Curvas en el espacio.

Toda curva en el espacio $\mathbb{R}^n$ se puede considerar como la imagen de una función vectorial

$$r : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \; r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

que recibe el nombre de *parametrización de la curva*. Los puntos $r(a)$ y $r(b)$ son los extremos inicial y final de la curva. En el caso de que $r(a) = r(b)$, diremos que la curva es cerrada.

Decimos que dos funciones $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ son *equivalentes* si existe una función $\lambda : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ biyectiva y continua tal que $\psi \circ \lambda = \varphi$. La función λ recibe el nombre de *cambio de parámetro*.

Dos funciones equivalentes representan parametrizaciones distintas de la misma curva y la función λ representa un cambio en la rapidez del movimiento.

- Si λ es creciente, se dice que las parametrizaciones φ y ψ conservan la orientación de la curva.

- Si λ es decreciente, las parametrizaciones φ y ψ invierten la orientación de la curva.

Por ejemplo, las funciones

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi], \\ f_2(t) &= (\cos t, -\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi], \\ f_3(t) &= (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), \quad t \in [0, \pi], \end{aligned}$$

son equivalentes (todas ellas describen la circunferencia unidad), pero f_1 y f_3 hacen que la curva se recorra en sentido antihorario, y f_2 en sentido horario.

Las propiedades geométricas de una curva pueden describirse mediante las propiedades de la función que la describe. Definimos a continuación las principales operaciones con funciones vectoriales y enunciamos sus propiedades básicas, las cuales se aplican directamente al estudio de las curvas en el espacio.

Operaciones con funciones vectoriales.

Teniendo en cuenta el hecho de que toda función vectorial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se puede descomponer en n funciones escalares, se pueden definir las operaciones algebraicas con dichas funciones de manera análoga a las correspondientes con funciones escalares.

Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se definen

1. Suma: $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$.

2. Multiplicación por una función escalar: $uf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, como $(uf)(t) = u(t) \cdot f(t)$.

3. Producto escalar: $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, como $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$.
4. Producto vectorial (para $n = 3$): $f \times g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, como $(f \times g)(t) = f(t) \times g(t)$.
5. Composición: $f \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, como $(f \circ u)(t) = f(u(t))$.

Límites y continuidad de funciones vectoriales.
Si $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, se define

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \dots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right).$$

Una función vectorial es *continua* en t_0 si $\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$.

Derivación de funciones vectoriales.
Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es *derivable* en t_0 si existe

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Si f es derivable en t, entonces

$$\frac{df}{dt} = f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t)).$$

Dada una curva $r(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, el vector $r'(t)$ (caso de ser no nulo) recibe el nombre de *vector tangente* a la curva. Si $r'(t) = 0$, no se define el vector tangente (en este caso el móvil está en reposo y puede haber un cambio brusco de dirección).

Denotamos por $T(t) = r'(t)/|r'(t)|$ al *vector tangente unitario.*

Llamamos también *recta tangente* a la curva r en P_0 a la recta que pasa por el punto $P_0 = r(t_0)$ y tiene la dirección del vector $r'(t_0)$. Su ecuación es, por tanto, $f(\lambda) = r(t_0) + \lambda \cdot r'(t_0)$.

Observemos que el concepto de vector unitario tangente no depende de la parametrización, pues si φ y ψ son parametrizaciones distintas de la misma curva, entonces $\psi \circ \lambda = \varphi$, de modo que

$$\varphi'(t) = \psi'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) \Longrightarrow \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} = \frac{\psi'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)}{|\psi'(\lambda(t))| \cdot |\lambda'(t)|} = \pm \frac{\psi'(\lambda(t))}{|\psi'(\lambda(t))|},$$

donde el signo indica sólo si las parametrizaciones mantienen o invierten la orientación de la curva.

Ejemplos.

1. Si $r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ es una recta, su recta tangente coincide con la propia recta r.

