

MATEMÁTICAS E INGENIO

Pedro Alegría (pedro.alegria@ehu.es)

Una persona nunca es tan ingeniosa como inventando juegos.

Leibnitz (1646-1716)

Los juegos de ingenio son a propósito para todas las estaciones y en todas las edades, pues que instruyen a los jóvenes, entretienen a los adultos, convienen a los ricos y no se hallan fuera del alcance de las personas medianamente acomodadas.

Ozanam (1640-1717)

ÍNDICE

1. Principio del palomar.
2. Problema de los cuatro viajeros.
3. Sucesiones de recurrencia.
4. Grafos.
5. Problema de los tres envases.
6. Torre de Hanoi.
7. Combinatoria.
8. La revancha de Arquímedes.

Grandes teorías matemáticas han tenido como fundamento motivos recreativos o diferentes tipos de juegos. Podemos destacar, entre otros, los juegos de azar que permitieron a **Pierre de Fermat** y **Blaise Pascal** la creación de la *Teoría de la Probabilidad*, teoría en la que se basaron las compañías de seguros en sus inicios a mediados del siglo XVIII, y los juegos de estrategia iniciados a principios del presente siglo, que dieron lugar a la teoría matemática de juegos.

El siguiente efecto de adivinación tiene su base en un conocido hecho de las matemáticas:

Pide a un espectador que escriba en fila cinco números de una cifra. Después escribes en secreto el número $a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5$ (mód 9) y pides al espectador que escriba en la fila de abajo los restos módulo 9 de las sumas de dos números consecutivos de la fila anterior. Este proceso se repite de nuevo hasta que sólo quede en el extremo inferior un número. Muestra el número que habías escrito al principio y nota que coincide con el obtenido por el espectador.

La explicación se encuentra en las propiedades del *triángulo aritmético*, conocido como el triángulo de Pascal por haber publicado éste un tratado sobre el tema, aunque tal disposición fue descubierta anteriormente por Tartaglia (y mucho antes en China por Yang Hui).

```

      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
.....

```

Cada fila corresponde a los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^n$, es decir los números combinatorios $\binom{n}{k}$, $k = 1, \dots, n$.

Muchos hechos notables se relacionan con dicha disposición. Por ejemplo, la suma de los elementos de la fila n -ésima es 2^n . Las diagonales principales corresponden a los números triangulares, tetraédricos, etc., y la suma de los elementos de la diagonal secundaria da la *sucesión de Fibonacci*.

Haremos en esta exposición un recorrido por algunos problemas de matemática recreativa que sido fuente de multitud de estudios y han conseguido

do despertar la afición por las matemáticas de muchos jóvenes en todo el mundo.

1. PRINCIPIO DEL PALOMAR.

Teorema. *En cualquier momento, siempre hay en Nueva York al menos dos personas con el mismo número de cabellos.*

Esta afirmación es consecuencia directa del llamado *principio del palomar* o *principio de Dirichlet*, que tiene las siguientes formulaciones equivalentes:

- a) *Si m palomas se colocan en m palomares, uno de los palomares está vacío si y sólo si un palomar está ocupado por más de una paloma.*
- b) *Si $n > m$ palomas se colocan en m palomares, hay al menos un palomar que contiene más de una paloma. Más precisamente, habrá algún palomar con al menos $\left[\frac{n-1}{m} \right] + 1$ palomas (donde el símbolo $[x]$ representa la parte entera de x).*
- c) *Sea $\text{card}(A)$ el número de elementos de un conjunto finito A . Para dos conjuntos finitos A y B , existe una correspondencia biunívoca $f: A \rightarrow B$ si y sólo si $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.*

Volvamos a la comprobación de la existencia de dos personas en Nueva York con el mismo número de cabellos.

Se puede estimar que el número máximo de cabellos que puede tener una persona es de 150 cabellos por centímetro cuadrado. Incluso suponiendo el caso patológico de una persona de 2 metros de altura cubierta completamente de pelo, podría llegar a tener 7000000 de cabellos. Si estimamos la población de Nueva York en 9 millones de habitantes, basta aplicar el principio del palomar para demostrar la afirmación inicial.

El principio tiene por supuesto aplicaciones más serias que la indicada. Enunciaremos algunas de ellas.

Ejemplo 1. Sea a un número irracional. Existe una cantidad infinita de números racionales $r = p/q$ tales que

$$|a - r| < q^{-2}.$$

Ejemplo 2. Consideremos un tablero de ajedrez en el que se quitan dos esquinas diagonalmente opuestas. ¿Es posible cubrir el tablero con fichas de dominó, cada una de ellas del tamaño de dos cuadros del tablero?

La respuesta es negativa; los dos cuadrados diagonalmente opuestos son del mismo color. Al quitarlos, el número de cuadrados de un color excede en dos al número de cuadrados del otro color. Sin embargo, cada ficha de dominó cubre un cuadrado de cada color. Es decir, mediante las fichas se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de cuadrados blancos y el conjunto de cuadrados negros. Al tener ambos conjuntos un número distinto de elementos, por el principio del palomar, no es posible una correspondencia así entre los dos conjuntos.

Ejemplo 3. Seleccionemos un conjunto de 55 enteros $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{55} \leq 100$. Independientemente de la selección, dos de ellos difieren en 9, dos de ellos difieren en 10, dos de ellos difieren en 12 y dos de ellos difieren en 13. Sorprendentemente, no puede haber ningún par de ellos que difieran en 11.

Sugerencia: dados $2n$ enteros consecutivos, $a+1, a+2, \dots, a+2n$, hay n pares de ellos que difieren en n : $(a+1, a+n+1), (a+2, a+n+2), \dots, (a+n, a+2n)$. Por el principio del palomar, si se seleccionan más de n números del conjunto anterior, habrá dos de ellos que forman un par cuya diferencia es n .

Ejemplo 4. Dado un número impar n y cualquier permutación p del conjunto $\{1, \dots, n\}$, el producto

$$(1 - p(1))(2 - p(2)) \cdots (n - p(n))$$

es necesariamente par.

Problemas variados.

1. Probar que, seleccionando cinco puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, siempre existe un par de ellos cuya distancia es menor o igual a 0.5.
2. Se eligen cinco puntos entre los nodos de un retículo cuadrado. ¿Por qué al menos el punto medio de la recta que une algún par de entre los puntos dados es también un punto del retículo?
3. Supongamos que cada punto del plano se colorea de rojo o azul. Probar que se puede construir un rectángulo cuyos vértices son todos del mismo color.
4. Supongamos que $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Si $f(x) = 2$ tiene tres soluciones diferentes $a, b, c \in \mathbb{Z}$, probar que no hay ningún entero para el que $f(x) = 3$.
5. Probar que existen dos potencias de 3 cuya diferencia es divisible por 1997.

