

Kapitulua 1

Zenbakizko Interpolazioa

1.1 Sarrera

Zenbait fenomeno natural ulertzeko eta haien portaeraren eta bilakaeraren gainean dauden lege fisikoak ezagutzeko funtsezkoa da eredu matematikoa proposatzea, non aldagai askeen menpeko formula itxiak agertzen diren. Askotan formula zehatzak eraikitze bide errezik ez dago eta besteetan eredu eragile ezezagunak agertzen dira. Orduan formula hurbiltzen duen funtzio bat finkatzea garrantzitsua da. Aurkitutako formularen adierazpen arrunta izatea erabilgarria da, bereziki funtzio polinomikoen, exponentzialen, logaritmikoen edota trigonometrikoen bidez adieraz badaiteke.

Aldagai askeen menpean dagoen gertaeraren behaketak antzematen dituen funtzio hurbilduak eraikitze erizpideak finkatuko ditugu, besteak beste:

- aldagai askeen zenbait balioetan hartutako neurri experimentalaren emaitza egokitzea, hau da, interpolazioa,
- neurri experimentalen emaitzen eta funtzioaren balioen arteko distantzia minimizatzea, hau da, funtzioen norma-hurbilketa.

Kapitulu honetan ikasi behar dugun gaia aldagai bakar baten menpeko funtzioen interpolazioa izango da.

Adibidez oso maiz aztertzen dugun ohiko fenomeno giro-tenperaturarena da egunean zehar. Egunaren hasieran (0:00 a.m.) hotza egiten du, egunsentia are hotzagoa da, baina gero tenperatura gora doa, atsaldan jeisten hasi arte eta gutxi gorabehera egunaren hasieran egiten zuen tenperaturaren baliora iritsi arte:

(1.1)

ordua	0 : 00	6 : 00	10 : 00	14 : 00	18 : 00	24 : 00
Temperatura	9.5	7.2	13.8	22.6	18.3	9.1

$B(t)$ giro tenperatura soilik denborazko aldagaiaren menpean adierazi dugu eta gustatuko litzai-guke $B(t)$ adierazpena ezagutzea. Informazio horretarako formula zehatzik lortuezina denean $F(t)$ hurbildua ezagutzea ongi dago, t une bakoitzean $|B(t) - F(t)|$ txikia den heinean. Lehenbi-zian t -ren balio batzuk $\{t_0, \dots, t_n\}$ aukeratuko ditugu eta $F(t_i) = B(t_i)$ betetzen duten funtzio sinplea eraikiko dugu interpolazioa erabiliz. Kasu honetan F funtzioa $ax^3 + bx^2 + cx + d$ hiruga-rren mailako polinomioaz edo $a + b \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t/24) + c \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t/24)$ funtzio trigonometrikoaz hurbil dezakegu.

Interpolazio problemari eman behar zaion erantzuna finkatzeko bi xehetasun zehaztu behar dira: interpolazio puntu kopurua, x_i , $i = 0, \dots, n$, non interpolatzaileak datu experi-mentalak egokitu behar dituen, $f(x_i) = y_i$, eta linealki askeak diren $\{f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ funtzio interpolatzaile multzoa edo oinarria.

Problemaren egitura edo ebazpena lineala zein ezlineala izan daiteke:

- Polinomiala: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ (lineala)
- Trigonometrikoa: $p(x) = a_0 + a_1e^{-ix} + a_2e^{ix} + a_3e^{-2ix} + \dots + a_{2n+1}e^{nix}$ (lineala)
- Errazionala: $p(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$ (ezlineala)
- Exponentziala: $p(x) = a_0e^{\lambda_0x} + a_1e^{\lambda_1x} + a_2x^{\lambda_2x} + \dots + a_n e^{\lambda_nx}$ (ezlineala)

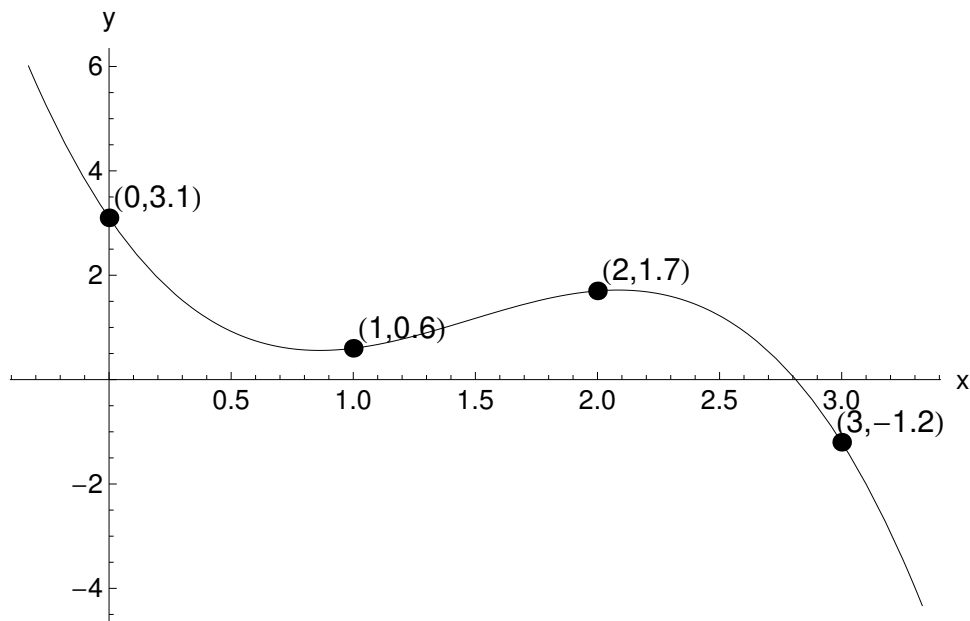
1.2 Interpolazio polinomiala

Aurkeztuko dugun lehenengo funtzio-hurbilketa teknika ohikoena eta ezagunena da, interpolazio polinomiala hain zuzen, oinarri funtziotzat x^i motako adierazpenak hartzen dituen. Adibidez (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, n + 1$ puntuetan polinomio interpolatzailea eraikitzeke lehenengo $n + 1$ polinomioen oinarria hartuko dugu, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, hauen laguntzaz $n+1$ baldintzak betetzen dituen $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n$ polinomioa eraikitzeke. Koefiziente ezezagunak ezagutzeko, ondoko sistema lineala askatzea baino ez dugu egin behar,

$$(1.2) \quad \begin{array}{l} E_1 : f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ E_{n+1} : f(x_{n+1}) = a_0 + a_1x_{n+1} + \dots + a_nx_{n+1}^n = y_{n+1} \end{array}$$

edo baliokideki

$$(1.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$



Irudia 1.1: Lau puntuak interplazten dituen 3. mailako polinomioaren grafikoa.