2. Si $|r(t) - C| = a$ es la ecuación de una circunferencia (con centro C y radio a), la recta tangente en un punto $P = r(t)$ es perpendicular a $r(t) - C$ (vector que une el punto P con el centro C).

3. Si $r(t)$ representa el vector de posición (como función del tiempo t) de una partícula móvil en el espacio, entonces $v(t) = r'(t)$ y $a(t) = r''(t)$ representan los vectores velocidad y aceleración de la partícula en el instante t, respectivamente. El vector velocidad tiene la dirección de la recta tangente a la curva.

Casos particulares (se deja como ejercicio la comprobación de los hechos que se citan):

a) El movimiento rectilíneo viene dado por el vector de posición $r(t) = \overrightarrow{P} + u(t) \cdot \overrightarrow{A}$, de modo que la velocidad $v(t) = u'(t) \cdot \overrightarrow{A}$ y la aceleración $a(t) = u''(t) \cdot \overrightarrow{A}$ tienen la misma dirección del movimiento.

b) El movimiento circular en el plano viene dado por $r(t) = (\rho \cos u(t), \rho \operatorname{sen} u(t))$. Entonces $|v(t)| = \rho |u'(t)|$, donde $|u'(t)|$ representa la velocidad angular. Por ejemplo, si $u(t) = \omega t$ $(\omega > 0)$, el movimiento tiene sentido contrario al de las agujas del reloj y $a(t) = -\omega^2 r(t)$ es un vector que tiene sentido contrario a $r(t)$ (de ahí que reciba el nombre de aceleración centrípeta).

c) El movimiento helicoidal viene definido por el vector de posición

$$r(t) = (a \cos \omega t, a \operatorname{sen} \omega t, bt)$$

y representa una hélice circular en donde la componente z es proporcional al ángulo de giro $\vartheta = \omega t$ y la proyección sobre el plano XY es una circunferencia. En este caso, el vector aceleración $a(t) = -\omega^2 (a \cos \omega t, a \operatorname{sen} \omega t, 0)$ es paralelo al plano XY y va dirigido hacia el eje Z. Además, los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares en todos los puntos del recorrido.

Propiedades. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son derivables, además de las propiedades análogas a las correspondientes con funciones escalares, se verifican las siguientes:

1. $\dfrac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$.

2. $\dfrac{d}{dt}(f(t) \times g(t)) = f(t) \times g'(t) + f'(t) \times g(t)$.

3. $\dfrac{d}{dt}(f(u(t)) = u'(t) \cdot f'(u(t))$.

4. Si f es derivable y tiene longitud constante en un intervalo abierto I, entonces $f(t) \cdot f'(t) = 0$, $\forall t \in I$. (Basta observar que $|f(t)|^2 = f(t) \cdot f(t) = c$.)

Integración de funciones vectoriales.

Una función vectorial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es *integrable* cuando lo son todas sus componentes. Se define así:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_n(t)\,dt \right).$$

Propiedades.

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua en $\mathbb{R}$ y $g(t) = \displaystyle\int_a^t f(s)\,ds$, entonces g es derivable y $g'(t) = f(t)$, $\forall t$.

2. Si f y $|f|$ son integrables en $[a, b]$, entonces $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.

Longitud de arcos de curvas.

Una función vectorial $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se dice que es *regular* si $\varphi \in C^{(1)}([a, b])$ y $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$.

Llamamos entonces una *curva regular* la que admite alguna parametrización regular. En general, una *curva regular a trozos* es aquella que admite una parametrización φ regular a trozos, es decir cuando existe una partición P de $[a, b]$ tal que la restricción de φ a cada subintervalo abierto de P es regular. Por ejemplo, la poligonal $\varphi(t) = (t, |t - 1|)$, $t \in [0, 2]$, y la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ son curvas regulares a trozos.

Una aplicación $\lambda : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ es un *cambio regular de parámetro* si

i) λ es biyectiva.

ii) $\lambda \in C^{(1)}[a, b]$.

iii) $|\lambda'(t)| > 0$, $\forall t \in (a, b)$.

