ANÁLISIS DE VARIAS VARIABLES II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

21 de Septiembre de 2001

1.- Hallar el volumen del sólido limitado por el hiperboloide $4(x^2+y^2) = 1+4z^2$, el paraboloide $z = x^2+y^2$ y el plano $z = 0$.

2.- Aplicando el teorema de Green, calcular la diferencia entre las integrales de línea

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy, \quad I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

donde AmB es el segmento rectilíneo determinado por los puntos $A(1,1)$ y $B(2,6)$ y AnB es el arco de parábola con eje vertical que pasa por A, B y el origen de coordenadas.

3.- Calcular la integral $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F\cdot dS$, donde $F(x,y,z) = (y,z,xz)$, y $\partial\Omega$ es la frontera del sólido Ω definido por $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le z \le 1$, con $x \ge 0$ $(a > b > 0)$, orientada con la normal exterior.

4.- a) Sea Γ la curva intersección del plano $z = ax+by$ con el cilindro $x^2+y^2 = 1$. Hallar los valores de a y b que verifican $a^2+b^2 = 1$ y además

$$\oint_\Gamma y dx + (z-x)dy - ydz = 0.$$

b) Sea I el valor de la integral de $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ en la región
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \le 4,\ x \ge 2,\ y \ge 0\}$.
¿Cuál (o cuáles) de las siguientes afirmaciones es cierta?

i) $\displaystyle I = \int_0^2 dy \int_2^{4-y} f(x,y)\,dx.$

ii) $\displaystyle I = \int_2^4 dx \int_0^{4-x} f(x,y)\,dy.$

iii) $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{2/\cos\vartheta}^{\frac{4}{\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta}} \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta}\,dr.$

iv) $\displaystyle I = \int_2^4 dv \int_2^v \frac{1}{v}\,du$, con $u = x,\ v = x+y$.

c) Calcular $\displaystyle\int_C (e^x y - 3x^2\cos z)\,dx + e^x\,dy + x^3 \operatorname{sen} z\,dz$ a lo largo de la hélice de ecuación $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t$ desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(-1,0,\pi)$.

5.- Enunciar y demostrar el teorema de Stokes para gráficas.