Sistema linealaren matrizearen determinantea Vandermonde-rena da eta ondorioz (a_0, \dots, a_n) soluzio bakar bat egongo da baldin eta soilik baldin untuak ezberdinak badira, $x_i \neq x_j \forall i \neq j$.

Teorema 1.2.1 *Bitez $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ koordenatueta $n + 1$ puntu ezberdinak 2 dimentsioko espazioan. Orduan $p(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n + 1$ puntuak batzen dituen n . mailako $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polinomio interpolatzaile bakar bat existituko da.*

Adibidea 1.1 *Zein da $(0, 3.1), (1, 0.6), (2, 1.7)$ eta $(3, -1.2)$ puntuak batzen dituen gradurik trikieneko polinomioa?*

1.3 Interpolazio polinomikorako Lagrange-ren formula

Jakin badakigu $(x_1, y_1), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ puntuak egokitzen dituen n . mailako $p(x) \in \mathcal{P}_n$ polinomio bakar bat dagoela, baina n handia denean haren koefizienteak kalkulatzeko $n + 1$. mailako sistema lineal astuna askatu behar da. Badago $p(x)$ lortzeko teknika eraginkorra, izan ere, \mathcal{P}_n -ren oinarritzat ondoko $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)\}$ polinomio berezien multzoa erabiltzen duena,

$$(1.4) \quad \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad \text{non} \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x = x_j, j \neq i, \end{cases} \quad \text{beteko den.}$$

Adibidea 1.2 *Kalkula ezazu aurreko ataleko adibidean aurkeztutako polinomioa Lagrange-ren polinomioaren formulaz.*

Metodo honen abantaila hau da, polinomio interpolatzailea lor daitekela sistema linealik askatu gabe. Aitzitik, eragozpena handia dauka, interpolazio prozesuan puntu berri bat eranstean badugu, orduan oinarriaren polinomio guztiak egokitu behar dira eta aurretik egindako lan osoa alferrikakoa da.

1.4 Interpolazio polinomikorako Newton-en formula

Formula honen eraikuntzaren oinarria (x_0, y_0) puntu bateko interpolazio-polinomioarekin hastea da, hots, $p(x) = y_0$, eta gero hurrenez hurren puntu berriak gehitzea eta aurreko polinomioari adierazpen bat eranstea puntu sorta berriaren interpolatzailearen baldintzak betetzeko.

Bedi $S_{n-1} = \{(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ puntu multzoa eta beronen $p_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ polinomio interpolatzailea. S_n sortari (x_n, y_n) puntua eranstean bazaio, $S_n = S_{n-1} \cup \{(x_n, y_n)\}$, multzo hedatuari dagokion $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ polinomio interpolatzailea eraikitzeo $p_{n-1}(x)$ -ren adierazpena gehi beste ekarpena erabiliko dugu,

$$(1.5) \quad p_n(x) = p_{n-1}(x) + (y_n - p_{n-1}(x_n)) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_n - x_j)}$$

Formula hau polinomio interpolatzailea kalkulatzeko bide alternatiboa eta baliokidea da. Orain $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots\}$ polinomio espazioaren oinarria erabiltzen ari gara. Beraz, formularen beste adierazpidea hau da

$$(1.6) \quad p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i q_i(x), \quad \text{non} \quad q_i(x) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), & i \geq 1, \end{cases} \quad \text{diren.}$$

Noski, x_j puntu bakoitzean aurreko batukariaren $a_j q_j(x)$ batugai guztiak deuseztatuko dira $\forall i \geq j$. Egitura honek a_i koefizienteak kalkulatzeko modu errazean pentsa arazten digu, sistema lineal triangeluarra, hain zuzen,

$$(1.7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & \cdots \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bistakoa da a_i soilik $q_0(x), \dots, q_i(x)$ funtziopekoa dela $\{x_0, \dots, x_i\}$ puntuetan eta menpekotasuna honela adieraz dezakegu $y_i = f(x_i)$ kontutan hartuz

$$(1.8) \quad a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i].$$

Adibidez $(x_0, f(x_0))$ puntuaren 0. mailako polinomio interpolatzailea $p_0(x) = f(x_0)$ izanik, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ bi puntuen polinomioa $p_1(x)$ honelakoa da

$$(1.9) \quad p_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \implies \begin{cases} a_0 = f[x_0] = f(x_0), \\ a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}. \end{cases}$$

Gustatuko litzaiguke $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$ koefizientearen balioa kalkulatzeko adierazpen erraza edukitzea. $p_n(x)$ polinomioaren baturazko adierazpenaren $q_n(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$ oinarriko funtzioaren koefiziente a_n da eta ondorioz hau da x^n berredura altuenaren koefizientea ere, $p_n(x) = a_n x^n + \dots$. Orain demagun $n - 1$. mailako bi polinomio, aurrena $p_{n-1}(x)$, $\{(x_0, f(x_0)), \dots, (x_{n-1}, f(x_{n-1}))\}$ puntuak interpolatzen dituen, non beronen berredura altuenaren koefizientea $a_{n-1} = f[x_0, \dots, x_{n-1}]$ den eta $\bar{p}_{n-1}(x)$, $\{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ puntuak interpolatzen dituen non $\bar{a}_{n-1} = f[x_1, \dots, x_n]$ den. Bi polinomio hauen laguntzaz $\{(x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$ puntuak interpolatzen dituen $p_n(x)$ polinomioa eraikiko dugu

$$(1.10) \quad p_n(x) = \frac{\bar{p}_n(x)(x - x_0) - p_{n-1}(x)(x - x_n)}{(x_n - x_0)}.$$

Nabaria da $p_n(x)$ polinomioan x^n -ren $a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ koefizientea hau dela,

$$(1.11) \quad a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}.$$

Formula honek $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$ kalkulatzeko giltza ematen digu ondoko garapena jarraituz,

$$(1.12) \quad \begin{array}{l} x_0 : \boxed{f[x_0]} \\ x_1 : f[x_1] \quad \boxed{f[x_0, x_1]} \\ x_2 : f[x_2] \quad f[x_1, x_2] \quad \boxed{f[x_0, x_1, x_2]} \\ x_3 : f[x_3] \quad f[x_2, x_3] \quad f[x_1, x_2, x_3] \quad \boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3]} \\ x_4 : f[x_4] \quad f[x_3, x_4] \quad f[x_2, x_3, x_4] \quad f[x_1, x_2, x_3, x_4] \quad \boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]} \end{array}$$

Orokorrean ondoko erlazioa beteko da eta diferentzia zatituetako formula esango diogu,

$$(1.13) \quad f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{(x_{i+j} - x_i)}.$$

Adibidea 1.3 *Kalkula ezazu aurreko ataleko adibidean aurkeztutako polinomioa Newton-en interpolazio-formulaz.*

Oharra: Newtonen formulak $n + 1$ puntu multzo osoa interpolatzen dituen $p_n(x)$ polinomioaren koefizienteak emateaz gain, baita $j - i$ maila txikiagoko eta $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}\}$ puntu multzoak interpolatzaen duten beste polinomioen koefizienteak ematen ditu ere.

