

MATHEMATICA

1.1 SARRERA

Mathematica izeneko programak matematikan erabiltzen diren eragiketa, funtzio edo prozesuak burutzeko tresnak eta erraztasunak eskeintzen ditu. Bai matematika zientzia irakasteko eta baita ikerkuntza garatzeko ere lengoai informatiko hau oso erabilgarria da. Barnean definiturik dauden edozein arloko funtzio ugaritasuna eta programak magultasunez onartzen duen funtzioen nahastura dira lengoaiaren punturik eraginkorrenak. Hau bai, aginduen idazkera ingelesez dago eta horregatik hizkuntz honen onarriko ezaguera lagungarria da. Hala ere, hizkuntz guztietan hitz tekniko gehien idazkera antzekoa da. Bi aholku garrantzitsuek denbora asko aurreztuko digute: aurrenekoa, funtzioen parametroak osatzerakoan zentzu komuna erabiltzea da, eta bigarrena, agindu ugarien idazkera zehatza oroituz programaren laguntza erabiltzen jakitea da.

1.2 IDAZKERA

Programa piztu ondoren eta bere pantailan ezarritak gaudenean aginduak eta beraien parametroak idatziko ditugu eta burutzeko **mayusc+enter** sakatuko dugu. Eragiketaren emaitza pantailan argitaratu nahi ez badugu, nahikoa da agindu amaieran `;` erantsiz. Lengoi honen idazkerak kontutan hartzeko berezitasun gutxi batzuk dauzka:

- Matematika-ren barneko funtzioen aurreneko karaktera letra larritan idatziko dugu.

Adib: `Factor[x^2+2*x+1]`

- Funtzioek bi datu motaz osatutak daude, derrigorrezko parametroak eta hautazko aukerak, hain zuzen.

Adib: `ListPlot[{{0,1},{1,0.5},{2,1.5}},PlotJoined→True]`

1.2.1 Zenbaki-bildumak

Matematikaren kontextu ezberdinetan agertutako zenbaki-sorta gehienak parentesien artean sartzen ditugu (espazioaren puntuen koordinatuak, tarte irekiaren muturrak, eragiketen faktore komunak, ...). Matematikak hesi mota bakoitza ikur berezietaz mugatzen ditu:

- Parentesiak `(...)`: Eragiketaren lehentasunak adierazteko.

Adib: `((3+5)^2-2*sqrt(5))/10.`

- Makoak `[...]` : Funtzioen parametroak mugatzeko.
Adib: `Cos[3.1416]`
- Giltzak `{...}` : Zenbaki zerrendak definitzeko (bektoreak, matrizeak,...).
Adib: `mat={{-2,1},{-3,4}}; MatrixForm[mat]`

1.2.2 Ekuazioen ikurrak

Berdintza ikurrak (=) esanahi ezberdinak adieraz ditzake, adibidez esleipenarena, konparaketa, arauak, ... Matematika-k ere kasu honetan eragila mota bakoitza ikur ezberdinetaz bereizten ditu:

- `[=]` : Esleipena.
- `[==]` : Ekuazioetako konparaketa da. Baita \geq , \leq , $<$ eta $>$ ezberdintzerako darabiltzagu ere. Adibidez $x^2 - 3x + 1 = 0$ ekuazioa `x^2 - 3*x + 1 == 0` adieraziko genuke.
- `[eragiketa/. {aldagaia→balio}]` : Eragiketa balioztatzen du aldagaiak emandako balio hartzen duenean (arautzat), balio hori betirako esleitu gabe.
Adib: `a=2.0; b=a*Pi;`
`d=e*Pi/.{e→2.0};`
`{a,b,d,e}`
- `[Clear[aldagaia]]` : Aladagaiaren edukina ezabatuko du;
Adib: `Clear[a]; a`

1.2.3 Programaren laguntza

Sarreran komentatu dugun moduan, programaren laguntza bizkor erabiltzen jakitea aginduen idazkera ezagutzea bezain garrantzitsua da. Aginduaren idazkerari buruz ala funtzioaren parametroen kokapenari buruz zalantzak edukitzekotan lotsarik gabe laguntzari ekiten badiogu etekin onak aterako ditugu. Mathematica-ren barneko funtzioen izenak eta berauekin lotutak dauden kontzeptuarenak antzekoak dira, baina ingelesez. Horregatik ingeles pixka bat menperatzea ala hiztegia eskura edukitzea lagungarria izan daiteke.

