la ecuación no tiene solución única de la forma $z = z(x, y)$.

Enunciamos a continuación el resultado general que proporciona las condiciones suficientes para la existencia de una función definida en forma implícita.

Teorema de la función implícita. Sean $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ y $(\vec{x}_0, \vec{z}_0) \in D$ un punto tal que

i) $F(\vec{x}_0, \vec{z}_0) = 0$, y

ii) $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(\vec{x}_0, \vec{z}_0) \neq 0$, donde $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial z_1 & \dots & \partial f_1 / \partial z_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial z_1 & \dots & \partial f_n / \partial z_n \end{vmatrix}$,

entonces existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ de \vec{x}_0 , un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ de \vec{z}_0 y una única función $g : U \rightarrow V$ tales que:

a) $g \in C^{(1)}(U)$,

b) $g(\vec{x}_0) = \vec{z}_0$,

c) $F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0, \forall \vec{x} \in U$.

Veamos en los distintos casos cómo se calculan las derivadas de una función definida en forma implícita.

1.1. Caso de una variable independiente.

Si una ecuación $f(x, y) = 0$, donde f es una función diferenciable de las variables x e y , determina a y como función de x , la derivada de esta función dada en forma implícita, siempre que $f'_y(x, y) \neq 0$, puede hallarse por la fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

(Las derivadas de orden superior pueden hallarse por derivación sucesiva de la fórmula anterior.)

Ejemplo 1. En la fórmula $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$, tenemos:

$$f'_x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3(2x) = 6x[(x^2 + y^2)^2 - 1]$$

$$f'_y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3(2y) = 6y[(x^2 + y^2)^2 - 1].$$

de donde $dy/dx = -x/y$.

Para hallar la segunda derivada, derivamos con respecto a x la primera derivada que hemos encontrado, teniendo en cuenta al hacerlo que y es función de x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{y} \right) = -\frac{y - x(dy/dx)}{y^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

1.2. Caso de varias variables independientes.

Análogamente, si la ecuación $F(x_1, \dots, x_n, z) = 0$, donde F es una función diferenciable de las variables x_1, \dots, x_n y z , determina en forma implícita a z como función de las variables independientes x_1, \dots, x_n , en los puntos donde $F'_z(x_1, \dots, x_n, z) \neq 0$, las derivadas parciales de esta función dada en forma implícita pueden hallarse por las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}(x_1, \dots, x_n, z)}{F'_z(x_1, \dots, x_n, z)}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}(x_1, \dots, x_n, z)}{F'_z(x_1, \dots, x_n, z)}.$$

Ejemplo 2. La ecuación $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ representa una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 . Si suponemos que dicha ecuación define a z como función de x e y , $z = f(x, y)$, sus derivadas parciales se calculan como sigue:

$$F'_x(x, y, z) = 2x, \quad F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1, \quad F'_z(x, y, z) = 6z - y,$$

de modo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y},$$

en los puntos donde $6z - y \neq 0$.

1.3. Sistemas de funciones implícitas.

Si el sistema de dos ecuaciones $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ determina u y v como funciones diferenciables de las variables x e y y el determinante de la matriz jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}$ es no nulo, entonces las derivadas parciales de $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ se obtienen por las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}. \end{aligned}$$

(Utilizamos en estos casos la notación $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$, y de forma similar con el resto de variables.)

Ejemplo 3. Sabiendo que las ecuaciones $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$ determinan u y v como funciones de x e y , si definimos las funciones

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= u + v - x - y \\ G(x, y, u, v) &= xu + yv - 1, \end{aligned}$$

las fórmulas anteriores dan los siguientes resultados: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & u \end{vmatrix} = u + x, & \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ u & y \end{vmatrix} = -y - u, \\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ v & y \end{vmatrix} = -y - v, & \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x & v \end{vmatrix} = v + x. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y + u}{y - x}; & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{u + x}{y - x}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y + v}{y - x}; & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{v + x}{y - x}. \end{aligned}$$

En la práctica, en vez de utilizar las fórmulas anteriores, podemos resolver directamente el sistema formado por las derivadas parciales de las ecuaciones dadas, teniendo en cuenta que u y v son funciones de x e y .

