Cambio de variables en la integral múltiple.

En este apartado vamos a generalizar la fórmula

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

al caso de funciones de n variables. Como la región de integración ya no será un simple intervalo, necesitamos estudiar cómo se transforman regiones en $\mathbb{R}^n$ mediante cambios de variable.
En primer lugar, observaremos que las imágenes de conjuntos con contenido bajo funciones de clase $C^{(1)}$ tienen tamaño comparable a los de los conjuntos originales.

Lema 1. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω. Sea A un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$. Entonces existen un abierto acotado Ω_1, con $\overline{A} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$, y una constante $M > 0$ tales que, si $A \subset \cup_{j=1}^p I_j$, donde I_j son n-cubos cerrados de Ω_1 con $\displaystyle\sum_{j=1}^p c(I_j) \le \alpha$, entonces $\varphi(A) \subset \cup_{k=1}^m J_k$, donde J_k son n-cubos cerrados y $\displaystyle\sum_{k=1}^m c(J_k) \le M\cdot\alpha$.*

Demostración. Definimos en primer lugar
$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \Omega = \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{2}\,\text{ínf}\{\|a-x\| : a \in \overline{A}, x \notin \Omega\} & \text{si } \Omega \neq \mathbb{R}^n. \end{cases}$ Como $\overline{A}$ es compacto, $\delta > 0$.
Sea ahora $\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-a\| < \delta, \text{ para algún } a \in A\}$. Así, Ω_1 es abierto y acotado. Además $\overline{A} \subset \Omega_1$ y $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$.
Como $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$ y $\overline{\Omega_1}$ es compacto, existe $M_0 = \sup\{\|D\varphi(x)\| : x \in \Omega_1\} < \infty$.
Si $A \subset \bigcup_{j=1}^p I_j$, entonces $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le M_0\|x-y\|$, $\forall x,y \in I_j$.
Si las aristas de I_j miden $2r_j$ y x es el centro de I_j, $\forall y \in I_j$, $\|x-y\| \le \sqrt{n}\cdot r_j$, de donde $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le \sqrt{n}\cdot M_0\cdot r_j$, es decir $\varphi(I_j)$ está contenido en un n-cubo de lado $2M_0 r_j$. Por lo tanto, $\varphi(A) \subset \bigcup J_k$, con $\sum c(J_k) \le M\cdot\alpha$. □

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω. Sea A un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$. Si A tiene contenido cero, entonces $\varphi(A)$ tiene contenido cero.*

También podemos concluir fácilmente que la imagen de un conjunto acotado de dimensión menor a la del espacio tiene contenido cero.

Corolario 2. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^r$ $(r < n)$ y $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω. Si A es un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$, entonces $\psi(A)$ tiene contenido cero.*

Demostración. Si llamamos $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}^{n-r}$, entonces Ω_0 es abierto en $\mathbb{R}^n$.
Si definimos $\varphi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_r)$, entonces $\varphi \in C^{(1)}(\Omega_0)$.
Sea ahora $A_0 = A \times \{0, \dots, 0\}$. Entonces $\overline{A_0} \subset \Omega_0$ y A_0 tiene contenido cero en $\mathbb{R}^n$.
Entonces $\psi(A) = \varphi(A_0)$ tiene contenido cero en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Con este resultado sabemos que, si A es un conjunto con contenido y $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$, con $\overline{A} \subset \Omega$, entonces $\varphi(\operatorname{fr}(A))$ tiene contenido cero. Queremos también que $\operatorname{fr}(\varphi(A))$ tenga contenido cero y estudiaremos a continuación cuándo ocurre.

Lema 2. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω. Si A es un conjunto con contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \operatorname{int}(A)$, entonces $\varphi(A)$ tiene contenido.*

Demostración. Como $\overline{A}$ es compacto y φ es continua, entonces $\varphi(\overline{A})$ es compacto, con lo que $\varphi(A)$ es acotado.
Si probamos que $\operatorname{fr}\varphi(A) \subset \varphi(\operatorname{fr}(A))$ y que $\varphi(\operatorname{fr}(A))$ tiene contenido cero, tendremos que $\operatorname{fr}\varphi(A)$ tiene contenido cero, lo que significa que $\varphi(A)$ tiene contenido.
Por una parte, como $\varphi(\overline{A})$ es compacto, $\operatorname{fr}(\varphi(A)) \subset \varphi(\overline{A}) = \varphi(\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}(A))$. Así pues, si $y \in \operatorname{fr}(\varphi(A))$, existe $x \in \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{fr}(A)$ tal que $y = \varphi(x)$.
Si estuviera x en el interior de A, por hipótesis $J_\varphi(x) \neq 0$, con lo que $y = \varphi(x)$ sería un punto interior de $\varphi(\operatorname{int}(A))$ y también un punto interior de $\varphi(A)$, lo que contradice la suposición dada.
Obtenemos así que $\operatorname{fr}(\varphi(A)) \subset \varphi(\operatorname{fr}(A))$.
Por otra parte, como A tiene contenido, $\operatorname{fr}(A) \subset \Omega$ es cerrado y tiene contenido cero, de donde $\varphi(\operatorname{fr}(A))$ tiene contenido cero. $\square$