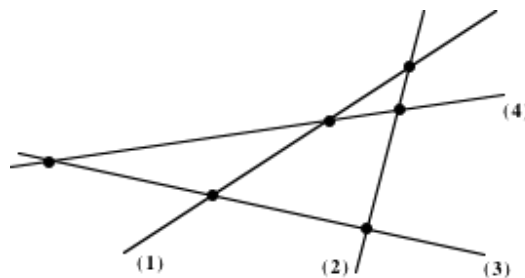
6. Probar que existe alguna potencia de 3 que termina en 001.
7. Dados 6 puntos en el interior de un círculo de radio 1, existe al menos un par de ellos cuya distancia es menor o igual a 1.
8. Si se sientan 9 personas en una fila formada por 12 sillas, algún conjunto formado por 3 sillas consecutivas está ocupado por 3 personas.
9. Una persona toma al menos una aspirina al día durante 30 días. Si ha tomado en total 45 aspirinas, en alguna sucesión de días consecutivos ha tomado exactamente 14 aspirinas.
10. Un grupo de teatro ha dado 7 actuaciones durante una temporada. Cinco mujeres del grupo actúan en 3 de las representaciones. Entonces en alguna representación actúan al menos 3 mujeres.
11. Dados 6 enteros cualesquiera del 1 al 10, al menos dos de ellos tienen suma impar.
12. Si una matriz 14×14 formada por ceros y unos tiene 58 unos, alguna submatriz de orden 2×2 está formada por todo unos.

Mucha información sobre este principio y sus aplicaciones puede encontrarse en Internet y en textos básicos de Combinatoria.

2. PROBLEMA DE LOS CUATRO VIAJANTES.

Recibe este nombre el problema que planteamos a continuación:

Cuatro carreteras en un plano, las cuales se suponen rectas, están situadas de modo que ningún par de ellas son paralelas y no hay tres que pasen por el mismo punto. A lo largo de cada carretera camina un viajante V_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a velocidad constante. Sus velocidades, sin embargo, pueden no ser las mismas. Se sabe que el viajante V_1 se encuentra con los viajeros V_2 , V_3 y V_4 ; a su vez, el viajante V_2 se encontró con V_3 y V_4 y, por supuesto, con V_1 . Se trata de probar que V_3 y V_4 también se encontraron.



Soluciones.

1. Sea T_{ij} el tiempo en que se encuentran las personas V_i y V_j . Sin pérdida de generalidad, supondremos que $T_{12} = 0$. El problema consiste en probar la existencia de T_{34} (y obtener su valor). Denotemos por $P_i(t)$ la posición de la persona V_i en el tiempo t , $P_i(t) = A_i + tB_i$, donde A_i y B_i son vectores. Como ningún par de carreteras es paralela, los vectores B_i son linealmente independientes dos a dos. Si suponemos además, lo que no afecta el razonamiento, que las personas V_1 y V_2 se encuentran en el origen, tendremos que $A_1 = A_2 = 0$. Del enunciado sabemos que

$$P_1(T_{13}) = P_3(T_{13}) \quad (1)$$

$$P_1(T_{14}) = P_4(T_{14}) \quad (2)$$

$$P_2(T_{23}) = P_3(T_{23}) \quad (3)$$

$$P_2(T_{24}) = P_4(T_{24}) \quad (4)$$

De (1) y (3) podemos resolver A_3 y B_3 en términos de B_1 y B_2 . Análogamente, de (2) y (4), resolveremos A_4 y B_4 en términos de B_1 y B_2 .

La ecuación $P_3(t) = P_4(t)$, escrita en términos de B_1 y B_2 , tiene solución única (recordemos que B_1 y B_2 son linealmente independientes). Esta es

$$T = \frac{T_{13}T_{23}T_{24} + T_{13}T_{14}T_{24} - T_{13}T_{14}T_{23} - T_{14}T_{23}T_{24}}{T_{13}T_{24} - T_{14}T_{23}}.$$

Por último, necesitamos comprobar que $T_{13}T_{24} - T_{14}T_{23}$ es distinto de cero.

En caso contrario, $T_{13}/T_{14} = T_{23}/T_{24}$, lo que implica que los triángulos de vértices $O, P_3(T_{13}), P_3(T_{23})$ y $O, P_4(T_{14}), P_4(T_{24})$, respectivamente, son semejantes, porque, si v_1 y v_2 representan las velocidades de las personas V_1 y V_2 , la distancia $d(O, P_1(T_{13}))$ es igual a v_1T_{13} . Del mismo modo, $d(O, P_1(T_{14})) = v_1T_{14}$, de donde

$$d(O, P_1(T_{13}))/d(O, P_1(T_{14})) = T_{13}/T_{14}.$$

Análogamente, se calcula T_{23}/T_{24} .

Esto implica que las rectas recorridas por las personas V_3 y V_4 son paralelas, lo que contradice el enunciado.

2. La clave de la solución está en el concepto de velocidad uniforme. Cuando un cuerpo viaja a velocidad constante, su gráfica es una línea recta. Para representar la gráfica, se necesita una recta a lo largo de la cual el cuerpo viaja y un eje del tiempo. Denotemos las cuatro rectas

por r_1, r_2, r_3, r_4 e identifiquemos los viajeros por sus números 1, 2, 3, 4. Pensemos el eje del tiempo como una recta perpendicular al plano que forman las anteriores. Sean m_1, m_2, m_3, m_4 las rectas que indican el movimiento de los viajeros. Decir que un punto $P = (x, y, t)$ pertenece a m_i equivale a:

- a) el punto $Q = (x, y)$ está en r_i y
- b) el viajante i pasa a través del punto Q en el tiempo t .

De a) se sigue que la proyección de m_i sobre el plano de las carreteras coincide con r_i .

Como los viajeros 1 y 2 se encuentran, en el momento de su encuentro están colocados en el mismo punto del plano. Por b), m_1 y m_2 se intersectan. Por tanto, ambas rectas definen un mismo plano. Como el número 3 se encuentra tanto con 1 como con 2, m_3 intersecta a m_1 y m_2 . Por lo tanto, todos ellos están en el mismo plano. El mismo argumento se aplica al número 4. En definitiva, las cuatro rectas m_i ($i = 1, 2, 3, 4$) están en el mismo plano. Por último, las rectas m_3 y m_4 no pueden ser paralelas pues sus respectivas proyecciones sobre el plano horizontal, r_3 y r_4 , se intersectan. El hecho de que m_3 y m_4 se intersectan quiere decir que los viajeros 3 y 4 tienen que estar en el mismo punto del plano en algún momento, lo que significa que, en efecto, se encuentran.

Observaciones.

