ANÁLISIS MATEMÁTICO I - 2º FÍSICA - Grupo 17

16 de Septiembre de 2002

1. **Averiguar si el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x \end{cases}$$

define implícitamente una función $u = u(x,y), \quad v = v(x,y)$ **en algún entorno del punto** $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 2, 0, 0)$.

En caso afirmativo, calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}(P_0), \dfrac{\partial u}{\partial y}(P_0), \dfrac{\partial v}{\partial x}(P_0), \dfrac{\partial v}{\partial y}(P_0)$**.**

Consideramos la función vectorial

$$(F,G)(x,y,u,v) = (xe^{u+v} + 2uv - 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x)$$

y comprobamos las condiciones del teorema de la función implícita:

a) $(F,G)(P_0) = (0,0)$.

b) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix}$

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

c) $F, G \in C^{(1)}$ en un entorno de P_0.

Para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}(P_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(P_0)$, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial x} = e^{u+v} + x\frac{\partial u}{\partial x}e^{u+v} + x\frac{\partial v}{\partial x}e^{u+v} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} + 2v\frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial G}{\partial x} = ye^{u-v} - y\frac{\partial v}{\partial x}e^{u-v} - \frac{(1+v)\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{(1+v)^2} - 2. \end{aligned}$$

Al sustituir lo anterior en el punto P_0, queda el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} &= 2 \end{aligned}$$

cuya solución es $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$.

Análogamente, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} = xe^{\frac{\partial u}{\partial y}}e^{u+v} + x\frac{\partial v}{\partial y}e^{u+v} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\frac{\partial y}{\partial x}} \\ 0 &= \frac{\partial G}{\partial y} = e^{u-v} + y\frac{\partial u}{\partial y}e^{u-v} - y\frac{\partial v}{\partial y}e^{u-v} - \frac{(1+v)\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}}{(1+v)^2}, \end{aligned}$$

el cual, al sustituir en el punto P_0, conduce al sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial y} &= -1 \end{aligned}$$

cuya solución es $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-1}{3}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{3}$.

2. **Determinar los puntos de la curva C intersección de las superficies**

$$C:\begin{cases} z^2-zx+x^2-y^2=1 \\ z^2+x^2=1 \end{cases}$$

más próximos al origen.

Debemos minimizar la función distancia, o mejor aún, el cuadrado de la distancia $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} h(x,y,z) &= z^2-zx+x^2-y^2-1 \\ g(x,y,z) &= z^2+x^2-1. \end{aligned}$$

Sabemos que los puntos que minimizan dicha distancia están entre los puntos solución del sistema

$$\nabla f=\lambda\nabla h+\mu\nabla g.$$

Debemos pues resolver el sistema

$$\begin{aligned} -2x &= -\lambda z+2\lambda x+2\mu x \\ 2y &= -2\lambda y \\ 2 &= 2\lambda z-\lambda x+2\mu z \\ z^2-zx+x^2-y^2-1 &= 0 \\ z^2+x^2-1 &= 0 \end{aligned}$$

que tiene por solución los puntos $(\pm 1,0,0)$, $(0,0,\pm 1)$, $(\sqrt{1/2},\pm\sqrt{1/2},-\sqrt{1/2}$, $(-\sqrt{1/2},\pm\sqrt{1/2},\sqrt{1/2}$. Entre ellos, los cuatro puntos $(\pm 1,0,0)$, $(0,0,\pm 1)$ tienen distancia al origen igual a uno y el resto tiene distancia $\sqrt{3/2}$.

3. **Calcular** $\iiint_V ze^{-(x^2+y^2)}\,dxdydz$, **donde V está limitado por el cono** $2(x^2+y^2)=z^2$ **y el hiperboloide de dos hojas** $x^2+y^2=z^2-1$.

Si resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos su intersección, que consiste en las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, con $z = \pm\sqrt{2}$.

Escribimos la integral en coordenadas cilíndricas

$$\left.\begin{array}{r} x = u\cos v \\ y = u \,\mathrm{sen}\, v \\ z = z \end{array}\right\} \; 0 \leq u \leq 1, \; 0 \leq v \leq 2\pi, \; u\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{u^2+1}$$

con lo que resulta (teniendo en cuenta la simetría de la figura):

$$I = 2\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u du \int_{u\sqrt{2}}^{\sqrt{u^2+1}} ze^{-u^2} dz = 4\pi \int_0^1 ue^{-u^2} \frac{z^2}{2}\Big|_{u\sqrt{2}}^{\sqrt{u^2+1}} du = \cdots = \frac{\pi}{e}.$$

4. **Calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i} + (y^2 + e^{xz^2})\,\overrightarrow{j} + \mathrm{sen}(xy)\,\overrightarrow{k}$ a través de la cara exterior de la superficie limitada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 2$.**

   Aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss. Por tanto, debemos calcular la integral triple de la divergencia de F sobre el sólido limitado por la superficie dada.

   Al proyectar dicho sólido sobre el plano XZ, la integral queda:

$$\iint_S F dS = \iiint_V \mathrm{div}\, F dV = \iint_R \left(\int_0^{2-z} \mathrm{div}\, F dy\right) dxdz.$$

   Como $\mathrm{div}\, F = 3y$, resulta en definitiva:

$$\iint_R \left(\int_0^{2-z} \mathrm{div}\, F dy\right) dxdz = \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dz \int_0^{2-z} 3y dy = \cdots = 184/35.$$

5. **Escribir justificadamente la respuesta correcta a cada una de las siguientes cuestiones:**

   (5.1) **Sea F un campo conservativo, tal que $F = \nabla f$. Entonces**
   (a) $\mathrm{div}\, F = 0$. **(b)** $\mathrm{div}\, F = \mathrm{rot}(\nabla f)$. **(c)** $\mathrm{div}\, F = \Delta f$.
   Si $F = \nabla f$, entonces $F = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$. Por tanto,

$$\mathrm{div}\, F = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f) = \Delta f$$

   (la respuesta correcta es c).

   (5.2) **La integral $\iint_D x^2\, dxdy$ sobre $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ vale:**

   (a) $\displaystyle\int_0^2 du \Big(\int_0^{\sqrt{2u-u^2}} u^2\, dv\Big).$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dv \Big(\int_0^{2\cos v} 2u^3 \cos^2 v\, du\Big).$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dv\Big(\int_0^{2\cos v} u^3\cos^2 v\, du\Big)$.

En coordenadas polares, $D = \{(r,\vartheta) : -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 2\cos\vartheta\}$.
Por tanto,

$$\iint_D x^2 dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} r\cdot r^2\cdot\cos^2\vartheta dr = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta\int_0^{2\cos\vartheta} r^3\cos^2\vartheta dr$$

de modo que la respuesta correcta es (b).

(5.3) **La integral** $\displaystyle\int_C \overrightarrow{F}$**, donde** C **es la circunferencia de centro el origen y radio** 2 **orientada en el sentido antihorario y** $F(x,y) = \Big(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)$ **vale:**

(a) 0. **(b)** 2π. **(c)** -2π.

Si parametrizamos la curva C como $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$, entonces

$$\int_C \overrightarrow{F} = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{2}\sqrt{2}\operatorname{sen} t dt + \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}\sqrt{2}\cos t dt = 2\pi.$$