Por ejemplo, $\varphi(t) = (t^3+1, |t^3|)$, $t \in [-1,1]$, y $\psi(t) = (t, |t-1|)$, $t \in [0,2]$, son parametrizaciones de la curva $y = |x-1|$ y la función $\lambda(t) = t^3+1$, $t \in [-1,1]$ no es un cambio regular pues $\lambda'(0) = 0$.

Esto es debido a que φ no es una parametrización regular pues $\varphi'(0) = (0,0)$.

Proposición. *Sean φ, ψ dos parametrizaciones equivalentes, con $\psi \circ \lambda = \varphi$.*

a) Si ψ es regular y λ un cambio regular de parámetro, entonces φ es regular.

b) Si φ, ψ son regulares, entonces λ es un cambio regular.

La curva C es *simple* cuando φ es inyectiva (salvo quizás en los extremos). Así, por ejemplo, la curva definida por la función $\varphi_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$, es simple pero si definimos $\varphi_2(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, entonces la curva obtenida no es simple.

Dada una curva C con vector de posición $r(t)$, se define la *longitud de arco de curva* entre los puntos $r(a)$ y $r(b)$ al supremo de las longitudes de las poligonales inscritas a la curva entre dichos puntos, caso de existir. En este caso, se dice que la curva es *rectificable*. De forma más precisa, podemos dar la siguiente definición.

Definición. Dada una función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, se llama *variación de φ con respecto a una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$* de $[a,b]$ a

$$V(\varphi, P) = \sum_{i=1}^{m} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|.$$

Llamamos *variación total de φ en* $[a,b]$ a

$$V(\varphi) = \sup_P V(\varphi, P),$$

caso de que exista. La función φ es de *variación acotada* cuando $V(\varphi) < \infty$. En este caso escribiremos $\varphi \in \mathrm{VA}[a,b]$.

Por la propia definición, es claro que $\ell(C) = V(\varphi)$.

Propiedades.

1. $\varphi \in \mathrm{VA}[a,b]$ si y sólo si cada una de sus componentes es de variación acotada en $[a,b]$.

   Basta observar que

$$|\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})|^2 \le |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1})| \right)^2.$$

2. Si φ, ψ son continuas, entonces son equivalentes si y sólo si $V(\varphi) = V(\psi)$.

Lema. *Si C es una curva rectificable y $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización de C, entonces*

$\forall \varepsilon, \delta > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ con diámetro menor que δ tal que $|\ell(C) - V(\varphi, P)| < \varepsilon$.

Teorema. *Si C es una curva regular, entonces es rectificable y su longitud es*

$$\ell(C) = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt,$$

donde $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de C.
Si una curva es regular a trozos, su longitud se calcula sumando las longitudes de cada tramo regular.

Demostración. La función $|\varphi'(t)|$ es continua, por tanto integrable.
Si llamamos $\ell^* = \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt$, debemos probar que $|\ell(C) - \ell^*| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.
Por una parte, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que, si P' es una partición de diámetro menor que δ', $P' = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ y $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ es arbitrario,

$$|\ell^* - \sum_{i=1}^m |\varphi'(\tau_i)| \cdot (t_i - t_{i-1})| < \varepsilon/3.$$

Por otra parte, si $\sigma/2 = \text{mín}_{a \le t \le b} |\varphi'(t)|$, como $|\varphi'(t)| > 0$, para todo t, entonces $\sigma > 0$.
Las componentes φ'_j son uniformemente continuas en $[a,b]$. Por tanto, existe $\delta_j > 0$ tal que

$$|(\varphi'_j(t'))^2 - (\varphi'_j(t''))^2| < \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{6n(b-a)}, \quad \text{si } |t' - t''| < \delta_j.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta', \delta_1, \dots, \delta_n\}$. Por el lema anterior, existe una partición P de diámetro menor que δ tal que