1. Bajo las condiciones del problema, en todo momento los cuatro viajeros se encuentran alineados.

Para comprobarlo, dibujar una recta que conecte los viajeros 1 y 2 y ver cómo varía a lo largo del tiempo. Debido a la posición general de los caminos de los viajeros y por ser constante su velocidad, vemos que los viajeros 3 y 4 deben también estar sobre la recta ya que los viajeros 1 y 2 se encuentran con ellos. Esta posición general indica que los viajeros 3 y 4 también se encuentran pues la recta corta a sus trayectorias.

2. Si dos viajeros salen de un punto común a lo largo de líneas rectas, viajando a velocidades constantes, las razones de las distancias recorridas en un tiempo dado es la razón de sus velocidades. Por tanto, líneas trazadas para tiempos distintos uniendo sus posiciones, deben ser paralelas (¿no es el teorema de Tales?). Es bien sabido entre los marineros que si dos barcos viajan de modo que el ángulo entre la trayectoria de uno y la línea que une ambos barcos es constante, entonces los dos barcos están en vía de colisión.

3. El problema puede generalizarse a un número arbitrario de carreteras, $N > 3$, que lo hace todavía más llamativo: suponer que los dos primeros viajeros se encuentran, así como se encuentran también el resto de $N - 2$ viajeros. Probar que todos los demás también se encuentran.

3. SUCCIONES DE RECURRENCIA.

Leonardo Fibonacci, nombrado en los escritos medievales y renacentistas como Leonardo de Pisa, es conocido, más que por su obra, por la serie recurrente en la que cada término es suma de los dos que le preceden:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

puesta por Leonardo en el margen del texto del conocido problema de los conejos del *Liber abaci* (publicado en 1202), que es más un juego que un auténtico problema. Los matemáticos modernos han señalado importantes propiedades de esta serie, la han bautizado como serie de Fibonacci y llaman a sus elementos números de Fibonacci. Sin embargo, el apellido Fibonacci nunca lo tuvo en vida el matemático pisanó (fibonacci es una contracción de filius Bonacci, muy común en la formación de los apellidos de las familias toscanas).

Si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, entonces se tiene la fórmula de Euler

$$a_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}},$$

donde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ es la razón áurea, expresión que involucra números irracionales y que sin embargo da resultados enteros.

De esta fórmula se deducen las siguientes:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \phi$.
2. $a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$.
3. m.c.d. $(a_{n+1}, a_n) = 1$.
4. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ (n veces).
5. $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.
6. $\phi^n = \phi a_n + a_{n-1}$.
7. $a_1 + \dots + a_n = a_{n+2} - a_2$.

Un truco de cálculo rápido asociado a esta propiedad es el siguiente:

Pide que escriban dos números cualesquiera. Con ellos se forma una sucesión donde cada elemento sea la suma de los dos anteriores. Se separan dos de ellos con una línea y, casi inmediatamente, puedes dar la suma de todos los que se encuentran antes de dicha línea.

8. $a_1 + \dots + a_{10} = 11 \cdot a_7$.

Asociado a esta propiedad se puede presentar otro truco:

Pide a alguien que escriba dos números arbitrarios; a continuación, que escriba los ocho siguientes términos de la sucesión formada de modo que cada término sea la suma de los dos anteriores. Puedes dar la suma de los diez términos utilizando la fórmula anterior.

Los elementos de la sucesión de Fibonacci dan también la respuesta al siguiente problema: ¿de cuántas maneras pueden colocarse en hilera un conjunto de n personas de modo que no haya dos mujeres juntas?

Otro problema más: ¿De cuántas formas distintas se puede subir una escalera si desde cada posición pueden subirse uno o dos escalones?

En el caso de 4 escalones, las distintas soluciones son:

$$1111 \quad 112 \quad 121 \quad 211 \quad 22.$$

Se observa que si el último paso es de un escalón, el número de posibilidades coincide con el número total de formas de subir la escalera con un escalón menos; además, si el último paso es de dos escalones, el número coincide con el número de posibilidades de subir la escalera con dos escalones menos. La fórmula que ilustra este hecho es pues $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Esta situación, con enunciado más serio, se aplica en problemas de trayectorias de rayos luminosos (el número de trayectorias posibles al experimentar n reflexiones entre dos láminas de vidrio es a_{n+2}).

Un problema no resuelto es el de averiguar si existen infinitos números primos en la sucesión de Fibonacci.

Una revista especializada, **Fibonacci Quarterly** (fundada en 1963), está íntegramente dedicada a temas matemáticos relacionados con las sucesiones de Fibonacci y sus generalizaciones. Estos están incluidos en líneas tan diversas como la Teoría de Probabilidad o el Álgebra Lineal.

En la Naturaleza, el estudio de la Filotaxia (disposición de hojas) ha mostrado la aparición de la sucesión de Fibonacci. Las estructuras florales están formadas por dos sistemas de espirales logarítmicas: las que tienen sentido horario y las de sentido antihorario. Usualmente, estos dos números son valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, las semillas de

la flor del girasol tienen dos sistemas de espirales empezando desde el centro, 55 de ellas en sentido horario y 34 en sentido antihorario. También las piñas, coliflores y algunos cactus presentan esta característica.

La razón de este comportamiento está en el modo de composición de estas estructuras: cada capullo que se abre separa otros a su alrededor. A medida que se van formando nuevos capullos, al abrirse separan a los más recientes con más fuerza, mientras que los ya formados anteriormente son separados en menor medida. Esto naturalmente produce esa disposición en espiral.

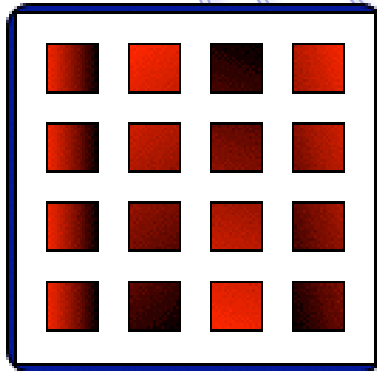
En Física, hay indicios que relacionan la razón áurea y las sucesiones de Fibonacci con la estructura de los átomos y con el espacio entre planetas del sistema solar.

En programación de ordenadores, la sucesión tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de información, generación de números aleatorios, etc.

Estudiaremos a continuación otras sucesiones interesantes. La siguiente está relacionada con el triángulo de Pascal:

2 6 20 70 252 ...

Por una parte, responde al problema de encontrar el número de caminos (sin dar pasos superfluos) mediante los que se puede cruzar en diagonal un conjunto de calles dispuestas en una estructura cuadrada, como en la figura:



Por otra parte, la sucesión corresponde a los elementos que están en la vertical principal del triángulo de Pascal.

Es interesante el hecho de que si pensamos en distribuciones rectangulares, es decir con distinto número de filas que de columnas, el número de caminos posibles para cruzar de una esquina a la diagonalmente opuesta coincide con el resto de elementos del triángulo de Pascal.