1.5 Neville-ren algoritmoa

Badago Newton-en interpolazio formulak iradokitako algoritmo erabilgarria interpolazio polinomioa balioztatzeko puntu zehatz batean. Algoritmoa Eric Harold Neville-k garatu zuen lehenengoz. Demagun $\{x_0, \dots, x_n\}$ puntuak, $k + 1$. mailako polinomio interpolatzailearen adierazpena hau da

$$(1.14) \quad p_{k+1}(x) = \frac{\bar{p}_k(x)(x - x_0) - p_k(x)(x - x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0)},$$

non \bar{p}_k eta p_k hurrenez hurren $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ eta $\{x_0, \dots, x_k\}$ puntu multzoak interpolatzen dituzten polinomioak diren. Formula honi esker x puntu zehatzean $k + 1$. mailako p_{k+1} interpolazio polinomioaren balioa kalkula dezakegu. Helburua lortzeko, $p_n(x) = Q_{n,n}$, ondoko taularen oinarritzko eragiketak baino ez dugu egin behar,

$$(1.15) \quad \begin{array}{cccccccc} x_0 : & Q_{0,0} & & & & & & \\ x_1 : & Q_{1,0} & Q_{1,1} & & & & & \\ x_2 : & Q_{2,0} & Q_{2,1} & Q_{2,2} & & & & \\ x_3 : & Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ x_{n-1} : & Q_{n-1,0} & Q_{n-1,1} & Q_{n-1,2} & Q_{n-1,3} & \cdots & Q_{n-1,n-1} & \\ x_n : & Q_{n,0} & Q_{n,1} & Q_{n,2} & Q_{n,3} & \cdots & Q_{n,n-1} & Q_{n,n} \end{array}$$

non j . mailako polinomio interpolatzailea $\{x_{i-j}, \dots, x_i\}$ puntuetan $Q_{ij} = p_j(x)$ ikurraz adieraziko dugun, $j \leq i$, eta ondoko erregelak beteko dituzten,

$$(1.16) \quad \begin{cases} Q_{i,0} = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1}(x - x_{i-j}) - Q_{i-1,j-1}(x - x_i)}{x_i - x_{i-j}} \end{cases}$$

Adibidea 1.4 Kalkula ezazu aurreko ataleko adibidean aurkeztutako puntuei dagokien $p_4(x)$ interpolazio polinomioaren balioa $x = 3.5$ puntuan Neville-ren algoritmoaz.

Soluzioa

$$\begin{array}{cccc} x_0 : & 3.1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 : & 0.6 & -5.65 & 0 & 0 \\ x_2 : & 1.7 & 3.35 & 10.1 & 0 \\ x_3 : & -1.2 & -2.65 & -4.15 & -6.525 = p_4(3.5) \end{array}$$

1.6 Diferentzi atzerakorreko Newton-Gregory formula

Aldagai aldaketaren bidez polinomio interpolatzailea adierazteko Newton-en formularen adierazpen baliokidea aurkeztuko dugu non koefizienteak $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$ zatikiak izan ordez bakarrik diferentzia finitua bider zenbaki konbinatorioak izango diren. Formula baliokide hau Newton-Gregory-rena da eta $x = x_n + rh$ puntuaren adierazpena $h = x_{i+1} - x_i$ izanik $\forall i = 0, \dots, n$ eta $f_n = f(x_n)$ funtzioaren balioaren gainean aplikatutako ∇ diferentzia atzerakorreko eragile linealaren menpean dagoen. Eragileak $\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$ eta $\nabla^k f_n = \nabla(\nabla^{k-1} f_n)$ beteko du, bereziki, $\nabla^2 f_n = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$.

Demagun $x = x_n + rh$ puntua eta zenbaki konbinatorio orokorren adierazpena

$$(1.17) \quad \binom{-r}{i} = \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-i+1)}{i!}.$$

Alde batetik $x_j = x_n - jh$, $j = 0, \dots, n$ puntuetako Newton-en polinomio interpolatzailearen adierazpenaren oinarritzko funtzioak $q_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$ dira,

$$(1.18) \quad \begin{aligned} q_i(x) &= \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_n + rh - x_n + jh) = \\ &(-1)^i h^i \prod_{j=0}^{i-1} (-r - j) = (-1)^i h^i (-r)(-r-1)\cdots(-r-i+1). \end{aligned}$$

Beste aldetik $\nabla^i f_n$ diferentzi atzerakorra eta $f[x_{n-i}, \dots, x_n]$ koefizienteak erlazionatutak daude,

$$(1.19) \quad \begin{aligned} f[x_n] &= f(x_n) = f_n = \nabla^0 f_n, \\ f[x_{n-1}, x_n] &= \frac{f[x_n] - f[x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{h} \nabla f_n, \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] &= \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} = \frac{1}{2h} \left(\frac{\nabla f_n}{h} - \frac{\nabla f_{n-1}}{h} \right) = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f_n, \\ &\vdots \\ f[x_{n-i}, \dots, x_n] &= \frac{f[x_{n-i+1}, \dots, x_n] - f[x_{n-i}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-i}} = \dots = \frac{1}{i! h^i} \nabla^i f_n. \end{aligned}$$

Polinomio interpolatzailearen adierazpen trinko eta baliokide hau lortu dugu

$$(1.20) \quad p(x) = p(x_n + rh) = u(r) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_n.$$

Gogora dezagun $x \in [x_0, x_n]$ egoteko $r \in [-n, 0]$ egon behar duela. Adibidez $\{x_0, x_1, x_2\}$ puntuetatik igaroko den polinomio interpolatzailearen diferentzia atzerakorreko adierazpena $u(r) = \nabla^0 f_2 + r \nabla^1 f_2 + r(r+1)/2 \nabla^2 f_2 = f_2 + r(f_2 - f_1) + 0.5r(r+1)(f_2 - 2f_1 + f_0)$.