- `[?*karakter-katea*]` : Izenean idatzitako karakter-katea tartean daukaten aginduen zerrenda agertuko da.
Adib: `?*olv*`
- `[??funtzioa]` : Eskatutako funtzioaren informazio ugari eskainiko du.
Adib: `??Solve`

1.3 OHIZKO AGINDUEN ZERRENDA

Mathematica programak kalkulu ugarietarako barneko funtzio aurredefinituak dauzka. Material guzti horretatik agindu ohizkoenak aurkeztuko ditugu arloz arlo.

1.3.1 Aritmetika

- `N[adierazpena,m]` : Adierazpena m digitoetaz plazaratuko du.
Adib: `N[Pi,15]`
- `Pi, E, I, Infinity, Degree, ...` : Konstante hauek aurredefinitutak daude.
- `Round[x], Floor[x], Ceiling[x]` : Zenbaki osoetara borobiltzeko edo hurbiltzeko.
Adib: `Round[5.25]`
- `Abs[x], Mod[n,m]` : x -ren balio absolutua eta n/m zatiketaren hondarra.
Adib: `Mod[8,3]`
- `Arg[z], Re[z], Im[z], Conjugate[z]` : z zenbaki konplexuaren argumentua, zati erreal, zati zatikiarra eta konjokatua.
Adib: `Conjugate[1.5-2.6*I]`
- `Sin[x], Cos[x], Tan[x], Cot[x], Sec[x], Csc[x]` : Ohizko funtzio trigonometrikoak.
- `ArcSin[x], Sinh[x], ArcSinh[x]` : Ohizko alderantzizko funtzio trigonometrikoak.
- `Sqrt[x], Exp[x], Log[x], Log[b,x]` : Hurrenez hurren \sqrt{x} , e^x , $\ln x$ eta $\log_b x$.
- `ReadList["fitxategi",Number,RecordLists→True]` : Aipatutako fitxategitik zenbaitziko datuak irakurriko ditu eta zerrenda batean sartu.
Adib: `dat=ReadList["c:/garatu/datuak.txt",Number,RecordLists→True]`

1.3.2 Zerrendak eta matrizeak

$zer = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots\}, \dots, \{a_{n1}, a_{n2}, \dots\}\}$ azpizerrendetaz osatutako zerrenda nagusiaz matrizea definiturik dago eta a_{ij} osagaia $zer[[i,j]]$ adierazpenaz idatziko dugu.

- `Table[f/i,{i,i0,in,Δi}]` : Zerrenda berria i -ren funtziopeko $f[i]$ elementutaz osatuko du $i = i_0, i_0 + \Delta i, \dots, i_n$ tartean zehar.
Adib: `zer=Table[i^2,{i,1,5}]`

- `AppendTo[zer,d], PrependTo[zer,d]` : d osagaia zer zerrendari erantsiko dio amaieran ala hasieran.
Adib: `AppendTo[zer,36]`
- `Intersection[z1,z2], Union[z1,z2]` : Hurrenez hurren $z_1 \cap z_2$ eta $z_1 \cup z_2$.
- `MatrixForm[mat]` : mat zerrenda konposatua marizearen antzaz erakutsiko du.
Adib: `MatrixForm[dat]`
- `Det[mat], Inverse[mat], Transpose[mat]` : Hurrenez hurren mat matrizearen dterminantea, alderantzizkoa eta iraulia.
- `LinearSolve[mat,b]` : $mat\mathbf{x} = b$ sistema linealaren soluzioa kalkulatu du.
Adib: `LinearSolve[dat,{2,0,-6}]`

1.3.3 Funtzioak, polinomioak eta ekuazioak

- `f[x_]=adierazpena(x)` : x -ren menpeko f funtzioa definitu dugu.
Adib: `f[x_]=Sin[x]/x; Plot[f[x],{x,-2*Pi,2*Pi}]`
- `Coefficient[polin,x,n]` : Polinomioan agertzen den x^n -ren koefizientea.
- `PolynomialQuotient[p1,p2,x]` : x -ren funtziopeko p_1/p_2 eragiketaren zatidura.
- `Factor[polin]` : Polinomioa beronen biderkagaietan bereiziko du.
- `Collect[adierazpen,x]` : Adierazpena x -ren berreduretan garatuko du.
- `Simplify[adierazpena]` : Adierazpena bakuntzeko.
- `InterpolatingPolynomial[{x1,y1},..., {xn,yn},x]` : Puntu sorta horretatik igarotzen den $n - 1$. mailako polinomioa.
Adib: `puntuak={{0,2},{1,1},{2,3},{3,2}};`
`g[x_]=InterpolatingPolynomial[puntuak,x]`
`Plot[g[x],{x,-1,4}]`
- `Solve[ekuazioak,{aldagai-multzoa}]` : Ekuazioek ondorioztatzen dituzten aldagaien balioak askatuko ditu.
Adib: `Solve[{2*x-y==5,-3*x-4*y==2},{x,y}]`
- `FindRoot[ekuazioak,{x,x0,x1}]` : Ekuazioaren soluzioa zenbakikoki $x \in [x_0, x_1]$ tartean bilatuko du .