Una gran base de datos que contiene multitud de sucesiones es la

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences y ha sido desarrollada por Neil Sloane.

Hay que advertir que nunca puede definirse una sucesión por los primeros términos, por muchos que sean. Por ejemplo, si queremos saber cuál es el elemento que sigue en la sucesión

1 2 3 4 ... 37 38 39

una posible respuesta es 42 pues consiste en los valores de n para los que $n^2 + n + 41$ es primo. Otro ejemplo bien conocido es la sucesión de Leo Moser

1 2 4 8 16

que continúa con 31 y su término general es $n + \binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}$, en vez de 2^n , y corresponde al número máximo de regiones en que queda dividido un círculo uniendo n puntos de la circunferencia.

Enunciamos a continuación dos problemas que involucren sucesiones numéricas definidas mediante relaciones de recurrencia cruzadas.

1. Se tienen dos depósitos de 6 litros cada uno y se realiza el siguiente proceso: en cada paso, se echa la mitad del contenido del primer depósito en el segundo y, a continuación, la mitad del contenido del segundo en el primero. ¿Cuál es la posición límite que se obtiene?

Respuesta: Si representamos por $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ al contenido de los depósitos primero y segundo, respectivamente, a lo largo del proceso, entonces se tienen las relaciones

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 6 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

cuya solución (aplicando propiedades de las sucesiones numéricas) es $\lim a_n = 8$, $\lim b_n = 4$.

2. En dos lugares de un prado donde pasta un asno se colocan dos montones iguales de alfalfa. El asno se dirige a uno de ellos y, cuando ha recorrido la mitad de la distancia, se dirige hacia el otro montón, repitiéndose el cambio de dirección cada vez que recorre la mitad de la distancia que le separa del montón a donde se dirige. Probar que el asno nunca llega a comerse la alfalfa.

Respuesta: Para simplificar la notación, supondremos que uno de los montones se encuentra en el origen y el otro en un punto alejado una unidad del origen y que el asno está en la recta que une ambos puntos. La sucesión $\{x_n\}$ que representa la distancia del asno al origen a lo

largo del proceso se define por

$$\begin{cases} x_1 = a, & a \in (0, 1), \\ x_{2n} = x_{2n-1}/2, \\ x_{2n+1} = (1 + x_{2n})/2. \end{cases}$$

La sucesión de los términos pares tiene límite $1/3$ y la de los impares $2/3$, por lo que la sucesión completa no tiene límite.

4. GRAFOS.

Para la mayoría de la gente un grafo no es otra cosa que una representación de puntos (x, y) en un plano cartesiano. De hecho, existe una amplia teoría matemática de grafos que es mucho más que una representación de puntos y que es extremadamente rica en ideas y teoremas elegantes. Más aún, se trata de una herramienta básica en muchos campos de la ciencia y la tecnología; sus teoremas y métodos han sido aplicados con éxito en temas tan diversos como teoría de la información, planificación de la producción, transportes, programación lineal, redes de conexión, mecánica estadística y genética. Se puede decir que el primer estudio de grafos, realizado por **Leonhard Euler**, es el fundamento de la teoría de la Topología, de inmensa importancia en la matemática moderna.

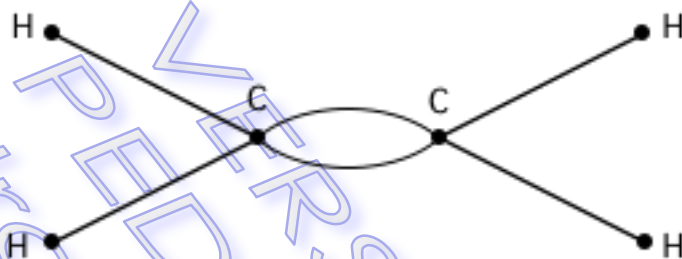
Definiremos en términos sencillos un grafo como una colección de puntos, llamados **vértices**, y líneas que unen algunos pares de puntos, llamadas **aristas**. Si una arista une un vértice consigo mismo, se llama **bucle** o **lazo**. Las regiones en que las aristas dividen el plano (incluyendo la exterior) se llaman **caras** del grafo. Un grafo es un esquema de una situación particular con alto nivel de abstracción, pero que ofrece información de tipo intuitivo muy accesible. Esto es común en la vida cotidiana donde se utilizan esquemas para sintetizar un conjunto de observaciones: mapas de carreteras, de una red ferroviaria, de un callejero, etc.

Algunos ejemplos sencillos de su aplicación son los siguientes:

1. **Puentes de Königsberg.** Ampliamente conocidos.
2. **Circuitos impresos.** En ellos se deben unir una serie de puntos con otros de modo que ningún camino se cruce con los demás.



3. **Problemas de química orgánica.** Las moléculas químicas son muy apropiadas para representarlas en forma de grafos. Por ejemplo la enumeración de los isómeros de un compuesto químico se puede tratar mediante la teoría de grafos. Así, la molécula de etileno C_2H_4 aparece en forma de grafo como:



En cuanto se conoce la disposición de los átomos de carbono quedan determinadas las moléculas de un hidrocarburo pues basta añadir los átomos de hidrógeno hasta que la valencia de cada vértice de carbono sea cuatro.

En el siguiente ejemplo, queremos completar la molécula del isobutano que tiene la disposición siguiente:



En este pequeño resumen no es posible describir gran parte del variado lenguaje de la teoría de grafos, como tampoco es posible indicar todas sus aplicaciones. No obstante, habremos cumplido nuestro propósito si logramos que sean familiares las ideas básicas y la notación y despertar entre la audiencia el tremendo valor potencial en el estudio de sistemas reales. Por ejemplo, un problema de investigación operativa consiste en programar un proyecto complejo, en cuya resolución se debe describir el conjunto de actividades que lo integran en forma de grafo.

■ Algunas definiciones:

- a) Un grafo es **simple** si entre dos puntos distintos hay como máximo una arista.
- b) Un grafo es **completo** si cada vértice está conectado a todos los demás por una arista sin lazos.
- c) Un grafo es **regular** si todos sus vértices tienen el mismo orden (misma valencia).

d) Un grafo es **conexo** si cada par de vértices puede conectarse mediante algún camino (sucesión finita de aristas).

e) Un **árbol** es un grafo simple, conexo y sin lazos (aristas que empiezan y terminan en el mismo punto).

■ Algunos resultados interesantes:

1. En un árbol, el número de vértices es siempre igual al número de aristas más uno, $V = A + 1$.

2. Todo grafo conexo puede reducirse a un árbol suprimiendo un número mínimo de caminos (llamado número de Betti del grafo) sin eliminar ningún vértice. Es evidente que $B = 1 + A - V$.