1.7 Taylor-en interpolazioa

Interpolazio problema hau zenbait puntu ezberdinetan funtzioaren hurbilketari ekin beharrean, funtzioaren deribatuak hurbiltzeaz diarduen puntu bakar batean. Honek esan nahi du interpolazio teknika honek garrantzi handia ematen diola aukeratutako puntuan interpolatzailearen portaera eta funtzioarena oso antzekoa izateari. Bereziki, $f(x) \in C^n[a, b]$ funtzioaren Taylor-en n . mailako polinomioa $x_0 \in [a, b]$ puntuaren inguruan $T_n(x)$ da eta lehenengo n deribatuak bat egiten dute, $T_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, $\forall i = 0, \dots, n$.

Interpolazioari dagokion polinomioa aurkitzeko komenigarria da \mathcal{P}_n espazioaren oinarri hau erabiltzea $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$, non funtzioen adierazpenak hauek diren,

$$(1.21) \quad l_0(x) = 1, \quad l_1(x) = (x - x_0), \dots, \quad l_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \dots$$

Funtzio hauen ezaugarrietako bat deribatuei dagokie, $l_n^{(n)}(x_0) = 1$, $l_n^{(j)}(x_0) = 0, \forall j \neq n$. Emaitz hau kontutan hartuz, ondoko teorema ondoriozta dezakegu.

Teorema 1.7.1 *Demagun $f(x)$ funtzioa n aldiz deribagarria $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ inguruan ($\epsilon > 0$) eta deribatu horiek x_0 -an jarraiak direla. Orduan Taylorren n . mailako berretura seriearen adierazpena honako hau da eta x_0 puntuan bat egingo du f funtzioaren aurreneko n deribatuekin,*

$$(1.22) \quad T_n(x) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(x_0) \frac{(x - x_0)^i}{i!}.$$

Adibidea 1.5 *Kalkula ezazu $f(x) = \ln(1 + x)$ funtzioaren $T_5(x)$ Taylor-en polinomioa $x_0 = 0$ puntutik.*

1.8 Interpolazio arrazionala

Interpolazio teknika honek darabiltzan oinarriko funtziok ez dira polinomio arruntak, bi polinomioen zatidura edo funtzio arrazionalak baizik. Aukeratutako funtzio arrazionalak bi polinomioen zatidurak izango dira, $R_v^u(x) = p_u(x)/q_v(x)$, zenbakitzailean dagoenaren maila u eta izendatzailearena v izanik,

$$(1.23) \quad p_u(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_u x^u, \quad q_v(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_v x^v.$$

Noski, izendatzailea eta zenbakitzailea bider konstante ez nulua biderkatzen badugu, orduan funtzio arrazional bera geratuko da, beraz aukera dezakegu $b_u = 1$ daukan $R_v^u(x)$ funtzioa. Beraz $u + v + 1$ koefiziente ezezagun dauzkagu $u + v + 1$ baldintzak ezartzeko edo eraberean $u + v + 1$ puntuetan interpolatzeko.

Demagun f funtzioa $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ puntuetan balioztaturik, $f(x_i) = y_i$, $i \geq 0$, eta defini dezagun alderantzizko diferentziak formula honetaz,

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \phi(x_i, x_j) &= \frac{x_i - x_j}{\phi(x_i) - \phi(x_j)}, & \phi(x_i, x_j, x_k) &= \frac{x_j - x_k}{\phi(x_i, x_j) - \phi(x_i, x_k)}, \dots, \\ \phi(x_i, \dots, x_j, x_k, x_l) &= \frac{x_k - x_l}{\phi(x_i, \dots, x_j, x_k) - \phi(x_i, \dots, x_j, x_l)}. \end{aligned}$$

Demagun $\{x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}\}$ puntuetan interpolatzen duen $R_n^n(x) = p_n(x)/q_n(x)$ funtzio arrazionala, orduan x_0 puntuan $R_n^n(x_0) = p_n(x_0)/q_n(x_0) = y_0$ denez, honela adieraz dezakegu,

$$(1.25) \quad \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = y_0 + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} - \frac{p_n(x_0)}{q_n(x_0)} = y_0 + (x - x_0) \frac{p_{n-1}(x)}{q_n(x)} = y_0 + \frac{(x - x_0)}{q_n(x)/p_{n-1}(x)}.$$

non $n - 1$. mailako $p_{n-1}(x)$ polinomioa hau den,

$$(1.26) \quad p_{n-1}(x) = \frac{p_n(x)q_n(x_0) - q_n(x)p_n(x_0)}{q_n(x_0)(x - x_0)}.$$

Gainera $\forall i = 1, \dots, 2n$ interpolazioa betetzeagatik $R_n^n(x_i) = p_n(x_i)/q_n(x_i) = y_i$, ondorioz $\forall i \geq 1$ ondokoa beteko da

$$(1.27) \quad \frac{p_{n-1}(x_i)}{q_n(x_i)} = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \iff \frac{q_n(x_i)}{p_{n-1}(x_i)} = \frac{x_0 - x_i}{y_0 - y_i} = \phi(x_0, x_i).$$

$i = 1$ aukeratuz, aurreko adierazpenetik eta goian burututako prozesua errepikatuz,

$$(1.28) \quad \frac{q_n(x)}{p_{n-1}(x)} = \phi(x_0, x_1) + \frac{q_n(x)}{p_{n-1}(x)} - \frac{q_n(x_1)}{p_{n-1}(x_1)} = \phi(x_0, x_1) + \frac{(x - x_1)}{p_{n-1}(x)/q_{n-1}(x)}.$$

eta $i > 1$ puntuetan $q_n(x_i)/p_{n-1}(x_i) = \phi(x_0, x_i)$ denez

$$(1.29) \quad \frac{p_{n-1}(x_i)}{q_{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_1}{\phi(x_0, x_i) - \phi(x_0, x_1)} = \phi(x_0, x_1, x_i).$$

Hurrenez hurren errekursio formula eraikiko dugu,

$$(1.30) \quad \begin{aligned} R_n^n(x) &= y_0 + \frac{x - x_0}{q_n(x)/p_{n-1}(x)} = y_0 + \frac{x - x_0}{\phi(x_0, x_1) + \frac{(x-x_1)}{p_{n-1}(x)/q_{n-1}(x)}} = \\ &= y_0 + \frac{x - x_0}{\phi(x_0, x_1) + \frac{(x-x_1)}{\phi(x_0, x_1, x_i) + \frac{(x-x_2)}{q_{n-1}(x)/p_{n-2}(x)}}}. \end{aligned}$$

Laburbilduz, $R_n^n(x)$ funtzio arrazional interpolatzailea eraikitzeke edota haren balioak kalkulatzeko, nahikoa da ondoko egiturarekiko taula osatzeaz,

(1.31)

i	x_i	y_i	$\phi(x_0, x_i)$	$\phi(x_0, x_1, x_i)$	$\phi(x_0, x_1, x_2, x_i)$	\dots
0	x_0	y_0				
1	x_1	y_1	$\phi(x_0, x_1)$			
2	x_2	y_2	$\phi(x_0, x_2)$	$\phi(x_0, x_1, x_2)$		
3	x_3	y_3	$\phi(x_0, x_3)$	$\phi(x_0, x_1, x_3)$	$\phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Adibidea 1.6 Kalkula ezazu $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(2, -2/3)$, $(3, 9)$ puntuak interpolatzen dituen $R_1^2(x)$ funtzio arrazionala.

