DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Dada $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, cada una de las derivadas parciales es, a su vez, una función $D_k f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(k = 1, \ldots, m)$, definida en algún subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Estas funciones se llaman derivadas parciales de primer orden de f. A su vez, para cada una de ellas se pueden definir las correspondientes derivadas parciales, que llamaremos derivadas parciales de segundo orden de f, y para las que usaremos indistintamente cualquiera de las siguientes notaciones:

$$D_i(D_k f) = D_{ki} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = f_{ki}, \ 1 \le i \le m, \ 1 \le k \le m.$$

En el caso particular de $i = k$, utilizamos la notación análoga

$$(D_k)^2 f = D_{kk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = f_{kk}, \ (k = 1, \ldots, m).$$

El proceso de derivación puede repetirse de forma sucesiva y de este modo definir las derivadas parciales de orden p de f como

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}$$

para cualquier permutación de los índices $i_1, \ldots, i_p \in \{1, \ldots, m\}$.

Un problema interesante es averiguar bajo qué condiciones existen y son iguales las derivadas cruzadas (aquellas en donde sólo se cambia el orden de la permutación). La respuesta la proporciona el siguiente teorema de Schwarz.

Teorema (Igualdad de las derivadas parciales cruzadas.) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, donde D es un conjunto abierto. Si existen las derivadas parciales de primer orden $\partial f / \partial x_k$, $\forall k \in \{1, \ldots, m\}$, en alguna bola $B(\overrightarrow{x_0}, r) \subset D$ y existe $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y es continua en $\overrightarrow{x_0}$, entonces existe también $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\overrightarrow{x_0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x_0}).$$

Diremos que una función es de clase $C^{(p)}$ en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$, denotado como $f \in C^{(p)}(D)$, cuando existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden p de

f en D. En particular, $C^{(0)}$ es la clase de funciones continuas y $C^{(\infty)}$ representa la clase de funciones con derivadas continuas de cualquier orden. Así por ejemplo, una función de clase $C^{(1)}$ es diferenciable. Es fácil también probar que $C^{(p)}(D) \subset C^{(p-1)}(D)$, $\forall p > 0$.

Del teorema anterior, es evidente que, si $f \in C^{(2)}(D)$, entonces también se verifica la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

Análogamente, se prueba que, si $f \in C^{(k)}(D)$, son iguales todas las derivadas cruzadas de orden k, es decir

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{p(1)}} \dots \partial x_{i_{p(k)}}},$$

donde $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ y $\{p(1), \dots, p(k)\}$ es cualquier permutación del conjunto de índices $\{i_1, \dots, i_k\}$.