Los grafos de tipo árbol tienen interesantes aplicaciones, a la vez que se presentan en diversas disposiciones de la naturaleza. Las moléculas químicas del tipo C_nH_{2n+2} se representan mediante árboles con $3n + 2$ vértices y $3n + 1$ aristas. En la planificación de carreteras, semáforos, conducción de agua, etc., es importante que los grafos que representan el problema sean conexos, y a veces que tengan disposición de árbol.

3. La fórmula de Euler que relaciona las aristas, vértices y caras de un poliedro simple se generaliza a grafos conexos. Incluso es más general, pues se puede probar que

$$C + V - A = 1 + \text{número de componentes conexas.}$$

5. PROBLEMA DE LOS TRES ENVASES.

El problema, en su versión original, es bien conocido:

Se dispone de tres envases A, B y C, con capacidad para 8, 5 y 3 litros, respectivamente. El recipiente de 8 litros está lleno de vino y queremos dividir el contenido en dos partes iguales. ¿Qué método se debe seguir si los envases no tienen marcas que indiquen capacidades intermedias?

Es fácil, con un poco de paciencia, dar una solución al problema. La más corta que conocemos es la siguiente (donde representamos por (a, b, c) la cantidad de vino que hay en los recipientes A, B y C, respectivamente):

$$\begin{aligned} (8, 0, 0) &\rightarrow (3, 5, 0) \rightarrow (3, 2, 3) \rightarrow (6, 2, 0) \\ &\rightarrow (6, 0, 2) \rightarrow (1, 5, 2) \rightarrow (1, 4, 3) \rightarrow (4, 4, 0). \end{aligned}$$

Sin embargo, hay otras cuestiones de relativo interés para un matemático con respecto a este problema. Por ejemplo, en la solución dada aparecen todos los valores entre 0 y 8 excepto el 7. ¿Es posible encontrar alguna solución donde se consiga también este valor? ¿Es posible resolver el problema con recipientes de 3, 8 y 11 litros para conseguir 9 litros en uno de ellos?

Después de varios intentos con distintos valores, podemos llegar a formular una hipótesis sobre valores admisibles y dar demostraciones de para tales formulaciones. Así pues, si denotamos por a, b, c las capacidades de los envases y d el valor final, se puede probar lo siguiente:

Si $a = 1$ y $1 + b > c/2$, entonces el problema tiene solución para cualquier valor d tal que $1 < d < c$.

Un enunciado que generaliza el problema original es el siguiente:

Si c es múltiplo de 4, $a = c/2 - 1$, $b = c/2 + 1$ y $d = c/2$, entonces el problema tiene solución. (La exigencia de que c sea múltiplo de 4 hace que a y b sean impares sin factores comunes.)

A pesar de ser un teorema de existencia, que no proporciona la solución, la demostración será constructiva y dará una indicación sobre la forma de resolverlo.

Paso 1. Basta conseguir $(0, 1, c - 1)$ pues, llenando el primer recipiente, se llega a $(a, 1, c - a - 1)$ y, por hipótesis, $c - a - 1 = c/2 = d$.

Paso 2. La ecuación diofántica

$$aX - bY = 1$$

tiene como solución $X = c/4$ e $Y = c/4 - 1$.

Paso 3. Realizamos la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned} (0, 0, c) &\rightarrow (a, 0, c - a) \rightarrow (0, a, c - a) \\ &\rightarrow (a, a, c - 2a) \rightarrow (a - (b - a), b, c - 2a) \rightarrow (2a - b, 0, c - 2a + b) \end{aligned}$$

(el último paso sólo se realiza cuando el segundo recipiente está lleno).

Haciendo esta secuencia X veces, llegamos a la situación

$$(aX - bY, 0, c - (aX - bY)),$$

es decir $(1, 0, c - 1)$, a la que se aplica el paso 1.

Se observa que la clave está en que la ecuación $aX - bY = 1$ tiene solución cuando a y b son primos entre sí.

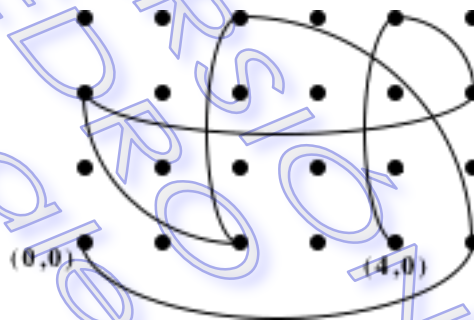
Solución mediante grafos. Cualquier situación intermedia de los recipientes puede representarse mediante un par (b, c) , donde b representa la

cantidad de líquido en el recipiente B y c la que hay en el recipiente C . Como la posición inicial es $(0, 0)$ y la final $(4, 0)$, si representamos un grafo cuyos nodos lo forman los elementos del conjunto

$$B \times C = \{(b, c) : 0 \leq b \leq 5, 0 \leq c \leq 3\},$$

unidos por líneas indicando que se puede pasar de uno a otro de los vértices mediante un movimiento válido de los recipientes, cualquier camino que una la posición inicial con la final será una respuesta válida al problema.

En el diagrama se indica solamente una solución al problema original.



Problemas relacionados.

1. Se desea cocer un huevo durante exactamente 15 minutos pero se dispone solamente de un reloj de arena de 7 minutos y de otro de 11 minutos.
2. Más difícil es cronometrar 9 minutos con un reloj de 7 y otro de 4 minutos.
3. Se dispone de tres clases de té: de Ceilán, a 5 pesos la libra; de India, a 8 pesos la libra; y de China, a 12 pesos la libra. ¿En qué proporciones hay que mezclarlos para obtener un té al precio de 6 pesos la libra?

Este problema no tiene solución única. Para verlo, observemos que, tomando x libras del té de Ceilán, y libras del de India y z libras del de China, debe verificarse que

$$\frac{5x + 8y + 12z}{x + y + z} = 6,$$

es decir $x = 2y + 6z$, ecuación lineal cuya mínima solución entera es $x = 8, y = 1$ y $z = 1$.

6. TORRE DE HANOI.

El puzzle llamado la torre de Hanoi fue inventado por el matemático francés **Édouard Lucas** en 1883 y se basa en el antiguo ritual de la torre de Brahma.



La leyenda dice que la torre de Brahma en Benarés tiene un poste con 64 discos dorados colocados en orden decreciente de tamaño. Estos discos deben moverse, uno por uno, por los monjes del templo a otro poste, con la ayuda de un tercer poste, de modo que nunca un disco de mayor tamaño esté colocado sobre otro de menor tamaño. Se decía que en el momento en que se lograra la trasposición, el templo se derrumbaría y la tierra desaparecería.