1.9 Spline-ak

Interpolazio puntu ugari daudenean maila handiko polinomioa ondorioztatuko litzateke eta beronen erabilera eta kalkuluak konputazionalki ezegonkorrak eta astunak izan daitezke. Eragozpen hau gainditzeko beste estrategia suertatzen zaigu, polinomio interpolatzaile ugari eraikitzea ondoan dauden interpolazio puntu bikote bakoitzean eta lotura gunetan jarraia izatearen edota deribatu jarraiak edukitzearen baldintzak ezartzea.

Definizioa 1.9.1 Demagun $[a, b]$ tartean eta $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ puntuak non $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ diren. Tarte horretan f funtzioari dagokion m . mailako $S_m(x)$ spline-a tarteka definitutako polinomioa da $[x_i, x_{i+1}]$ azpitarte bakoitzean, $C^{m-1}[a, b]$ motakoa izanik. Izan ere, azpitarte bakoitzari dagokion $S_m(x)$ -ren zatiaren lehenengo $m-1$. deribatuak eta hurrengo zatia-
ren deribatuak bat egiten dute. Splineren adierazpena tarteka definituriko $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, polinomioen batukari moduan idatz daiteke,

$$(1.32) \quad S_m(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x), \quad \begin{cases} \phi_i(x) \in \mathcal{P}_n[x_{i-1}, x_i], & \forall i = 1, \dots, n \\ \phi_i(x) = 0, & x \notin [x_{i-1}, x_i], \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Spline-ren azpitarte bakoitzeko adierazpena zehazteko $m+1$ koefiziente finkatu behar dira eta n azpitarte direnez, guztira $(m+1) \cdot n + 1$ koefiziente daude. Parametro horiek finkatzeko jarraitasun eta deribagarritasun ondoko propietateak bete beharko dira,

$$(1.33) \quad \begin{cases} \phi_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), & \phi_i(x_i) = f(x_i), \\ \phi_i^{(j)}(x_i) = \phi_{i+1}^{(j)}(x_i) & \forall i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

Bizitza errealeko problema tekniko askotan spline kubikoak erabiltzen dira puntu batzuk ikutu behar dituen ibilbidea bi aldiz jarraiki deribagarria izateko. Bigarren deribatu jarraia edukitzeak kurbatura jarraia eta kurba zorrotzik gabeko ibilbideak eskeintzen du. Honek esan nahi

du funtzio interpolatzaileari $[x_{i-1}, x_i]$ azpitartean dagokion adierazpena 3. mailako polinomioa dela,

$$(1.34) \quad \phi_i(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i$$

Hala ere, $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$ koefizienteak kalkulatzeko baldintzak zuzenean planteatu beharrez, beste estrategia arinagoa erabiliko dugu, polinomio interpolatzaileen bigarren deribatuarekin hastea,

$$(1.35) \quad \phi_i''(x) = M_i(x - x_{i-1}) + M_{i-1}(x - x_i),$$

eta adierazpen hau integratzen joatea bitarteko baldintzak betetzen, jatorrizko ϕ_i funtzioa aurkitu arte.

1.10 Praktiak

Ariketa 1. Aurki ezazu $\{(0, 2), (1, 4.5), (2.5, 3.2), (3.8, -0.5), (5.1, 2.6)\}$ puntuak interpolatzen dituen 4. mailako polinomioa zuzenean.

Ariketa 2. Aurki ezazu $\{(0, 2), (1, 4.5), (2.5, 3.2), (3.8, -0.5), (5.1, 2.6)\}$ puntuak interpolatzen dituen 4. mailako polinomioa Lagrange-ren polinomio-oinarria erabiliz. Froga ezazu polinomio interpolatzailearen adierazpena eta aurreko ariketakoa berdina direla.

Ariketa 3. Aurki ezazu $\{(0, 2), (1, 4.5), (2.5, 3.2), (3.8, -0.5), (5.1, 2.6)\}$ puntuak interpolatzen dituen 4. mailako polinomioa Newton-en polinomio-oinarria erabiliz.

Ariketa 4. Aurki ezazu $\{(0, 2), (1, 4.5), (2.5, 3.2), (3.8, -0.5), (5.1, 2.6)\}$ puntuak interpolatzen dituen 4. mailako polinomioaren balioa $x_0 = 6.5$ puntuan Neville-ren algoritmoaz.

Ariketa 5. Aurki ezazu $\{(0, 2), (1, 4.5), (2.5, 3.2), (3.8, -0.5), (5.1, 2.6)\}$ puntuak interpolatzen dituen plinioietaz osatutako funtzio arrazionala.

Kapitulua 2

Zenbakizko Integrazioa

2.1 Sarrera

Kalkulu diferentziala eta integrala Análisi Matematikoaren funtsezko tresna da. Matematikaren problema ugari askatzeko eta sinplifikatzeko integral definituen bidezko adierazpideak maiz erabiltzen dira eta hauen balioa kalkulazina denean zenbakizko tresnak oso eraginkorrak dira.

Bereziki, bi punturen arteko integral mugatua, tarte horretan abzisa-ardatzak eta funtzio berak bornatzen duten gainazalaren azalera da.

Kalkulu diferentzialaren oinarriko teoremaren bidez jakin badakigu funtzio batek integral mugagabea edukiz gero azken honen deribatua eta jatorrizko funtzioa berdinak direla. Beraz, f funtzio baten a eta b puntuen arteko integral mugatua kalkulatzeko aski dugu funtzioaren antideribatua edo jatorrizko funtzioa F atera eta muturretako balioen kendura egitea.

$$(2.1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Baina eragiketa zuzen hau ezin da beti burutu. Funtzio esplizitu guztiak deribatzerik badago ere, hauetariko askok ez daukate jatorrizko funtziorik eta beraz, ezin dira analitikoki integratu. Beste batzuk oso latzak dira integratzeko eta ez da bidezkoa lan horretan hainbeste denbora galtzea. Beste batzuetan funtzio esplizitua izan beharrean, bakarrik beronen balio batzuk edo ezaugarri batzuk ditugu eta informazio horrekin moldatu behar dugu. Egoera hauetan zenbakizko integrazioa, nahiz eta soilik emaitza hurbilduak eman, oso interesgarria izan daiteke, batez ere, kostu operatibo eta doitasunaren arteko balantzerik onenak ematen dizkiguten zenbakizko integrazio-formulak. Apunte hauetan lehenengo zenbakizko integrazioaren metodo ezagunenei buruz hitz egingo dugu, batez ere, ideia geometrikoak azalduko ditugu eta baita azalpen teorikoaren laburpen bat ere (formulak, errorearen adierazpidea, adibideak).

