

Problemas de Integración

Relación 1. Análisis Numérico. (4º)

1.- Encontrar una fórmula

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx \approx A_0 f\left(\frac{-3}{4}\pi\right) + A_1 f\left(\frac{-1}{4}\pi\right) + A_2 f\left(\frac{1}{4}\pi\right) + A_3 f\left(\frac{3}{4}\pi\right)$$

que sea exacta para polinomios de grado tres.

2.- Deduzca la fórmula de Newton-Cotes para $\int_0^1 f(x) \, dx$

usando como nodos $0, 1/3, 2/3$ y 1 .

3.- Comprobar que la siguiente fórmula es exacta para polinomios de grado ≤ 4

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{1}{90} \left[7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1) \right]$$

4.- Utilice interpolación polinomial de Lagrange para deducir la expresión de la forma

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx A f\left(\frac{1}{3}\right) + B f\left(\frac{2}{3}\right)$$

Transforme la fórmula anterior para que sirva para integrar sobre $[a, b]$.

5.- Deduzca la regla compuesta para $\int_a^b f(x) \, dx$ que se basa en la regla del punto medio $\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx 2 f(0)$.

Proporcione fórmulas tanto para el caso de nodos uniformemente espaciados como para nodos no uniformemente espaciados.

6.- ¿Existe una expresión de la forma $\int_0^1 f(x) \, dx \approx \alpha [f(x_0) + f(x_1)]$ que integre todos los polinomios cuadráticos?

7.- Aplicar la regla del trapecio compuesta a $\int_0^1 x^2 \, dx$ para $n = 1, 2, 4, 8$ y usar la extrapolación al límite de Richardson para mejorar el resultado (comprobar error).