Así pues, el juego consiste en una torre formada por ocho discos insertados en una varilla y colocados en forma de pirámide (cada disco es de mayor tamaño que su inmediato superior). El objetivo es transferir la torre completa a otra varilla, utilizando una tercera varilla auxiliar, moviendo sólo un disco cada vez y nunca colocando uno más grande sobre otro más pequeño. Este puzzle es bien conocido entre los estudiantes de computación porque aparece en prácticamente todo texto introductorio sobre estructuras de datos o algoritmos. Su solución involucra dos importantes tópicos, como son:

- Funciones recursivas y apilamientos.
- Relaciones de recurrencia.

Solución recursiva. Indicaremos las tres varillas con los símbolos F (fuente), A (auxiliar) y D (destino). Para entender y apreciar mejor la siguiente solución debes tratar de resolver el puzzle para un pequeño número de discos, digamos 2, 3 y quizá 4. Al resolver el problema, antes o después el disco inferior tendrá que moverse de F a D. En este momento, el resto de los discos están apilados en orden descendente de tamaños en A. En este momento, el problema se repite con un disco menos, pasando F a ser la varilla auxiliar y A la varilla fuente. De este modo, dado un número N de discos, el problema estará resuelto si sabemos cómo realizar las siguientes tareas:

- (1) Mover los $N - 1$ discos superiores de F a A (usando D como varilla auxiliar).
- (2) Mover los discos inferiores de F a D.
- (3) Mover $N - 1$ discos de A a D (usando F como varilla auxiliar).

Definimos para ello una función “Resolver” con 4 argumentos N, F, A, D y construimos el siguiente algoritmo:

```

Resolver (N, F, A, D)
  Si  $N = 0$ , salir;
  Si no,
    Resolver (N - 1, F, D, A)
    Mover de F a D
    Resolver (N - 1, A, F, D).
  
```

Este proceso sirve como definición de la función “Resolver”. Esta función es recursiva puesto que se define por sí misma con valores decrecientes de N hasta un valor límite (en nuestro caso $N = 0$).

Relaciones de recurrencia. Sea T_N el número de movimientos necesarios para resolver el puzzle con N discos. Es fácil comprobar que $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 7$ y $T_4 = 15$.

Trataremos de deducir una fórmula general. La solución recursiva anterior involucra mover dos veces $N - 1$ discos de una varilla a otra y hacer un movimiento adicional en medio. Resulta entonces:

$$T_N \leq T_{N-1} + 1 + T_{N-1}.$$

La desigualdad sugiere que es posible mover N discos con menor número de movimientos que $2T_{N-1} + 1$. Este no es el caso aquí. En efecto, en el momento en que tengamos que mover el disco inferior, $N - 1$ discos han tenido que moverse de F a A en T_{N-1} movimientos. Este último disco se moverá de F a D en un único movimiento. A continuación, se necesitan exactamente T_{N-1} movimientos para trasladar las $N - 1$ piezas de A a D.

La fórmula de recurrencia es pues:

$$T_0 = 0, T_N = 2T_{N-1} + 1.$$

Si definimos $S_N = T_N + 1$, entonces $S_0 = 1$, $S_N = T_N + 1 = 2S_{N-1}$, fórmula que puede resolverse exactamente, dando como solución $S_N = 2^N$. De este modo, $T_N = 2^N - 1$, para $N \geq 0$.

Relaciones de recurrencia de este tipo aparecen en gran variedad de problemas de matemáticas y en sus aplicaciones.

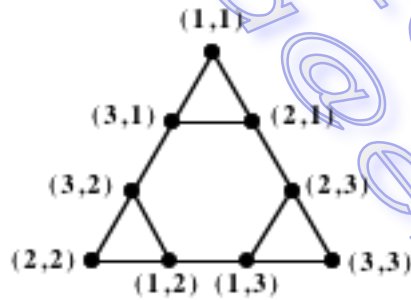
Observaciones. Si se mueve un disco por segundo y hay 64 discos, se necesitan 585 billones de años para completar el desafío de la torre de Brahma.

Observemos también que la fórmula $T_N = 2^N - 1$ corresponde al número de subconjuntos de un conjunto con N elementos (sin el vacío), y también al número de permutaciones con los dígitos 0 y 1 (sin el cero), por lo que puede darse una solución al problema asociando un número en base dos a cada paso de la solución.

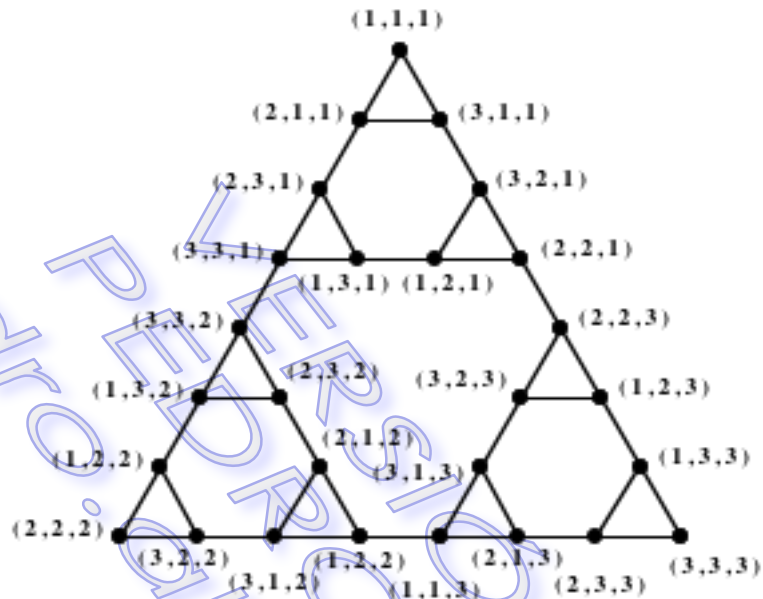
Solución mediante grafos. Se puede asociar un grafo al problema de la siguiente forma: numeramos las barras 1, 2 y 3 y denotamos por (a_1, a_2, \dots, a_n) a un punto donde a_1 es la posición del disco más pequeño, a_2 la posición del segundo disco más pequeño, y así sucesivamente, a_n indica la posición del disco más grande. De este modo, $1 \leq a_i \leq 3$ y unimos los puntos de este conjunto por líneas si se puede pasar de uno a otro mediante un movimiento admisible. Por ejemplo, el grafo correspondiente a una sola barra es:



El correspondiente a dos barras es:



El correspondiente a tres barras es:



Como se observa, cada uno de los grafos consiste en tres copias del grafo correspondiente al caso anterior conectados por una línea simple, lo cual es consecuencia de la solución recursiva que hemos indicado anteriormente. Esta disposición permite mostrar la relación entre este grafo y el triángulo de Pascal. Para ello, escribimos los elementos del triángulo de Pascal en base dos y unimos todos los nodos adyacentes que valgan uno (es decir los números combinatorios impares). Resulta así la configuración recién dibujada y nos lleva también a plantear el problema resuelto en el siglo pasado por E. Lucas que pregunta cuándo el número combinatorio $C(n, m)$ es impar.