1.3.4 Limiteak, deribatuak eta integralak

- $\text{Limit}[f[x], x \rightarrow a]$: $\lim_{x \rightarrow a} f[x]$ limitea balioztatutako du.
Adib: `Limit[Sqrt[x^2 - 1]/(2*x+3), x -> Infinity]`
- $f'[x], D[f[x], \{x, n\}]$: Hurrenez hurren f -ren 1. go eta n . deribatuak x -rekiko.
- $\text{Integrate}[f[x], x]$: f -ren integrala x -rekiko.
- $\text{NIntegrate}[f[x], \{x, x_0, x_1\}]$: f -ren zenbaizko integral definitua $[x_0, x_1]$ tartean.
Adib: Zenbakizko integraziorako Simpson-en metodoaren adierazpen grafikoa

```
Trap[f_, x_, n_, x0_, x1_] := TrapLag[Function[x, f], n, x0, x1];
TrapLag[f_, n_, x0_, x1_] := Module[{i, h=(x1-x0)/n, xb=x0, f0=N[f[x0]], f1,
marrak={Line[{{x0, 0}, {x0, N[f[x0]]}]}, puntuak={{x0, N[f[x0]]}}, bat=0},
For[i=1, i<=n, i++, xb=xb+h; f1=N[f[xb]]; bat=bat+h*N[(f0+f1)/2];
AppendTo[puntuak, {xb, f1}]; AppendTo[marrak, Line[{{xb, 0}, {xb, f1}}]]; f0=f1];
Show[{Plot[f[r], {r, x0, x1}, DisplayFunction->Identity],
ListPlot[puntuak, PlotJoined->True, DisplayFunction->Identity],
Graphics[marrak]}, DisplayFunction->$DisplayFunction];
Print["batura hurbildua=", bat];
Print["Integral zehatza", N[NIntegrate[f[x], {x, x0, x1}], 10]]];
```

```
Trap[0.4 * r^4 - 2 * r^3 - 2 * r^2 + 10 * r + 20, r, 20, 0.0, 5.0]
```

- $\text{Sum}[f[k], \{k, k_0, k_1, \Delta k\}]$: $\sum_{k=k_0}^{k_1} f[k]$ batukaria balioztatutako du.
- $\text{Product}[f[k], \{k, k_0, k_1, \Delta k\}]$: $\prod_{k=k_0}^{k_1} f[k]$ biderkaria balioztatutako du

1.3.5 Estatistika

- $\text{Mean}\{x_1, \dots, x_n\}$: Zenbaki-zerrendaren batezbestekoa, $B = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$.
- $\text{Variance}\{x_1, \dots, x_n\}$: Zenbaki-zerrendaren bariantza, $A = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - B)^2$.
- $\text{Max}\{x_1, \dots, x_n\}$: Zenbaki-zerrendaren baliorik handiena.
Adib: `zer = {-1, 6, 4, -3}; {Mean[zer], Variance[zer]}`
- $\text{Random}[\text{Real}, \text{min}, \text{max}]$: Emandako tartean zorizko zenbaki erreala emango du.
- $\text{NormalDistribution}[b, d]$: Banaketa normala b batazbesteko eta d desbiazioaz.
- $\text{UniformDistribution}[\text{min}, \text{max}]$: Banaketa uniforme emandako tartean. Agindu hau erabiltzeko <<Statistics'ContinuousDistributions' paketea sartu behar dugu.

- `BinomialDistribution[n, p]` : p probabilitateko eta n saioetako banaketa binomiala. Agindu hau erabiltzeko <<Statistics'DiscreteDistributions' paketea sartu behar dugu.
- `PDF[banaketa, x]` : Banaketaren dentsitate funtzioa definituko du.
 Adib:

```
<<Statistics'ContinuousDistributions'  
ban[x_] = PDF[NormalDistribution[0,1],x]  
Plot[ban[x],{x,-3,3}];
```

1.4 PROGRAMAZIOA ETA GRAFIKOAK

Orain arte Mathematica-ren eraginkortasuna agindu arruntetan ikusi dugu. Atal honetan, bai grafikoetan eta bai programazioan ere, egitura konplexuagoak eraikitzeko konbina daitezkeen agindu batzuk ikusiko ditugu. Honela Matematika-z lortu daitezken prozesu eta irudi ikusgarriak egiten ikasiko dugu.