Así pues, al derivar respecto a x , obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 1 \\ u + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u + y}{-x + y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u + x}{x - y}.$$

Análogamente se procedería resolviendo el sistema formado por las derivadas parciales respecto a y .

1.4. Funciones dadas en forma paramétrica.

Si la función diferenciable z de las variables x e y se expresa mediante sus ecuaciones paramétricas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

y $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$, la diferencial de esta función se deduce del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv. \end{aligned}$$

Conociendo la diferencial $dz = p dx + q dy$, hallamos las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Ejemplo 4. Si la función z de los argumentos x e y viene dada por las ecuaciones $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$, ($u \neq v$), hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Primer método. Por diferenciación, hallamos tres ecuaciones que relacionan entre sí las cinco variables:

$$\begin{aligned} dx &= du + dv, \\ dy &= 2u du + 2v dv, \\ dz &= 3u^2 du + 3v^2 dv. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones despejamos du y dv :

$$du = \frac{2vdx - dy}{2(v-u)}, \quad dv = \frac{dy - 2udx}{2(v-u)}.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación estas expresiones, resulta:

$$dz = 3u^2 \frac{2vdx - dy}{2(v-u)} + 3v^2 \frac{dy - 2udx}{2(v-u)} = -3uv dx + \frac{3}{2}(u+v) dy,$$

de donde $\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v)$.

Segundo método. Calculamos las derivadas parciales respecto a x e y en las tres ecuaciones que definen z , teniendo en cuenta que $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Tenemos así:

$$(*) \quad \begin{cases} 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} & 1 = 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

Al resolver los dos sistemas de (*), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{v}{v-u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{u}{u-v}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2(u-v)}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2(v-u)}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (**), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3(u+v)}{2}. \end{aligned}$$

Tercer método. Definimos la función $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) - z(u, v)$, donde $z = f(x, y)$ es la función determinada por las ecuaciones paramétricas. Entonces $h(u, v) = 0$ en los puntos donde está definida dicha función y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} = 0 &= D_1 f \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + D_2 f \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial h}{\partial v} = 0 &= D_1 f \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + D_2 f \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Resulta así un sistema de dos ecuaciones que se resuelve aplicando la regla de Cramer.

Teorema de la función inversa

Es conocido que, en una variable, si g es una función derivable en un intervalo (a, b) y $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces g es una función estrictamente monótona y existe la inversa $g^{-1} : g(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, la cual es derivable en $g(a, b)$ y su derivada viene dada por

$$(g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(x_0)}, \text{ con } y_0 = g(x_0).$$

En el caso general, dado un sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

se trata de encontrar las condiciones suficientes para que x_1, \dots, x_n se puedan expresar en función de y_1, \dots, y_n , sin tener que resolver explícitamente el sistema.

La existencia de solución se deduce del teorema de la función implícita aplicado a las funciones

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= y_n - f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como ya enunciamos en la sección anterior, la solución existe si el determinante de la matriz jacobiana es no nulo, es decir $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$, lo que equivale a $\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$. Este hecho corresponde al teorema de la función inversa.

Teorema. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en un abierto $D \subset \mathbb{R}^n$. Si $\vec{x}_0 \in D$ y $\det Jf(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces existen

- i) un entorno U de \vec{x}_0 ,
- ii) un entorno V de $f(\vec{x}_0)$,
- iii) una única función $g : V \rightarrow U$ de clase $C^{(1)}$ en V , tales que $g(f(\vec{x})) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V$.

Dicha función es, por definición, la inversa local de f .

Para calcular la derivada de g , basta tener en cuenta que

$$Jf(\vec{x}) \cdot Jg(\vec{y}) = I_n, \text{ con } \vec{y} = f(\vec{x}),$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^n D_k g_i(\vec{y}) \cdot D_j f_k(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(sistema de n^2 ecuaciones cuyas incógnitas corresponden a los elementos de la matriz jacobiana de g).