Comentaremos por último que hay una interesante relación entre la solución de la torre de Hanoi y un sistema de códigos utilizado en señales codificadas que consisten en una sucesión de ceros y unos de una longitud fija de modo que cada elemento se diferencia del anterior en un solo bit. Este sistema, llamado hoy en día BRGC (binary reflected Gray code), fue diseñado por **Frank Gray** en 1940, para evitar el efecto de los errores que se cometían al emitir señales en sistemas electrónicos de comunicación.

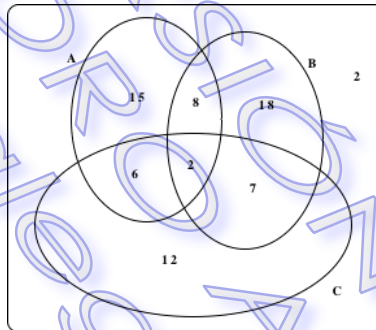
Hoy en día, aplicaciones del BRGC aparecen con mucha frecuencia, principalmente en la exactitud de los dispositivos que convierten escalas analógicas en digitales (odómetros de los vehículos, simulaciones en túneles de viento para los aviones, etc.).

7. COMBINATORIA.

Después de realizar una encuesta sobre un cierto artículo, un estadístico informó lo siguiente:

15 personas preferían la marca A; 18 la marca B; 12 la marca C; 8 personas las marcas A y B; 6 las marcas A y C; 7 la B y C; a dos les agradaban las tres marcas y a dos no les gustaba ninguna de ellas.

Cuando el estadístico afirmó que entrevistó a 30 personas, fue despedido. ¿Por qué?



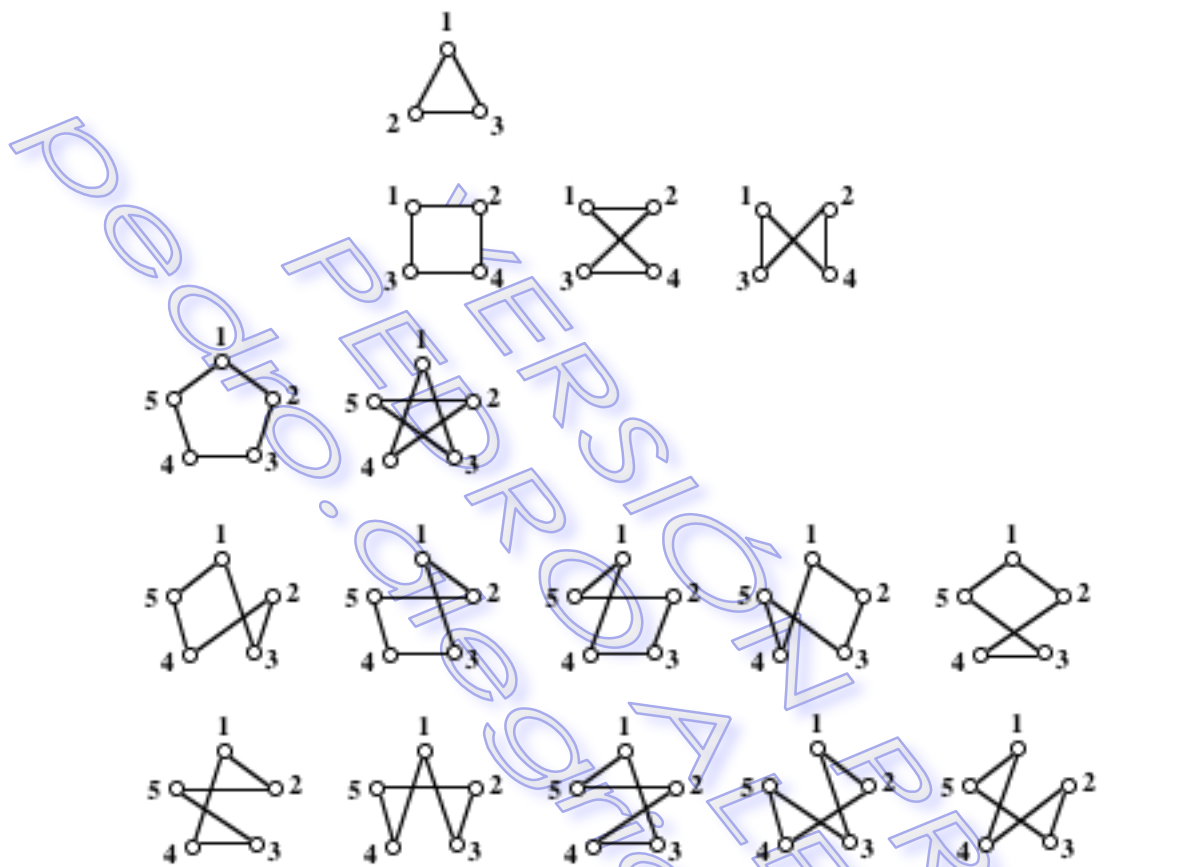
Problemas de este tipo se basan en las fórmulas para contar el número de elementos de un conjunto que es unión de otros. Para tres conjuntos, la fórmula es la siguiente:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) = & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ & - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ & + \text{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

El siguiente problema de combinatoria también es de utilidad en muchas situaciones prácticas.

¿De cuántas formas se pueden unir n ciudades de modo que se forme un circuito cerrado sin pasar dos veces por el mismo sitio?

Gráficamente, las soluciones para valores pequeños de n son sencillas:



Para saber el número de soluciones en el caso general, basta observar que hay $n!$ posibles permutaciones de las n ciudades. Por cada una de ellas, hay n posibles movimientos circulares (que no alteran el circuito), con lo que quedan $(n - 1)!$ permutaciones circulares. Como el circuito es el mismo al ser recorrido en orden inverso, se debe dividir por dos, lo que da el resultado final de $(n - 1)!/2$ posibles caminos.

