

CÁLCULO VECTORIAL

1.- Comprobar el teorema de Green en las siguientes integrales:

a) $I = \oint_{\gamma} (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy,$

donde $\gamma : \begin{cases} 1) y = \sqrt{x} & , y = x^2. \\ 2) x = 0, y = 0, x + y = 1. \end{cases}$

b) $I = \oint_{\gamma} (2x - y^3) dx - xy dy,$

donde $\gamma : x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 9.$

c) $I = \oint_{\gamma} xy^2 dx - x^2 y dy,$

donde $\gamma : x^2 + y^2 = a^2.$

d) $I = \oint_{\gamma} (x + y) dx - (x - y) dy,$

donde $\gamma : x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$

e) $I = \oint_{\gamma} (x^2 - y^2) dx + (x^2 - 4) dy,$

donde $\gamma : x + y = 2, x + y = 4, x - y = 0, x^2 - y^2 = 4.$

f) $I = \oint_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (x^2 y + 3) dy,$

donde $\gamma : y^2 = 8x, x = 2.$

g) $\int_{AB} \operatorname{sen} y dx + \operatorname{sen} x dy,$

siendo AB el segmento que une los puntos $A(0, \pi)$ y $B(\pi, 0)$.

h) $\oint_{OmAnO} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dy - dx,$

donde OmA es segmento de parábola $y = x^2$ que une los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$ y OnA es el segmento de recta $y = x$.

2.- Calcular $\oint_{\gamma} y^2 dx + (x + y)^2 dy,$ con γ el triángulo de vértices $A(a, 0), B(a, a)$ y $C(0, a)$, siendo $a > 0$. ¿Se cumple la fórmula de Green?

3.- Calcular $\int_{\sigma} y dx - x dy$ donde σ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada en sentido contrario al de las agujas del reloj.

4.- Calcular, tanto directamente, como aplicando el teorema de Green,

$$\oint_{\Gamma} (xy + x + y)dx - (xy + x - y)dy,$$

siendo Γ

a) la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b) la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$.

5.- Calcular $\int_{\sigma} (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ donde σ es el círculo unitario. Verificar el teorema de Green en el caso en que σ es la región anular descrita por $a \leq x^2 + y^2 \leq b$ orientada como en la figura.

6.- Usar el teorema de Green para calcular $\int_{\sigma} (y^2 + x^3) dx + x^4 dy$ donde σ es el perímetro de $[0, 1] \times [0, 1]$ en sentido positivo.

7.- Calcular $I = \int_{AmO} (e^x \operatorname{sen} y - my) dx + (e^x \operatorname{cos} y - m) dy$, donde AmO es la semicircunferencia superior $x^2 + y^2 = ax$ recorrida desde $A = (a, 0)$ hasta $O = (0, 0)$.

8.- Calcular la integral $I = \int_{AmB} (\phi(y)e^x - my) dx + (\phi'(y)e^x - m) dy$, donde ϕ , ϕ' son continuas y AmB es un trayecto arbitrario que une $A = (x_1, y_1)$ con $B = (x_2, y_2)$, el cual junto con el segmento AB encierra un recinto de área S . Elegir el camino adecuado entre $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ (aunque sea más largo) que facilite la parametrización del trayecto.

9.- Calcular el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

10.- Bajo las condiciones del teorema de Green, probar:

$$a) \int_{\partial D} PQ dx + PQ dy = \iint_D \left[Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

$$b) \int_{\partial D} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = 2 \iint_D \left(P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$$

11.- Sea f una función armónica, es decir, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Probar que $\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$, donde D es una región a la que se aplica el teorema de Green.

12.- Si C es una curva cerrada que limita una región D a la que se puede aplicar el teorema de Green, probar que $A(D) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx$.

13.- Sea F un campo vectorial y σ una trayectoria cualquiera. Si F y σ' son perpendiculares a lo largo de la trayectoria, probar que $\int_{\sigma} F ds = 0$.

14.- Calcular, utilizando el teorema de Stokes,

$$a) I = \oint_{\gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz,$$

$$\text{donde } \gamma : \begin{cases} x = a \operatorname{sen}^2 t \\ y = 2a \operatorname{sen} t \cos t \\ z = a \cos^2 t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$b) I = \oint_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

donde $\gamma : x^2 + y^2 = a^2$, $x/a + z/h = 1$ $a, h > 0$, recorrida en sentido antihorario, desde la parte positiva del eje X.

$$c) I = \oint_{\gamma} z dx + x dy + y dz,$$

donde $\gamma : x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, en sentido antihorario.

$$d) I = \oint_{\gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz,$$

donde $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z > 0$ recorrida de forma que el recinto menor de la esfera quede a la izquierda (recorrido en sentido antihorario).

$$e) I = \oint_{\gamma} 2z dx - x dy + 3y dz,$$

donde $\gamma : 1 - z = x^2 + y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ recorrida en sentido antihorario.

f) $\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z^2 - xy) dz,$
 donde $A = (a, 0, 0), B = (a, 0, h)$ a lo largo de $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}.$

g) $\oint_C y dx + z dy + x dz,$
 a lo largo de la curva $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ en sentido positivo.

h) $\int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$
 siendo C la frontera de la esfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0,$ y los planos coordenados orientada en sentido positivo.

i) $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$
 siendo C la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z \geq 0, a > 0.$

j) $\oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$
 donde C es la curva intersección de la superficie del cubo $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ y el plano $x + y + z = 3a/2,$ recorrida en sentido positivo.