2.2 Problemaren formulazioa

Aztertu behar ditugun integral-motak hauek dira:

$$(2.2) \quad \int_a^b f(x) dx \quad , \quad \int_a^b w(x)f(x) dx$$

non $w(x)$ funtzioa $f(x)$ -ri pisua ematen dion dentsitate-funtzioa baita eta ondoko propietateak bete behar baititu:

1. $w \in C[a, b]$
2. $w(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$
3. $\int_a^b w(x)|x|^n dx < \infty \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Funtzio baten integral mugatuaren balioa hurbildua kalkulatzeko zenbakizko teknika intuitibo eta arruntenetakoa $[a, b]$ tartean $f(x)$ ren azpiko azalera trapezioaren erregelaren bidez hurbiltzean datza. Tarte horretan zenbait puntu aukeratuko ditugu eta ondorengo puntu biren artean funtzioa bi puntu horietatik igarotzen den zuzenkiarekin ordezkatzeko dugu. Amaitzeko, abzisa-ardatza eta zuzenki horrek eraikitako trapezioaren azalaren neurria kalkulatu dugu. Beraz, baldin puntu horiek nahiko gertu badaude eta funtzioak beraien artean gora-behera handirik ez badu, orduan ateratzen zaigun emaitza onargarria izan daiteke.

Prozesu hau ondoko gisaz adieraz dezakegu:

Bitez $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ diskretizazioaren nodoak, orduan $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ eta $(x_i, f(x_i))$ puntuek mugatutako t_i trapezioaren $A(t_i)$ azalera ondokoa da:

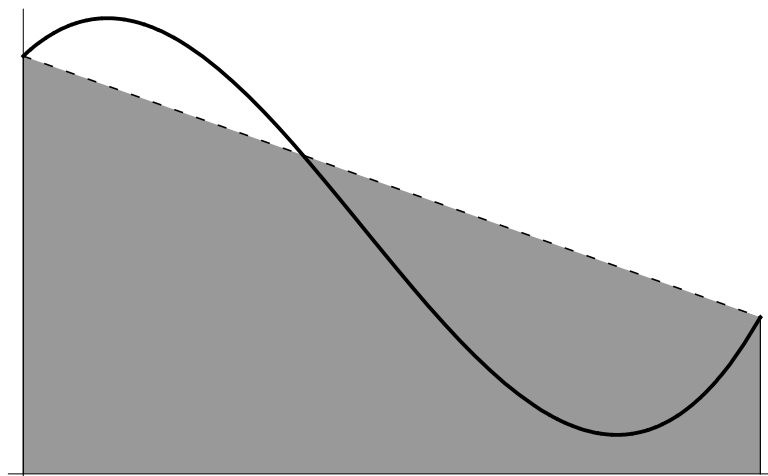
$$(2.3) \quad A(t_i) = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

eta ondorioz, integral mugatua hurbiltzen duen diskretizazioaren trapezio guztien bilduraren azalera ondokoa izango da:

$$(2.4) \quad A(\cup_{i=1}^n t_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + f(x_{i-1})] (x_i - x_{i-1}) \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx.$$

Baldin diskretizazioaren nodoak h luzerarekiko distantzikideak badira, orduan adierazpidea nabari errazten da:

$$(2.5) \quad A(\cup_{i=1}^n t_i) = h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$



Irudia 2.1: Irudi honek bi punturen arteko funtzioaren interpolazio lineala adierazten du. Trapezioen erregelak zuzenkiaren azpiko azalera kalkulatzeko du.

Bistakoa denez, zenbat eta nodo gehiago izan, orduan eta emaitza zuzenagoa lortuko dugu. Gainera, baldin integraturiko funtzioa $f \in C^2[a, b]$ bada, orduan batezbesteko balioaren teorema bi aldiz aplikatuz, formula honen errorea atera dezakegu:

Azpitarte bakoitzean $(x_i, f(x_i))$ eta $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ puntuetatik igarotzen den zuzenak ondoko ekuazioa du:

$$(2.6) \quad y(x) = \frac{(x_{i+1} - x)f(x_i) + (x - x_i)f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}.$$

Errorea ateratzeko ondoko integrala aztertu beharko dugu:

$$(2.7) \quad R_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - y(x)] dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - \frac{(x_{i+1} - x)f(x_i) + (x - x_i)f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \right] dx$$

eta errore hau diferentzia zatituen adierazpideen bidez idatz daiteke, non $k + 1$ punturen diferentzia zatituak

$$(2.8) \quad f[x_j] = f(x_j) \forall j, \quad f[x_j, \dots, x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}$$

adierazpidez definitzen baitira. Noski,

$$\begin{aligned}
 f(x) - \frac{f(x_{i+1})(x - x_i) + f(x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} &= \\
 \frac{f(x)(x_{i+1} - x_i) - f(x_{i+1})(x - x_i) - f(x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} &= \\
 (2.9) \quad \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \left(\frac{f(x) - f(x_{i+1})}{x - x_{i+1}} - \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} \right) &= \\
 \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} (f[x, x_{i+1}] - f[x_i, x]) &= (x - x_i)(x - x_{i+1})f[x_i, x, x_{i+1}].
 \end{aligned}$$

Errorearen kalkulua hau da

$$(2.10) \quad R_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1})f[x_i, x, x_{i+1}] dx = \frac{1}{2} f''(\eta) \left[-\frac{1}{6} h^3 \right] \quad , \quad \eta \in [a, b]$$

Honen neurria h^3 ordenakoa da eta beraz, honek 0-ra konbergitzen du azpitarteen luzerak laburtzen diren heinean.

