Trayectorias y campos

1.- Dadas las siguientes trayectorias, calcular el vector velocidad $\sigma'(t)$ y $\sigma'(0)$:

a) $\sigma(t) = (\operatorname{sen} 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2)$.

b) $\sigma(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$.

2.- Dadas las siguientes trayectorias, calcular el vector velocidad y la ecuación de la recta tangente en el punto indicado:

a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ en $t = 0$.

b) $\sigma(t) = (0, 0, t)$ en $t = 1$.

c) $\sigma(t) = (2\cos t, -2\operatorname{sen} t, 3t)$ en $t = \pi/2$.

d) $\sigma(t) = (\cos\alpha\cos\omega t, \operatorname{sen}\alpha\cos\omega t, \operatorname{sen}\omega t)$ en $t = \pi/4$.

3.- Dada la función vectorial $\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$, probar que el ángulo entre $\vec{\sigma}$ y $\vec{\sigma'}$ es constante.

4.- Sea $\sigma(t)$ una trayectoria tal que $\|\sigma(t)\|$ es constante (es decir, la curva está contenida en una esfera). Probar que $\sigma(t)$ es ortogonal a $\sigma'(t)$.

5.- Describir la trayectoria y determinar la velocidad y aceleración del movimiento descrito por las curvas siguientes:

(a) $\vec{r}(t) = \vec{i} - 4t^2\vec{j} + 3t^2\vec{k}$.

(b) $\vec{r}(t) = 3\cos t\,\vec{i} + 4\operatorname{sen} t\,\vec{j}$.

6.- Dado el vector de posición de las siguientes curvas, determinar los vectores velocidad y aceleración, y expresar $\vec{T}$ y $\vec{N}$ en función de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ y $\vec{a}(T)$ como combinación lineal de $\vec{T}$ y $\vec{N}$.

(a) $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + 4\operatorname{sen}(t/2)\vec{k}$.

(b) $\vec{r}(t) = (e^t, e^{-t}, -\ln t)$.

(c) $\vec{r}(t) = (3t\cos t, 3t\operatorname{sen} t, 4t)$.

7.- Encontrar $\sigma(t)$ si sabemos que $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ y que el vector velocidad es $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2)$.

8.- Hallar trayectorias que recorran las siguientes curvas geométricas:

a) $y = e^x$;

b) $4x^2 + y^2 = 1$;

c) Segmento $\overline{OA}$, con $O = (0, 0, 0)$ y $A = a, b, c)$.

9.- Encontrar la recta tangente a la hélice cilíndrica descrita por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t/2$, con $t \in \mathbb{R}$, en el punto $(0, 1, \pi/4)$.

10.- Dada la hélice $\vec{r}(t) = (a\cos wt, a\operatorname{sen} wt, bwt)$, con $w > 0$, probar que la recta tangente forma un ángulo constante con el eje Z cuyo coseno es $b/\sqrt{a^2+b^2}$. Además los vectores velocidad y aceleración tienen longitud constante y $\dfrac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{\|\vec{v}\|^3} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

11.- Sea $\vec{u}$ un vector unitario fijo. El vector posición $\vec{r}(t)$ de una partícula verifica $\vec{u} \cdot \vec{r}(t) = e^{2t}$, para todo t, y su vector velocidad $\vec{v}(t)$ forma un ángulo constante ϑ con $\vec{u}$ $(0 < \vartheta < \pi/2)$.

(a) Demostrar que la velocidad en t es $\|\vec{v}\| = 2e^{2t}/\cos\vartheta$.

(b) Calcular $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)$ en función de t y ϑ.

12.- Una partícula de masa unidad se mueve en un plano mediante la ecuación $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$; es atraída hacia el origen por una fuerza de magnitud igual a 4 veces su distancia al origen. En el instante $t = 0$, la posición inicial es $\vec{r}(0) = (4, 0)$ y el vector velocidad inicial es $\vec{v}(0) = (0, 6)$.

(a) Determinar las componentes $x(t)$, $y(t)$ en función de t.

(b) Hallar la ecuación cartesiana de la trayectoria e indicar la dirección del movimiento sobre la curva.

13.- Una partícula se mueve a lo largo de la elipse $3x^2+y^2=1$ con vector de posición $\vec{r}(t)=(f(t),g(t))$. El movimiento es tal que la componente horizontal del vector velocidad en t es $-g(t)$.