Corolario. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y de clase $C^{(1)}$ en Ω. Si A tiene contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \operatorname{int}(A)$, entonces $\operatorname{fr}(\varphi(A)) = \varphi(\operatorname{fr}(A))$.*

Demostración. Basta probar que $\varphi(\operatorname{fr}(A)) \subset \operatorname{fr}(\varphi(A))$. Para ello, sea $x \in \operatorname{fr}(A)$. Existen dos sucesiones $(x_n) \subset A$, $(y_n) \subset \Omega \setminus A$ que convergen a x. Como φ es continua, las sucesiones $(\varphi(x_n))$ y $(\varphi(y_n))$ convergen a $\varphi(x)$. Como φ es inyectiva, $\varphi(y_n) \notin \varphi(A)$, de modo que $\varphi(x) \in \operatorname{fr}(\varphi(A))$. $\square$

Transformaciones lineales.

Veremos a continuación que conjuntos con contenido se transforman mediante aplicaciones lineales en conjuntos con contenido, y dicho contenido es un múltiplo del original. Además este múltiplo es el valor absoluto del determinante de la aplicacion.

Teorema. *Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto con contenido, entonces $c(L(A)) = |\det L| \cdot c(A)$.*

Demostración. Si L es singular, $\det L = 0$ y la imagen $R(L) \neq \mathbb{R}^n$. Esto indica que $R(L)$ es la imagen de alguna aplicación $L' : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, con $k < n$. Por tanto, $c(L(A)) = 0$.
Si L no es singular, $\det L \neq 0$. Como A tiene contenido, $L(A)$ tiene contenido. Para cada conjunto con contenido, definimos la aplicación $\lambda(A) = c(L(A))$. Dicha aplicación tiene las siguientes propiedades elementales:
i) $\lambda(A) \geq 0, \ \forall A$.
ii) $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
iii) $\lambda(x + A) = \lambda(A)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
iv) Si $A \subset B$, entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
Si llamamos $K_0 = [0,1)^n$ al n-cubo unidad y $m_L = \lambda(K_0)$, las propiedades anteriores permiten probar que $\lambda(A) = m_L \cdot c(A)$, para todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$.
Por otra parte, si M es otra aplicación lineal no singular, entonces

$$m_{L\circ M} \cdot c(A) = c((L \circ M)(A)) = c(L(M(A))) = m_L \cdot c(M(A)) = m_L \cdot m_M \cdot c(A).$$

Teniendo en cuenta que toda aplicación lineal no singular es composición (más o menos iterada) de dos tipos especiales:
a) $L_1(x_1, \dots x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n)$,
b) $L_2(x_1, \dots x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)$,
basta probar que $m_L = |\det L|$ en estos casos para que la propiedad sea cierta en el caso general.

a) Si $\alpha > 0$, $L_1(K_0) = [0,1) \times \cdots \times [0,\alpha) \times \cdots \times [0,1)$, de donde $\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} \cdot c(K_0) = m_{L_1}$.

   Si $\alpha < 0$, $L_1(K_0) = [0,1) \times \cdots \times (\alpha, 0] \times \cdots \times [0,1)$, de donde $-\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} \cdot c(K_0) = m_{L_1}$.

   De cualquier manera, $|\alpha| = m_{L_1} = |\det L_1|$.

b) Sean $\Delta_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in K_0 : x_i < x_j\}$ y $\Delta_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in K_0 : x_i \geq x_j\}$. De este modo, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ y $K_0 = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Además $L_2(K_0) = \Delta_2 \cup \{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \Delta_1\}$.

   Por tanto, $c(L_2(K_0)) = c(\Delta_2) + c(\{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \Delta_1\}) = c(\Delta_2) + c(\Delta_1) = c(K_0)$, de donde $m_{L_2} = 1 = |\det L_2|$.

□

Transformaciones no lineales.

