

ANÁLISIS MATEMÁTICO I - 2º FÍSICA - Grupo 17
2 de Septiembre de 2003

1. **Se considera la superficie de ecuación**

$$x - y^2 + 2z - 2xyz + z^3 = 0.$$

(a) **¿Qué variables pueden despejarse en función de las demás en un entorno del origen?**

(b) **Calcular el plano tangente a la superficie en el origen.**

(a) Utilizamos el teorema de la función implícita. Para ello, consideramos la función de tres variables

$$f(x, y, z) = x - y^2 + 2z - 2xyz + z^3$$

y comprobamos si se verifican las condiciones de dicho teorema.

En primer lugar, la función es evidentemente de clase $C^{(1)}$ en todo \mathbb{R}^3 y además $f(0, 0, 0) = 0$.

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2yz; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2xz; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 - 2xy + 3z^2.$$

Al sustituir en el origen, obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 2.$$

Esto significa que existen funciones $x = x(y, z)$, $z = z(x, y)$ de clase $C^{(1)}$ en un entorno del origen. Sin embargo, no se puede asegurar que exista una función $y = y(x, z)$ de clase $C^{(1)}$ en un entorno del origen.

(b) La ecuación del plano tangente a la superficie en un punto (x_0, y_0, z_0) tiene por ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Con los datos del apartado (a), nos queda la ecuación $x + 2z = 0$.

2. **Diseñar una lata cilíndrica cerrada de un litro de capacidad usando la mínima cantidad de material.**

La capacidad de la lata se mide a partir del volumen. En nuestro caso, si llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro, entonces $V = \pi r^2 h$. Esto nos da la condición $1 = \pi r^2 h$.

Por otra parte, la cantidad de material corresponde al área de la superficie del cilindro. En función de r y h , la superficie viene dada por la fórmula

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Debemos pues minimizar la función f sujeta a la restricción $1 = \pi r^2 h$.

Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, utilizamos la función auxiliar

$$f(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda(1 - \pi r^2 h)$$

y resolvemos el sistema que resulta de anular las derivadas parciales de primer orden:

$$\begin{aligned} 0 &= 4\pi r + 2\pi h + 2\pi r h \lambda \\ 0 &= 2\pi r + \pi r^2 \lambda \\ 0 &= 1 - \pi r^2 h. \end{aligned}$$

La solución del sistema nos da los valores $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$, $h = \sqrt[3]{4/\pi}$ que debe tener la lata con menor cantidad de material.

3. Sea Q un sólido definido por

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$$

cuya densidad es $\rho(x, y, z) = xyz$.

(a) Determinar la masa del sólido.

(b) Calcular el área de la cara inferior del sólido Q .

El sólido está limitado inferiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, superiormente por el plano $z = 2$ y lateralmente por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

(a) Para calcular la masa, integramos la densidad a lo largo del sólido:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^2 xyz dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 xy \frac{4 - x^2 - y^2}{2} dy = \int_0^1 \frac{x}{2} \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(b) La cara inferior del sólido es la sección del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ limitada por los planos verticales $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

A partir de la fórmula

$$S = \iint_R \sqrt{1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2} dx dy,$$

resulta

$$S = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dy = \sqrt{2}.$$

4. Dado el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2),$$

calcular la integral de superficie $\iint_S \text{rot } F dS$, donde S es el trozo de paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$, con $z \geq 0$ tomado con la normal hacia arriba.

La frontera del paraboloides consiste en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ contenida en el plano $z = 0$. Como la superficie es regular y la función de clase $C^{(1)}$, podemos aplicar el teorema de Stokes, de modo que:

$$\iint_S \text{rot } F dS = \int_C F ds.$$

Si parametrizamos la curva C como $\sigma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$, la integral queda:

$$\iint_S \text{rot } F dS = \int_0^{2\pi} (0, 4 \cos^2 t, 4 \sin^2 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt = \int_0^{2\pi} 8 \cos^3 t dt = 0.$$

5. (a) Calcular

$$\int_C (2xe^{2y}, 2x^2e^{2y} + 2y \operatorname{tg} z, -y^2 \sec^2 z) ds,$$

donde C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = y$, recorrida en sentido antihorario.

(b) Dibujar la región de integración y resolver la siguiente integral:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^x xy dy + \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy.$$

(a) Comprobamos que el campo vectorial es conservativo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 4xe^{2y} & ; & & \frac{\partial Q}{\partial x} &= 4xe^{2y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0 & ; & & \frac{\partial R}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= -2y \sec^2 z & ; & & \frac{\partial R}{\partial y} &= -2y \sec^2 z. \end{aligned}$$

Esto significa que la integral es independiente del camino. Como la curva es cerrada, el valor de la integral es cero.

(b) La región de integración es la unión de las regiones correspondientes a cada sumando. De este modo la gráfica corresponde a un sector de corona circular comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, y el ángulo comprendido entre 0 y $\pi/4$. Esto sugiere calcular la integral pasando a coordenadas polares, de modo que su valor es:

$$I = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^2 \rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta d\rho = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \vartheta d(\operatorname{sen} \vartheta) \int_1^2 \rho^3 d\rho = \frac{15}{16}.$$