(a) ¿Cuál es el sentido del movimiento de la partícula, a favor o en contra de las agujas del reloj?

(b) Probar que la componente vertical del vector velocidad en t es proporcional a $f(t)$.

14.- Una partícula sigue la trayectoria $\vec{r}(t)=(e^t,e^{-t},\cos t)$ hasta que se sale por su tangente en $t=1$. ¿Dónde está en $t=2$, si ninguna fuerza actúa sobre ella después de dejar la curva?

15.- Sea $\vec{\sigma}(t)$ una trayectoria con velocidad $\vec{v}(t)$ y aceleración $\vec{a}(t)$. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial tal que $\vec{F}(\sigma(t))=m\vec{a}(t)$ (segunda ley de Newton), probar que $\dfrac{d}{dt}(m\vec{\sigma}(t)\times\vec{v}(t))=\vec{\sigma}(t)\times\vec{F}(\sigma(t))$.

16.- Supongamos que una partícula de masa m recorre una trayectoria $\sigma(t)$ en un campo de fuerzas $F=-\nabla V$ de acuerdo con la ley de Newton. Probar que la energía $E=\dfrac{1}{2}m\|\sigma'(t)\|^2+V(\sigma(t))$ es constante en el tiempo.

17.- Contestar verdadero o falso a las siguientes proposiciones:

(a) $(\vec{f}\times\vec{g})'(t)=(\vec{g}\times\vec{f})'(t)$.

(b) Si el vector velocidad es constante, la curva es plana.

(c) Si la velocidad es constante, la curva es plana.

(d) Si el vector aceleración es constante, la curva es plana.

(e) Si el vector velocidad es perpendicular al vector aceleración, la curva es plana.

18.- Hallar la longitud de arco de las curvas siguientes en el intervalo especificado:

(a) $\vec{\sigma}(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$, $0 \leq t \leq 2$.

(b) $\vec{\sigma}(t) = (t\sqrt{2}, e^t, e^{-t})$, $-1 \leq t \leq 1$.

(b) $\vec{\sigma}(t) = (a\cos wt, a \operatorname{sen} wt, bwt)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

(c) $\vec{\sigma}(t) = (2t, t^2, \ln t)$, entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\ln 2)$.

(d) $\vec{\sigma}(t) = (t, \ln t, 2\sqrt{2t})$, $1 \leq t \leq 2$.

19.- Sea la curva en coordenadas polares $\varphi = \varphi(\vartheta)$, con $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$. Dar la expresión de la longitud de arco y usarla para calcular la longitud de la cardioide $\rho = 1 + \cos\vartheta$.

20.- Esbozar el campo vectorial y algunas líneas de flujo para

a) $F(x,y) = (y, -x)$ **b)** $F(x,y) = (x, -y)$ **c)** $F(x,y) = (x, x^2)$.

21.- Sea $c(t)$ una línea de flujo para el campo $F = -\nabla f$. Comprobar que la función $f(c(t))$ es decreciente.

22.- i) Calcular $F = -\nabla V$ siendo $V(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ y la superficie equipotencial $V = 1$.

ii) Comprobar que el campo $F = \nabla V$ es perpendicular a las superficies equipotenciales del campo.

23.- Sea $c(t) = (t^2, 2t-1, \sqrt{t})$, $t > 0$. Comprobar que es una línea de flujo del campo de velocidad $F(x,y,z) = (y+1, 2, 1/(2z))$.

24.- Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos

a) $F(x,y,z) = (x, y, z)$.

b) $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$.

c) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{-xz}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)$.

d) $F(x,y,z) = ((x+y)^3, \operatorname{sen} xy, \cos xyz)$.

25.- Sea $F(x,y,z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0)$. Hallar un campo escalar $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = F$ y probar que $\operatorname{rot} F = 0$.

26.- i) Sea $F(x,y,z)$ un campo vectorial. Analizar si son perpendiculares F y su rotacional.

ii) Sean F y G campos vectoriales incompresibles. Analizar si también lo son $F + G$, $F \times G$ y $(F \cdot G) \cdot F$.

27.- Probar que el campo vectorial $\nabla f \times \nabla g$ es incompresible, para cualesquiera campos escalares f y g.