

FORMAS DIFERENCIALES

Una forma unificada de enunciar los teoremas vectoriales de Green, Stokes y Gauss puede plantearse con el uso de las formas diferenciales.

1. Definición.

Dado un abierto Ω el espacio \mathbb{R}^3 , pueden definirse las siguientes formas diferenciales:

a) Una 0-forma es una función (campo escalar) $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{(\infty)}$.

b) Una 1-forma es cualquier combinación lineal de $\{dx, dy, dz\}$:

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

donde $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ son de clase $C^{(\infty)}$.

c) Una 2-forma es cualquier combinación lineal de $\{dxdy, dydz, dzdx\}$:

$$\eta = P(x, y, z) dxdy + Q(x, y, z) dydz + R(x, y, z) dzdx,$$

donde $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ son de clase $C^{(\infty)}$.

d) Una 3-forma es una expresión $f(x, y, z) dxdydz$, donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase $C^{(\infty)}$.

De la misma forma, podemos distinguir cuatro tipos de subconjuntos de Ω :

- i) Puntos $P \in \Omega$.
- ii) Curvas C en Ω orientadas simples.
- iii) Superficies S en Ω orientadas.
- iv) Regiones elementales V en Ω .

Se puede establecer una relación entre ambas clasificaciones:

1) El valor de una 0-forma en un punto es un número real.

2) La integral de una 1-forma sobre una curva C es un número real:

$$\omega(C) = \int_C \omega = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

3) La integral de una 2-forma sobre una superficie S es un número real:

$$\begin{aligned} \eta(S) &= \iint_S \eta = \iint_S Pdx dy + Qdy dz + Rdz dx \\ &= \iint_D \left[P \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + Q \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + R \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] dudv. \end{aligned}$$

4) La integral de una 3-forma ν sobre una región elemental V es un número real:

$$\nu(V) = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

2. Álgebra de las formas diferenciales.

Se define la suma de dos k -formas operando término a término. Por ejemplo,

$$(P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz) + (P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz) = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz.$$

Análogamente, se define el producto de una función por una k -forma multiplicando la función por los coeficientes de la k -forma. Por ejemplo,

$$f(P dx + Q dy + R dz) = (f \cdot P) dx + (f \cdot Q) dy + (f \cdot R) dz.$$

Con estas operaciones, el conjunto de las k -formas es un espacio vectorial.

También se puede definir un producto de formas de la manera siguiente:

Si ω es una j -forma y η una k -forma, con $j + k \leq 3$, el *producto cuña* $\omega \wedge \eta$ es, por definición, una $(j + k)$ -forma que verifica las siguientes propiedades:

- i) $f \wedge w = w \wedge f = fw$, si f es una 0-forma.
- ii) $(w_1 + w_2) \wedge \eta = (w_1 \wedge \eta) + (w_2 \wedge \eta)$, si w_1 y w_2 son j -formas y η es k -forma.
- iii) $f(w \wedge \eta) = (fw) \wedge \eta = w \wedge (f\eta)$, si f es una 0-forma.
- iv) $w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3) = (w_1 \wedge w_2) \wedge w_3$.
- v) $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$.
- vi) $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, $dz \wedge dy = -dy \wedge dz$, $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$.
- vii) $dx \wedge dy = dx dy$, $dz \wedge dx = dz dx$, $dy \wedge dz = dy dz$, $dx \wedge (dy \wedge dz) = dx dy dz$.

Ejercicios.

- 1) Probar que $w \wedge \eta = (-1)^{jk}(\eta \wedge w)$, si w es una j -forma y η una k -forma.
- 2) Calcular $(x dx + y dy) \wedge (z y dx + x z dy + x y dz)$.
- 3) Calcular $(x dx - y dy) \wedge (x dy dz + z dx dy)$.

3. Derivación de las formas diferenciales.

La *derivada exterior* de una k -forma es, por definición, la $(k + 1)$ -forma que verifica las reglas siguientes:

- (1) Si f es una 0-forma,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

- (2) Si w_1, w_2 son k -formas, $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$.
- (3) Si w es j -forma y η es k -forma, $d(w \wedge \eta) = (dw \wedge \eta) + (-1)^k(w \wedge d\eta)$.
- (4) $d(dw) = 0$.

Ejercicios. Comprobar las siguientes fórmulas:

$$1. d(Pdx + Qdy + Rdz) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx.$$

$$2. d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dxdydz.$$

$$3. d(f dxdydz) = 0.$$

Definición. Una k -forma w (con $k > 0$) se dice que es **cerrada** cuando $dw = 0$ y se dice que es **exacta** cuando existe una $(k - 1)$ -forma η tal que $d\eta = w$.

Por la definición de derivada, toda forma exacta es cerrada. El recíproco no siempre es cierto pero el lema de Poincaré afirma que toda k -forma cerrada en un abierto estrellado es exacta.

[Recordamos que un subconjunto U es estrellado cuando existe un punto $x_0 \in U$ tal que, para todo $x \in U$, el segmento $\{tx + (1 - t)x_0 : t \in [0, 1]\}$ está contenido en U .]

4. Teoremas vectoriales.

Teorema de Green. Si $w = Pdx + Qdy$ es una 1-forma sobre un abierto que contiene a una región $D \subset \mathbb{R}^2$ con frontera ∂D recorrida en sentido positivo, entonces

$$\int_{\partial D} w = \iint_D dw.$$

Teorema de Stokes. Si $w = Pdx + Qdy + Rdz$ es una 1-forma sobre un abierto que contiene a una región $S \subset \mathbb{R}^3$ con frontera ∂S recorrida en sentido positivo, entonces

$$\int_{\partial S} w = \iiint_S dw.$$

Teorema de Gauss. Si $\eta = Pdxdy + Qdydz + Rdzdx$ es una 2-forma sobre un abierto que contiene a una región simple Ω con frontera $\partial\Omega$ superficie orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \eta = \iiint_{\Omega} d\eta.$$