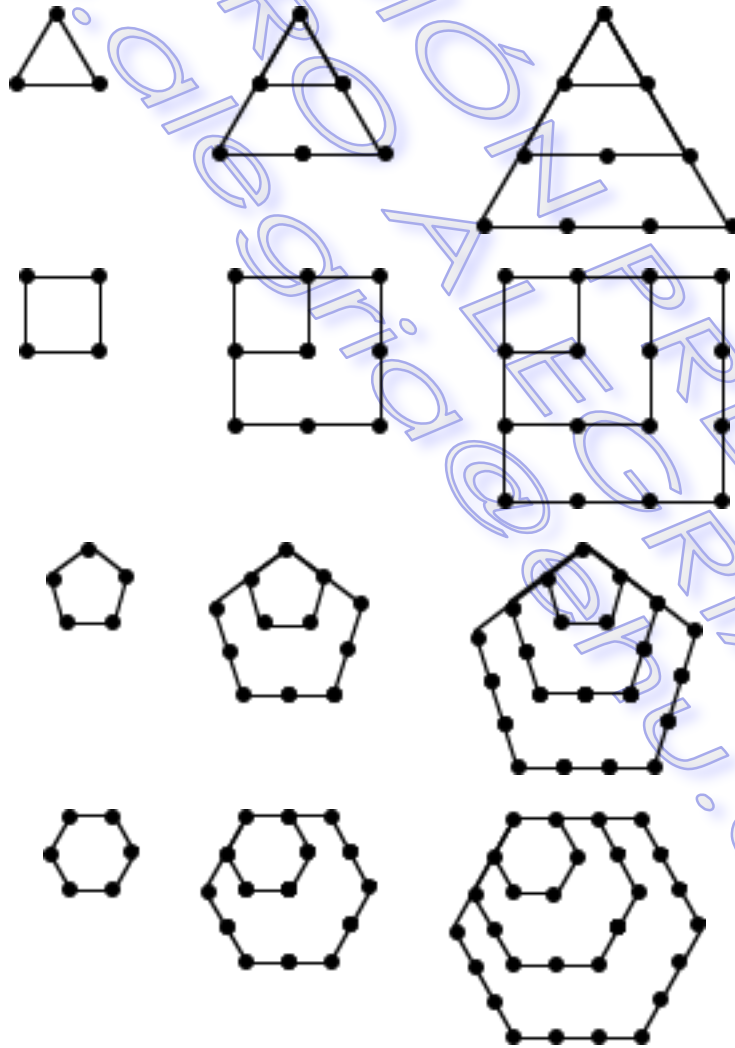
Si se desea dar una lista de todos ellos, podemos aplicar el siguiente método:

- Numeramos las n ciudades con los n primeros números naturales.
- Colocamos el 1 en primer lugar (lo que evita permutaciones circulares equivalentes).
- Colocamos en segundo lugar un número menor que el que ocupa el último lugar (evitando así posibles inversiones).
- El resto de posiciones consiste en todas las permutaciones de los $n - 3$ elementos restantes.

8. LA REVANCHA DE ARQUIMEDES.

Hace dos mil años, **Arquímedes de Siracusa** planteó un problema (publicado en "The Sandreckoner") a **Apolonio de Perga** que se hizo famoso hasta nuestros días.

El problema se basa en ciertos trabajos que hizo Pitágoras 600 años a.C. Los pitagóricos representaban frecuentemente los números como puntos formando patrones específicos; así, por ejemplo, los números 3, 6 y 10 se llaman triangulares, porque sus puntos forman triángulos. Del mismo modo, los números 4, 9, 16 son cuadrados al formar figuras cuadradas. Similarmente 6, 15 y 28 son hexagonales y así sucesivamente.



Matemáticamente, cada clase de números es una suma parcial. Los triangulares se generan sumando enteros positivos consecutivos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3 &= 1 + 2, \\ 6 &= 1 + 2 + 3, \\ 10 &= 1 + 2 + 3 + 4. \end{aligned}$$

Los números cuadrados surgen de la suma de números enteros impares positivos consecutivos:

$$\begin{aligned} 4 &= 1 + 3, \\ 9 &= 1 + 3 + 5, \\ 16 &= 1 + 3 + 5 + 7. \end{aligned}$$

El problema de Arquímedes, al que llamaremos problema del ganado, está relacionado con los números triangulares y cuadrados. Dice lo siguiente:

Calcula, joh amigo!, los bueyes del sol, dándole a tu mente entretenimiento, si tienes parte de la sabiduría. Calcula el número que alguna vez pastó en la isla siciliana de Trinacria y estaban divididos de acuerdo a su color en cuatro manadas, una blanca, una negra, una amarilla y otra moteada. Los toros eran mayoría en cada una de ellas. Además:

$$\begin{aligned} \text{toros blancos} &= \text{toros amarillos} + (1/2 + 1/3) \text{ toros negros,} \\ \text{toros negros} &= \text{toros amarillos} + (1/4 + 1/5) \text{ toros moteados,} \\ \text{toros moteados} &= \text{toros amarillos} + (1/6 + 1/7) \text{ toros blancos,} \\ \text{vacas blancas} &= (1/3 + 1/4) \text{ manada negra,} \\ \text{vacas negras} &= (1/4 + 1/5) \text{ manada moteada,} \\ \text{vacas moteadas} &= (1/5 + 1/6) \text{ manada amarilla,} \\ \text{vacas amarillas} &= (1/6 + 1/7) \text{ manada blanca.} \end{aligned}$$

Si tú, joh amigo!, puedes dar el número de toros y vacas en cada manada, tú eres ni sabio ni torpe con los números, pero aún no puede contársete entre los sabios. Considera sin embargo las siguientes relaciones entre los toros del sol:

$$\begin{aligned} \text{toros blancos} + \text{toros negros} &= \text{número cuadrado,} \\ \text{toros moteados} + \text{toros amarillos} &= \text{número triangular.} \end{aligned}$$

Cuando hayas entonces calculado los totales de la manada, joh amigo!, ve como conquistador, y descansa seguro, que te has probado hábil en la ciencia de los números.

Desde muy pronto los matemáticos reconocieron que la manada más pequeña que cumple las siete primeras condiciones contiene 50.389.082 animales. Las dos últimas condiciones hacen el problema mucho más difícil. En 1880, Nelson (investigador alemán) probó que la respuesta contiene 206.545 cifras, empezando por 7766. En 1965, un grupo canadiense encontró la primera solución completa con ayuda de un ordenador.

Este problema ha servido para poner a prueba superordenadores, como el CRAY-1 de un laboratorio de California. La ventaja de este tipo de problemas es que las soluciones pueden comprobarse fácilmente sustituyendo directamente en las ecuaciones.

CONCLUSIÓN.

Se consideran como ciencias exactas a la astronomía, la física y las matemáticas. Aunque tal vez los descubrimientos no utilizan el mismo rigor lógico en las tres. En el libro *“Conceptos de matemática moderna”* de **Ian Stewart**, publicado por Alianza Editorial, se cuenta una anécdota sobre el tema.

Un astrónomo, un físico y un matemático están de vacaciones en Escocia. Viajando en tren observan, al mirar por la ventanilla, una oveja negra que se encuentra en medio del campo.

Comenta el astrónomo: “¡Qué interesante!, todas las ovejas escocesas son negras.”

El físico responde diciendo: “¡No, no! ¡Algunas ovejas escocesas son negras!”

El matemático, perplejo y ligeramente enfadado, replicó: “En Escocia existe al menos un campo, que contiene al menos una oveja, uno de cuyos lados, al menos, es negro.”