Lema. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un n-cubo cerrado con centro el origen. Sea Ω un abierto que contiene a K. Sea $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y de clase $C^{(1)}$ en Ω. Supongamos que $J_\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in K$ y $\|\psi(x) - x\| \leq \alpha \|x\|$, $\forall x \in K$, donde $0 < \alpha < 1/\sqrt{n}$. Entonces*

$$(1 - \alpha\sqrt{n})^n \leq \frac{c(\psi(K))}{c(K)} \leq (1 + \alpha\sqrt{n})^n.$$

Demostración. Como K tiene contenido, $\psi(K)$ tiene contenido. Además $\partial(\psi(K)) = \psi(\partial K)$.
Si los lados de K tienen longitud $2r$ y $x \in \partial K$, entonces $r \leq \|x\| \leq r\sqrt{n}$. Por hipótesis, deducimos que $\|\psi(x) - x\| \leq \alpha\|x\| \leq \alpha \cdot r \cdot \sqrt{n}$. Por tanto, el conjunto $\psi(\partial K)$ no intersecta un cubo abierto C_i de centro O y lados de longitud $2(1 - \alpha\sqrt{n}) \cdot r$.
Si llamamos $A = \operatorname{int} \psi(K)$, $B = \operatorname{ext} \psi(K)$, A y B son abiertos, disjuntos, no vacíos con $A \cup B = \mathbb{R}^n \setminus \partial(\psi(K))$.
Como C_i es conexo, $C_i \subset A$ ó $C_i \subset B$. Pero $O \in C_i \cap A$, de donde $C_i \subset A \subset \psi(K)$.
Análogamente se prueba que, si C_0 es el cubo cerrado de centro el origen y lados $2(1 + \alpha\sqrt{n})r$, entonces $\psi(K) \subset C_0$.

$\square$

Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(1)(\Omega)$, φ inyectiva, $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Si A tiene contenido y $\overline{A} \subset \Omega$, dado $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\gamma > 0$ tal que, si K es un n-cubo cerrado de centro $x \in A$ y lados de longitud menor que 2γ, entonces*

$$|J_\varphi(x)| \cdot (1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\varphi(K))}{c(K)} \leq |J_\varphi(x)| \cdot (1 + \varepsilon)^n.$$

Demostración. En primer lugar, construimos δ y Ω_1 como en el lema 1. Como $\det D\varphi(x) = J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$, entonces existe $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$ y además $\det L_x = 1/J_\varphi(x)$, $x \in \Omega$.
Como los elementos de la matriz L_x son funciones continuas, por la compacidad de $\overline{\Omega_1}$, existe $M > 0$ tal que $\|L_x\| \leq M$, $\forall x \in \Omega_1$.
Sea $\varepsilon \in (0,1)$. Por la continuidad uniforme de D_φ en Ω_1, existe $\beta \in (0, \delta/2)$ tal que,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \beta \Longrightarrow \|D\varphi(x_1) - D\varphi(x_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}.$$

Dado $x \in A$, si $\|z\| \leq \beta$, es claro que $x \in \Omega_1, x + z \in \Omega_1$. Además,

$$\|\varphi(x+z) - \varphi(x) - D\varphi(x)(z)\| \leq \|z\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D\varphi(x + tz) - D\varphi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \cdot \|z\|.$$

Si definimos $\psi(z) = L_x(\varphi(x+z) - \varphi(x))$, de esta desigualdad se deduce:

$$\|\psi(z) - z\| = \|L_x(\varphi(x+z) - \varphi(x) - L_x D\varphi(x)(z)\| \leq \|L_x\| \cdot \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \cdot \|z\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|z\|}{\sqrt{n}},$$

si $\|z\| \leq \beta$.
Aplicamos el lema anterior con $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Entonces, si K_1 es un cubo cerrado con centro O y contenido en la bola abierta de radio β, entonces

$$(1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\psi(K_1))}{c(K_1)} \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

Por la definición de ψ, si $K = x+K_1$, K es un cubo cerrado de centro x y $c(K) = c(K_1)$. Además

$$c(\psi(K_1)) = |\det L_x| \cdot c(\varphi(x+K_1) - \varphi(x)) = \frac{1}{|J_\varphi(x)|} \cdot c(\varphi(K)).$$

Si los lados de K tienen arista menor que 2γ ($\gamma = \beta/\sqrt{n}$), el teorema se cumple. $\square$

Teorema del cambio de variable.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$, φ inyectiva, $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Si A tiene contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, entonces

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) \cdot |J_\varphi|.$$

Demostración. Debido a la continuidad de los integrandos, ambas integrales existen. Si hacemos $f = f^+ - f^-$, con $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$, $f^- = -\dfrac{f-|f|}{2}$, por la linealidad de la integral, basta hacer la demostración para funciones no negativas.
Definimos Ω_1 como en el lema 1 y definimos también