1.4.1 Programazioa

- `Do[aginduak,{k,k0,k1,Δk}]` : Aginduak $k = k_0, k_0 + \Delta k, \dots, k_1$ zenbakitzailearen balioetarako errepikatuko ditu.
- `While[baldintza,agindu]` : Baldintza bete den bitartean agindu-sorta burutuko du.
 Adib:

```
i=1;While[i<=5,a=i^2;Print[a];i=i+1]
```
- `For[k = k0, k = k1, k = k + Δk, aginduak]` : Aginduak $k = k_0, k_0 + \Delta k, \dots, k_1$ zenbakitzailearen balioetarako errepikatuko ditu.
- `If[baldintza,agindu1,agindu2]` : Baldintza betetzen bada lahanango agindua beteko du, bestela bigarrena beteko du.
- `Which[baldintza1,agindu1,baldintza2,agindu2,...]` : Lahanango baldintza betetzen bada, ondorioz lehenengo agindu-sorta burutuko du, bigarren baldintza betetzen bada, ondorioz bigarren agindu-sorta,...
- ```
Adib: f[x_]=Which[x<0,-1,x>=0,1];
Plot[f[x],{x,-5,5}];
```
- `Module[{x,y,...},aginduak]` : Aldagai lokalen menpeko agindu-sorta beteko du.
- `Block[{x,y,...},aginduak]` : Aldagai orokorren menpeko agindu-sorta beteko du.

## 1.4.2 Grafikoak

- $\text{Plot}[\{f_1(x), f_2(x), \dots\}, \{x, x_0, x_1\}, \text{aukerak}]$  :  $[x_0, x_1]$  tartean  $x$  aldagai askearen menpeko  $f_i(x)$  funtzioen grafikak marraztuko ditu. “Plot” aginduak marrazki-aukera ugari onartzen ditu eta hauen artean “AspectRatio” (marrazkiaren luzera eta zabaleraren arteko proportzioa zehazten du) eta “DisplayFunction” (“DisplayFunction – > Identity” marrazkia izkutatzeko eta “DisplayFunction – > \$DisplayFunction” marrazkia plazaratzeko) garrantzitsuenetakoak dira hain zuzen.
- $\text{Show}[\{gr_1, gr_2, \dots\}]$  : Zenbait grafika nahastuko ditu irudi bakar batean.
- $\text{Plot3D}[f(x, y), \{x, x_0, x_1\}, \{y, y_0, y_1\}]$  :  $[x, x_0, x_1] \times [y, y_0, y_1]$  laukizuzenaren gainean  $f(x, y)$ -ren irudi tridimentsionala marraztuko du.
- $\text{ParametricPlot}[\{x(t), y(t)\}, \{t, t_0, t_1\}]$  :  $(x(t), y(t))$  ibilbidea marraztuko du.  
Adib:  $\text{ParametricPlot}[\{\text{Cos}[t], \text{Sin}[t]\}, \{t, 0, 2*\text{Pi}\}, \text{AspectRatio} - > 1];$
- $\text{ListPlot}[\{\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_n, y_n\}\}, \text{PlotJoined} - > \text{True}]$  : Puntuen zerrenda lotzen duen poligonalera eraikiko du.
- $\text{Point, Line, Polygon, Circle, Cuboid, Rectangle}$  : Puntuak, zuzenak, poligonoak, ... marrazteko elementuak. Hauetako batzuek “Graphics[...]” eragilea beharko dute.
- $\text{Graphics}[\text{Text}["textua", \{x, y\}, \{0, -1\}, \{1, 0\}]]$  : Textua  $(x, y)$  koordenatuetan idatziko du. Azken zenbakiak  $\in \{-1, 0, 1\}$  eta idazkeraren norabidea finkatuko dute.
- $\text{Show}[\text{GraphicsArray}[\{\{gr_{11}, \dots, gr_{1k}\}, \dots, \{gr_{n1}, \dots, gr_{nk}\}\}]]$  :  $n \times k$  dimentsioko grafikoen bilduma marraztuko du.  
Adib:  $\text{Show}[\text{GraphicsArray}[\{\{\text{Graphics}[\text{Line}[\{\{1, 2\}, \{3, 1\}\}]\}, \text{Graphics}[\text{Polygon}[\{\{0, 0\}, \{2, 2\}, \{2, 0\}\}]\}, \{\text{Graphics}[\text{Circle}[\{2, 2\}, \{1, 2\}]\}, \text{Graphics3D}[\text{Cuboid}[\{1, 2, 4\}]\}\}]]];$