15.- Hallar la circulación del campo $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (x^3 + yz)\vec{j} - 3xy^2\vec{k}$ a lo largo del circuito limitado por

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$$

aplicando el teorema de Stokes.

16.- Hallar la circulación del vector $\vec{a} = (2xz, x^2 - y, 2z - x^2)$ a lo largo del circuito del primer octante limitado por la esfera unidad, el plano $z = y$ y los planos coordenados $x = 0, y = 0,$ aplicando el teorema de Stokes.

17.- Sean las superficies

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\},$$

y el campo vectorial $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, x^2z^4).$ Calcular la integral de superficie de $\text{rot } F$ a lo largo de la superficie formada por la unión de S_1 y $S_2.$

18.- Calcular $\iint_S \overrightarrow{\text{rot } F} \cdot \vec{n} dS,$ siendo $\vec{F}(x, y, z) = (xy, -y, -x^2y),$ donde S consta de las tres caras no situadas en el plano XZ del tetraedro limitado por los tres

planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$, y la normal \vec{n} es la normal unitaria exterior del tetraedro.

19.- ¿Cuánto se diferencian las integrales de superficie

$$I_1 = \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS, \quad I_2 = \iint_{S_2} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$$

siendo S_1 la esfera de centro cero y radio a , y S_2 el octaedro de ecuación $|x| + |y| + |z| = a$ inscrito en la esfera?

20.- El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a la esfera unitaria en dos partes: S_1 la interior al cilindro y S_2 la exterior a él. Calcular la razón entre ambas áreas.

21.- Comprobar que el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (yz(2x + y + z), xz(x + 2y + z), xy(x + y + 2z))$$

es conservativo y calcular su campo potencial.

22.- Comprobar que el campo vectorial $a(x, y, z) = \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}}, -\frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}, -\frac{x}{\sqrt{(y+z)^3}} \right)$ es conservativo y hallar el trabajo que se realizará desde el punto $(1, 1, 3)$ hasta el $(2, 4, 5)$.

23.- Comprobar que los siguientes campos son conservativos y calcular $\int_{\gamma} F \cdot ds$:

a) $F(x, y) = (xy^2 + 3x^2y, (x + y)x^2),$

siendo γ el triángulo de vértices $(1, 1), (0, 2), (3, 0)$.

b) $F(x, y) = (\cos xy^2 - xy^2 \operatorname{sen} xy^2, -2x^2y \operatorname{sen} xy^2),$

siendo $\gamma: \gamma(t) = (e^t, e^{t+1}), -1 \leq t \leq 0$.

c) $F(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y, z),$

donde γ es la trayectoria que une $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$.

24.- Calcular aplicando el teorema de Gauss, cuando sea posible:

a) $I = \iint_S \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right) \cdot dS,$

donde S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

b) $I = \iint_S (ax, by, cz) \cdot dS,$

por la cara exterior de S , donde S es una superficie cerrada que encierra un cuerpo de volumen V .

c) $I = \iint_S (xy, yz, zx) \cdot dS,$

por la cara exterior de S , donde $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $x, y, z \geq 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

d) $I = \iint_S (x^2, y^2, z^2) \cdot dS,$

donde S es la superficie exterior del cubo: $0 \leq x, y, z \leq a$.

e) $I = \iint_S (yx, -2y^2, z^2) \cdot dS,$

por la cara exterior de S , donde $S : x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 3$.

25.- Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{a} = 4xz\vec{i} + xyz\vec{j} + 3z\vec{k}$ a través de la cara exterior de la superficie S definida por $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z \leq 4$, utilizando el teorema de Gauss.

26.- Hallar el flujo del campo $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ a través de la superficie $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, bien directamente, bien aplicando el teorema de Gauss.

27.- Calcular

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$$

donde S es la superficie exterior de una pirámide formada por los planos $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. ¿Se cumple la fórmula de Gauss?

28.- Comprobar el teorema de Gauss para el campo

$$F(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + x)\vec{j} + z^3\vec{k}$$

y el sólido dado por $x^2/4 + y^2/4 + z^2/25 \leq 1$, $z \geq 0$.