Se considera la función

$$F(x,y,z) = z - (x^2+y^2+1)\cdot e^z.$$

(a) Clasificar sus puntos estacionarios.

Resolvemos el sistema:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2xe^z = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2ye^z = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z = 0,$$

que da como única solución el punto estacionario $(0,0,0)$.
Calculamos a continuación el hessiano en dicho punto:

$$HF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2e^z & 0 & -2xe^z \\ 0 & -2e^z & -2ye^z \\ -2xe^z & -2ye^z & -(x^2+y^2+1)\cdot e^z \end{pmatrix} \Longrightarrow HF(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Como la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana es definida negativa, el origen corresponde a un máximo de la función.

(b) Estudiar si existe algún k tal que la ecuación $F(x,y,z)=k$ defina en un entorno de $(0,0,-1)$ una función $z=f(x,y)$.

Las condiciones para la existencia de función implícita son:

i) $F(0,0,-1)-k=0$:
Como $F(0,0,-1) = -1-e^{-1}$, basta elegir $k=-1-e^{-1}$.

ii) $F \in C^{(1)}(U)$, con U entorno de $(0,0,-1)$:
Siempre es cierto pues F es analítica (tiene derivadas parciales de cualquier orden continuas).

iii) $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-1) \neq 0$:
En efecto, $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,-1) = 1-e^{-1} \neq 0.$

(c) Comprobar que $f(x,y)$ tiene en $(0,0)$ un punto estacionario y clasificarlo.

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{-2xe^z}{1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{-2ye^z}{1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z},$$

es evidente que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

Además, si calculamos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{(2e^z + 2xe^z \cdot \partial f/\partial x)\cdot(1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z) - 2xe^z(-2xe^z - (x^2+y^2+1)\cdot e^z \cdot \partial f/\partial x)}{(1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2xe^z \cdot \partial f/\partial y \cdot (1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z) - 2xe^z(-2ye^z - (x^2+y^2+1)\cdot e^z \cdot \partial f/\partial y)}{(1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(2e^z + 2ye^z \cdot \partial f/\partial y)\cdot(1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z) - 2ye^z(-2ye^z - (x^2+y^2+1)\cdot e^z \cdot \partial f/\partial y)}{(1-(x^2+y^2+1)\cdot e^z)^2}$$

obtenemos que

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2e^{-1}/(1-e^{-1}) & 0 \\ 0 & 2e^{-1}/(1-e^{-1}) \end{pmatrix}$$

lo que significa que la función $f(x,y)$ alcanza un mínimo en $(0,0)$.

(d) Escribir el plano tangente a $z = f(x,y)$ en $(0,0,-1)$ y el polinomio de Taylor de segundo grado de $f(x,y)$ en un entorno de $(0,0)$.

Como hay un mínimo en el punto $(0,0)$, el plano tangente es horizontal. Su ecuación es $z=-1$. Si utilizamos la matriz hessiana obtenida en el apartado (c), el polinomio de Taylor de segundo grado es:

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2e^{-1}/(1-e^{-1}) & 0 \\ 0 & 2e^{-1}/(1-e^{-1}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{e-1}\cdot(x^2+y^2).$$

(e) Determinar los máximos y mínimos de $F(x,y,z)$ bajo las restricciones $x^2+y^2=1$, $x+z=1$.

Utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange, de modo que buscamos los puntos estacionarios de la función

$$h(x,y,z,\lambda,\mu) = z - (x^2+y^2+1)\cdot e^z - \lambda(x^2+y^2-1) - \mu(x+z-1).$$

Para ello debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} -2xe^z - -2\lambda x - \mu &= 0 \\ -2ye^z - 2\lambda y &= 0 \\ 1-(x^2+y^2+1)e^z - \mu &= 0 \\ x^2+y^2-1 &= 0 \\ x+z &= 0, \end{aligned}$$

el cual tiene como soluciones los puntos $P_1 = (1,0,0)$ y $P_2 = (-1,0,2)$.
Teniendo en cuenta que las restricciones corresponden a la curva de $\mathbb{R}^3$ que es intersección del cilindro $x^2+y^2=1$ y el plano $x+z=1$, dicha curva es precisamente una elipse (basta imaginar que el cilindro es un vaso de tubo lleno hasta la mitad e inclinado ligeramente, la figura que se observa en el borde es siempre una elipse). Como la elipse es una región compacta en el espacio

tridimensional, cualquier función continua (como la nuestra) debe alcanzar sus valores máximo y mínimo. Al no haber más puntos estacionarios, uno de ellos corresponde al máximo y el otro al mínimo. Como $F(P_1) = -2$ y $F(P_2) = 2 - 2e^2 < -2$, la función alcanza su máximo en P_1 y su mínimo en P_2.

Otro método para determinar los máximos y mínimos condicionados consiste en parametrizar la curva dada (por ejemplo, haciendo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = 1 - \cos t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$) y sustituir dichos valores en la función. En este caso, la función tiene ahora una sola variable y la determinación de sus valores máximo y mínimo es un problema de una variable.