$$|\ell(C) - V(\varphi, P)| < \varepsilon/3.$$

Agrupando todo, resulta:

$$\begin{aligned}
|\ell(C)-\ell^*| &\leq |\ell(C)-V(\varphi,P)| + \left|V(\varphi,P)-\sum_{i=1}^m |\varphi'(\tau_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})\right| \\
&+ \left|\sum_{i=1}^m |\varphi'(\tau_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})-\ell^*\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{i=1}^m \left[|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|-|\varphi'(\tau_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})\right]\right| + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Para acotar el término intermedio, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^m \left[|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|-|\varphi'(\tau_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})\right]\right| \\
=& \left|\sum_{i=1}^m \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t_i)-\varphi_j(t_{i-1})|^2} - |\varphi'(\tau_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})\right)\right| \\
=& \left|\sum_{i=1}^m \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j'(s_i)|^2} - |\varphi'(\tau_i)|\right)\cdot(t_i-t_{i-1})\right| \\
=& \left|\sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n (|\varphi_j'(s_i)|^2-|\varphi_j'(\tau_i)|^2)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n |\varphi_j'(s_i)|^2}+|\varphi'(\tau_i)|}\cdot(t_i-t_{i-1})\right| \\
\leq& \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\sigma\varepsilon}{6n(b-a)}}{\sigma/2}\cdot(t_i-t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo. La curva $f:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(t)=(t, t\cos\pi/(2t))$ no es rectificable.

Para comprobarlo, basta elegir la partición $P=\{0, 1/(2n), 1/(2n-1), \dots, 1/2, 1\}$.

Parámetro arco.

La longitud de arco permite definir una parametrización "natural" de las curvas. Sea pues C una curva regular y $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una parametrización regular de C. Si llamamos ℓ a la longitud de C, podemos definir $s:[a,b]\to[0,\ell]$ como

$$s(t)=\int_a^t |\varphi'(u)|\,du.$$

Claramente, $s(a) = 0$ y $s(b) = \ell$. Por el teorema fundamental del cálculo integral, $s'(t) = |\varphi'(t)| > 0$, de modo que s es una función creciente y representa un cambio regular de parámetro. Definimos entonces la parametrización $\chi : [0, \ell] \to \mathbb{R}^n$ por $\chi = \varphi \circ s^{-1}$, la cual recibe el nombre de *representación paramétrica intrínseca* de la curva C.

Es fácil demostrar ahora que $|\chi(u)| = 1$, $\forall u \in [0, \ell]$ (el vector tangente es unitario en todo el recorrido de la curva).

En efecto, como $\chi = \varphi \circ s^{-1}$, entonces

$$\chi'(u) = \varphi'(s^{-1}(u)) \cdot (s^{-1})'(u) = \frac{\varphi'(s^{-1}(u))}{s'(s^{-1}(u))} = \frac{\varphi'(s^{-1}(u))}{|\varphi'(s^{-1}(u))|}.$$

Ejemplo. Si $\varphi(t) = (\cos mt, \operatorname{sen} mt)$ ($0 \le t \le 2\pi$, $m \in \mathbb{N}$), entonces $|\varphi'(t)| = m$, para todo t. Basta definir $s(t) = mt$; de este modo, $s^{-1}(u) = u/m$ y $\chi(u) = \varphi(u/m) = (\cos u, \operatorname{sen} u)$ es la representación intrínseca de la curva.

Ejercicio.

Identificar y calcular la longitud de las curvas definidas por las funciones siguientes:

(a) $\varphi(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$, $t \in [-5/2, 5/2]$.

(b) $\varphi(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right)$, $t \in [-1, 1]$.

(c) $\varphi(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(d) $\varphi(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(e) $\varphi(t) = (|t|, |t - 1/2|)$, $t \in [-1, 1]$.

(f) $\varphi(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$, en $[0, t]$.

(g) $\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, en $[0, t]$.