Baldin azpitarte guztietan sortutako errorearen batura kontutan hartzen badugu, non azpitarteen luzerak berdinak diren, $h = (b - a)/n$, orduan $[a, b]$ tartean eragindakako errore osoaren hurbilketa izango dugu.

$$(2.11) \quad R(f) = - \sum_{i=1}^n \frac{h^3}{12} f''(\eta_i) = - \frac{h^3 n}{12} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i) \right)$$

eta $f'' \in [a, b]$ denez $\exists M < \infty$ non $\forall x \in [a, b] \quad |f''(x)| \leq M$, beraz:

$$(2.12) \quad 0 \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f''(\eta_i)| \leq M \rightarrow |R(f)| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) M = O(h^2).$$

2.3 Newton-Cotesen integrazio-formulak, nodo distantzideekin

Demagun ez ditugula funtzioaren balioak nodo distantzide batzuetan baino. Tarte horretan funtzioa nodo horietatik igarotzen den interpolazio-polinomioarekin ordezea ahalbide interesgarria da. Gero polinomio horren integral mugatuaren kalkulua erraza da eta nolabait funtzioarena hurbilduko du. Interpolazio-polinomioak integratzean, formula bereziak sortzen dira eta formula horietan funtzioaren balioek parte hartzen dute. Hauek dira Newton-Cotesen formulak. Emaitzak hobatzeko azpizatiketarako eraiki beharko dira eta bakoitzean aipatutako formulak

aplikatu ere; horrela sortuko dira Newton-Cotesen formula konposatuak, eta nabaria denez, zenbat eta diskretizazio finagoa eraiki, orduan eta hurbilketa zehatzagoa lortuko da.

Problemaren formulazioa ondorengo hau da:

$$(2.13) \quad I(f) = \int_a^b w(x)f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i L_i(f) + R(f) = Q_n(f) + R(f)$$

non A_i formularen koefizienteak edo pisuak baitira eta f -rekiko zerikusirik ez daukaten, L_i adierazpenak $f(x)$ -ren menpeko forma linealak baitira (kasu honetan $L_i(f) = f(x_i)$ hartuko ditugu) eta amaitzeko $R(f)$ mugaketa-errorea edo diskretizazio finituak eragiten duen errorea baita eta f -ren menpeko beste forma lineala da ere.

Baldin Newton-Cotesen formulek emandako f funtzioa n mailako interpolazio-polinomioarekin ordeztzen badute eta hautaturiko nodoak x_0, \dots, x_n badira, orduan polinomio horretarako Lagrangeren adierazpidea erabil dezakegu:

$$(2.14) \quad p(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)l_i(x) \quad \text{non} \quad l_i = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

eta hau da honen integral mugatua $[a, b]$ tartean:

$$(2.15) \quad \int_a^b w(x)p(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = Q_n(f) \quad \text{non} \quad A_i = \int_a^b w(x)l_i(x) dx \quad \text{diren.}$$

Nabaria da n nodo desberdin darabiltzan formulak n baino maila txikiagoko polinomioak diren $f(x)$ funtzioak zehatz-mehatz integratzen dituela, kasu horretan interpolazio polinomioa $p(x) = f(x)$ baita. Beraz, $\int_a^b 1 dx$, $\int_a^b x dx$, ..., $\int_a^b x^{n-1} dx$ integralak direla medio, formularen koefizienteak finkatuko ditugu edo eraberean polinomioaren ekuazioa eraikiz eta integratuz.

Adibidea 2.3.1 *Izan bitez $f(x)$ funtzioa $x \in [a, b]$ tartean eta $a < c < b$ nodoak, non $c = (a+b)/2$ eta $h = (b-a)/2$ baitira. Hau da f funtzioa interpolatzen duen 2. mailako polinomioa:*

$$(2.16) \quad p(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b)$$

baldin $p(x)$ $[a, b]$ tartean integratzen badugu:

$$(2.17) \quad \int_a^b p(x) dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(c) + f(b)] \implies \begin{cases} A_0 = h/3, \\ A_1 = 4h/3, \\ A_2 = h/3. \end{cases}$$

Eraberean $\int_a^b x^i dx$, $i = 0, 1, 2$ integralen bidez A_i koefizienteak ondoriozta ditzakegu:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} b - a &= \int_a^b 1 dx = \sum_{i=0}^2 A_i = A_0 + A_1 + A_2 \\ \frac{b^2 - a^2}{2} &= \int_a^b x dx = \sum_{i=0}^2 A_i x_i = A_0 a + A_1 c + A_2 b \\ \frac{b^3 - a^3}{3} &= \int_a^b x^2 dx = \sum_{i=0}^2 A_i x_i^2 = A_0 a^2 + A_1 c^2 + A_2 b^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A_0 = h/3, \\ A_1 = 4/3, \\ A_2 = h/3. \end{cases}$$

Doitasun-maila

Hain zuzen ere, baldin integrazio-formula batek $\leq q$ mailako polinomioak zehatz-mehatz integratzen baditu, orduan beraren doitasun-maila q da. Badakigu $n + 1$ nodo darabiltzan formularen doitasun-maila gutxienez n dela, are gehiago, baldin $n + 1$ bakoitia bada, orduan doitasun-maila $n + 1$ da; baldin bikoitia bada aldiz, orduan n baino ez da.

Integrazio-tartearen aldaranzketa

Bitez A_0, \dots, A_n integrazio-formularen koefizienteak $[a, b]$ tartean eta $R_{a,b}(f)$ gaia f -ri dagokion mugatze-errorea. Baldin $\sigma(x)$ transformazio linealak $[a, b]$ tartea $[c, d]$ bihurtzen badu, orduan tarte honetan integrazio-formula baliokidearen koefizienteak $C_i = (d - c)/(b - a) A_i$ dira. $g(\sigma(x)) = f(x)$ bada, orduan bere mugatze-errorea $R_{c,d}(f) = (d - c)/(b - a) R_{a,b}(f)$ da.

Mugatze-errorea

Mugatze-errorea, $R(f) = \int_a^b (f(x) - p(x)) dx$, diferentzia zatituen bitartez idatz daiteke:

$$(2.19) \quad R(f) = \int_a^b w(x)H(x)f[x_0, \dots, x_n, x] dx, \quad \text{non } H(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \text{ den.}$$

$f \in C^{n+1}[a, b]$ funtzioaren Taylor-en garapenak frogatzen du existitzen dela $\psi \in [a, b]$ zeinetarako $f[x_0, \dots, x_n, x] = f^{(n+1)}(\psi)/(n + 1)!$ den. Beraz,

$$(2.20) \quad |R(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} \int_a^b w(x)H(x) dx \quad \text{non } M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Gehienetan $w(x) = 1$ da eta formula bakoitien doitasun-maila egokia kontutan hartuz, sortutako errorea ondoko gisaz borna daiteke:

$$(2.21) \quad \begin{cases} n \text{ bakoitia} : |R(f)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} (h^{n+2})C_n, \text{ non } C_n = \int_0^n t(t - 1) \cdots (t - n) dt \text{ den.} \\ n \text{ bikoitia} : |R(f)| \leq \frac{M_{n+2}}{(n + 2)!} (h^{n+3})C_n, \text{ non } C_n = \int_0^n t^2(t - 1) \cdots (t - n) dt \text{ den.} \end{cases}$$

Frogapena (bakarrik n bikoitia denean)

Izan bedi $s(x) = \int_a^x (t - x_0) \cdots (t - x_n) dt$, orduan $s'(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ eta $s(a) = 0 = s(b)$ dira, integrakizuna $x_{n/2}$ erdiko nodoarekiko funtzio bakoitia delarik. $s(x) \geq 0$ betetzen dela ere frogatu daiteke.

