Problemas stiff

Relación 5. Análisis Numérico. 4 de Matemáticas

1) Hallar el radio stiff del sistema diferencial:

$$\begin{cases} u' &= -10u + 9v, \\ v' &= 10u - 11v. \end{cases}$$

¿Cuál es la mayor longitud de paso que puede utilizarse con un método de Runge-Kutta de cuatro evaluaciones y orden cuatro?

2) Hallar la solución teórica del problema:

$$\begin{cases} y' &= -100y + \cos x, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

¿En qué sentido puede decirse que la ecuación anterior es stiff? ¿Cuál es el mayor valor h que puede utilizarse para aproximar la solución con la regla de Euler?

3) Hallar la aproximación $(2,2)$ de Padé a la función $exp(q)$.

4) Comprobar que el método Runge-Kutta implícito de orden 4:

$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{h}{2}\right)(k_1 + k_2),$$
$$k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4}\right)hk_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_2\right),$$
$$k_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hk_1 + \left(\frac{1}{4}\right)hk_2\right),$$

es A-estable

5) Dado el método de paso fraccionario:

$$y_{n+\frac{2}{3}} = y_n + \left(\frac{h}{3}\right)\left(f_{n+\frac{2}{3}} + f_n\right),$$
$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{4}\right)\left(3f_{n+\frac{2}{3}} + f_n\right).$$

(i) Escribirlo como un método Runge-Kutta.

(ii) Comprobar que su función de estabilidad es la aproximación Padé $(2,1)$ a la función exponencial.

(iii) ¿Es este método $A(0)$-estable?

6) Estudiar la $A(0)$-estabilidad del método semi-explícito de Runge-Kutta de orden 4:

$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{h}{6}\right)(k_1 + 4k_2 + k_3),$$
$$k_1 = f(x_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{4}k_1 + \frac{h}{4}k_2\right),$$
$$k_3 = f(x_n + h, y_n + hk_2).$$

7) Comprobar la A-estabilidad del método de Runge-Kutta:

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} - y_n = \left(\tfrac{h}{2}\right)(k_1 + k_2)\,,\\
&k_1 = f\left(x_n, y_n\right),\\
&k_2 = f\left(x_n + h, y_n + \left(\tfrac{h}{2}\right)(k_1 + k_2)\right).
\end{aligned}$$

¿Cuál es el orden del método?

8) Consideremos el M.L.M.:

$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{h}{2}\right)\left(y_{n+1}^{(1)} + y_n^{(1)}\right) - \left(\frac{h^2}{12}\right)\left(y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)}\right),$$

donde el superíndice denota orden de derivada respecto de x.

(i) Comprobar su consistencia.

(ii) Demostrar que el método es cero-estable.

(iii) Calcular su orden y su constante de error.

(iv) Calcular su función de estabilidad. ¿Tiene alguna propiedad importante su región de estabilidad absoluta?.