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \sup\{\|D_\varphi(x)\| : x \in \Omega_1\} \\ M_f &= \sup\{f(y) : y \in \varphi(A)\} \\ M_J &= \sup\{|J_\varphi(x)| : x \in A\} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon \in (0,1)$, I un n-intervalo que contiene a A y $\{K_i : i = 1, \dots, M\}$ una partición de I en cuadrados con aristas de longitud menor que 2γ, con γ definido como en el teorema del jacobiano.
Sean $\{K_1, \dots, K_m\}$ los cuadrados completamente contenidos en A, $\{K_{m+1}, \dots, K_p\}$ los que tienen puntos dentro y fuera de A y $\{K_{p+1}, \dots, K_M\}$ los contenidos en el complementario de A.
Como A tiene contenido, se pueden elegir de modo que

$$c(A) \leq \sum_{i=1}^{m} c(K_i) + \varepsilon, \quad \sum_{i=m+1}^{p} c(K_i) < \varepsilon.$$

Sea $B = K_1 \cup \cdots \cup K_m$; como $c(A \setminus B) = c(A) - c(B) < \varepsilon$, tenemos:

$$\left| \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right| = \left| \int_{A \setminus B} (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right| \leq M_f \cdot M_J \cdot c(A \setminus B) < M_f \cdot M_J \cdot \varepsilon.$$

Por el lema 1, $c(\varphi(A \setminus B)) \leq K \cdot \varepsilon$, de donde

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| = \left| \int_{\varphi(A \setminus B)} f \right| \leq M_f \cdot K \cdot \varepsilon.$$

Si x_i es el centro de K_i ($i = 1, \ldots, m$), por el teorema del jacobiano,

$$|J_\varphi(x_i)| \cdot (1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\varphi(K_i))}{c(K_i)} \leq |J_\varphi(x_i)| \cdot (1 + \varepsilon)^n.$$

Como $0 < \varepsilon < 1$, $1 - 2^n \cdot \varepsilon \leq (1 - \varepsilon^n)$ y $(1 + \varepsilon^n) \leq 1 + 2^n \cdot \varepsilon$. Por tanto,

$$|c(\varphi(K_i)) - |J_\varphi(x_i) \cdot c(K_i)| \leq c(K_i) \cdot M_J \cdot 2^n \cdot \varepsilon.$$

Por la continuidad de las funciones sobre el compacto B, podemos suponer que, dado cualquier $y_i \in K_i$,

$$\left| \int_B (f \circ \varphi)|J_\varphi| - \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i)|J_\varphi(x_i)| \cdot c(K_i) \right| < \varepsilon \cdot c(B).$$

Como φ es inyectiva, dos conjuntos de la familia $\{\varphi(K_i) : i = 1, \ldots, m\}$ se intersectan en $\varphi(K_i \cap K_j)$ que tiene contenido cero pues $c(K_i \cap K_j) = 0$.
Como $\varphi(K_i)$ tiene contenido, f es integrable en $\varphi(K_i)$. Entonces

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} \int_{\varphi(K_i)} f.$$

Como f es acotada y continua en $\varphi(K_i)$, existe $p_i \in \varphi(K_i)$ tal que

$$\int_{\varphi(K_i)} f = f(p_i) \cdot c(\varphi(K_i)), \; i = 1, \ldots, m.$$

Por ser φ inyectiva, existe un único $y_i \in K_i$ tal que $\varphi(y_i) = p_i$. Entonces

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(\varphi(K_i)).$$

Al ser $(f \circ \varphi)(y_i) \geq 0$, resulta

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(\varphi(K_i)) - \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) \cdot |J_\varphi(x_i)| \cdot c(K_i) \\
\leq \quad & M_J 2^n \varepsilon \sum_{i=1}^{m} (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(K_i) \\
\leq \quad & M_J M_f 2^n \varepsilon \sum_{i=1}^{m} c(K_i) \leq M_J M_f 2^n c(A) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Combinando las últimas desigualdades, obtenemos:

$$\left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right| \le \varepsilon \cdot c(A)(1 + M_J M_f 2^n).$$

En definitiva,

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi)|J_\varphi| \right| \le M_f \cdot K \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot c(A)(1 + M_J M_f 2^n) + M_f \cdot M_J \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

Ejemplos.

1) $\displaystyle\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_{A'} f(r\cos\vartheta, r\,\mathrm{sen}\,\vartheta) r\, drd\vartheta.$

2) $\displaystyle\iiint_A f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{A'} f(r\cos\vartheta, r\,\mathrm{sen}\,\vartheta, z) r\, drd\vartheta dz.$

3) $\displaystyle\iiint_A f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{A'} f(\rho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho d\vartheta d\varphi.$

4) $\displaystyle\iint_A f(x+2y, 2x-3y)\, dxdy = \iint_{g(A)} \frac{1}{7} f(u,v) r\, dudv,\ \ g(x,y) = (x+2y, 2x-3y).$

Ejercicio.

(a) Probar que $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \pi.$

(b) Probar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

(c) Probar que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \pi^{n/2}.$

(d) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} dx$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2} dx$ $(t > 0)$.