Zatika integratuz ondorengo bilakaera dugu:

$$\begin{aligned}
 R(f) &= \int_a^b s'(x) f[x_0, \dots, x_n, x] dx \\
 &= [s(x) f[x_0, \dots, x_n, x]]_a^b - \int_a^b s(x) \frac{d}{dx} f[x_0, \dots, x_n, x] dx \\
 (2.22) \quad &= - \int_a^b s(x) f[x_0, \dots, x_n, x, x] dx = -f[x_0, \dots, x_n, \psi, \psi] \int_a^b w(x) dx \\
 &= -\frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \int_a^b \int_a^x (t - x_0) \cdots (t - x_n) dt dx.
 \end{aligned}$$

Integral bikoitzaren integrazio ordena aldatzen eta $s = (t - x_0)/h$ aldagai aldaketa aplikatuz:

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b \int_a^x (t - x_0) \cdots (t - x_n) dt dx = \int_a^b \int_t^b (t - x_0) \cdots (t - x_n) dx dt \\
 (2.23) \quad &= \int_{x_0}^{x_n} (t - x_0) \cdots (t - x_n) (x_n - t) dt = -h^{n+3} \int_0^n s(s-1) \cdots (s-n)^2 ds \\
 &= -h^{n+3} \int_0^n s^2 (s-1) \cdots (s-n) ds.
 \end{aligned}$$

Oharra: C_n koefizienteak $[0, 1]$ tartean kalkulatzeko modu erraza, baldin n bikoitia bada, $f(x) = x^{n+2}$ kontsideratzean datza (n bakoitia izanik, $f(x) = x^{n+1}$) eta

$$(2.24) \quad \frac{1}{n+3} = \int_0^1 x^{n+2} dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^{n+2} + C_n (1/n)^{n+3}$$

ekuaziotik C_n askatu, beste balio guztiak ezagunak direlako.

Newton-Cotesen formulen koefizienteak

$$(2.25) \quad A_i = \int_{x_0}^{x_n} l_i(x) dx \quad \text{non} \quad l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad \text{baita.}$$

Integral honen balioa lortzeko aldagai-aldaketa egingo dugu:

$$(2.26) \quad \left. \begin{array}{l} x = x_0 + th \quad t \in [0, n] \\ dx = h dt \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_j = x_0 + jh \\ x - x_j = h(t - j) \end{array} \right.$$

Ondorioz

$$(2.27) \quad A_i = \int_0^n \frac{\prod_{j \neq i}(t - j)}{\prod_{j \neq i}(i - j)} h dt = \frac{h}{\prod_{j \neq i}(i - j)} \int_0^n \prod_{j \neq i}(t - j) dt.$$

Nodo simetrikoak berdinak dira ($A_j = A_{n-j}$) eta soilik n -ren menpean daude. Ondoko taulan 1., 2., 3., eta 4. mailako interpolazio-polinomioei dagozkien Newton-Cotesen formulak eta erroreak ditugu,

n	Newton-Cotes-en ohiko formulak	errorea
1	$\frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	$-\frac{h^3}{12}f''(\eta)$
2	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	$-\frac{h^5}{90}f^{iv}(\eta)$
3	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	$-\frac{3h^5}{80}f^{iv}(\eta)$
4	$\frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	$-\frac{8h^7}{945}f^{vi}(\eta)$

Newton-Cotesen formula irekiak

Batzuetan tartearen muturretako funtzioaren aldakuntzak txikiak dira eta ondorioz, muturrak ez dira onak nodotzat hartzeko. Kasu horretan hobe da nodotzat soilik tartearen barneko puntuak hautatzea; hau da, x_0, \dots, x_n hautatuko ditugu non $x_0 = a + h$ eta $x_n = b - h$ baitira. Orain nodoen arteko luzera $h = \frac{b-a}{n+2}$ da eta formularen adierazpidea ondoko hau:

$$(2.28) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R(f)$$

Formula hauek Newton-Cotesen formula irekiak dira eta aurreko formula itxien moduan, haien koefiziente bereziak, errore gaia, etab. azter daitezke.

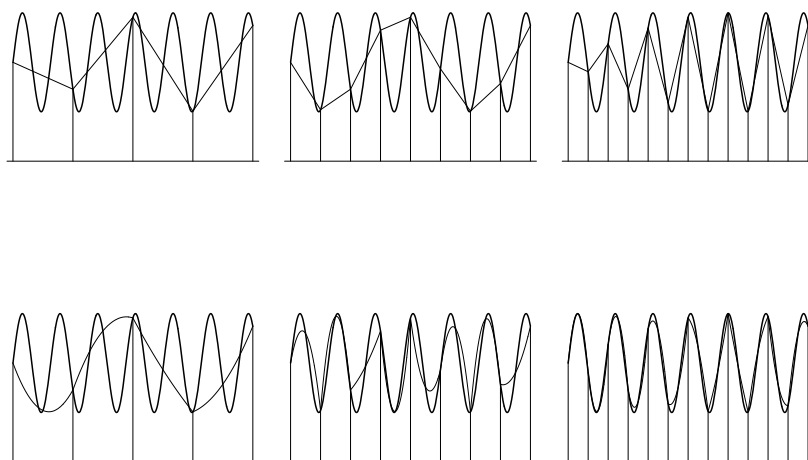
2.4 Neton-Cotes-en formula konposatuak

Newton-Cotesen formulek gero eta errore txikiagoa eragiten dute, formularen maila handitu ahala. Baina baldin formularen maila altuegia bada, orduan koefiziente negatiboak agertzen dira eta ondorioz, prozesuak egonkortasuna eta halabeharrez konbergentzia galtzen du. Beraz, eragozpen hau gainditu nahi izanez gero, konbergentzia galdu gabe, beste tresna baten bidez doitasuna irabaz dezakegu.

Integrazio-tartea azpitarteetan zati dezakegu, hauetako bakoitzean portaera ona duten $n = 1, \dots, 5$ formulak erabiltzeko. Beraz, zenbat eta azpitarte gehiago egon, orduan eta txikiagoa izango da haien luzera, $h \rightarrow 0$, eta metodoak konbergitu egingo du. Demagun $[a, b]$ -ren zatiketa hau $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$. Orain $[a_i, a_{i+1}]$ azpitartean Newton-Cotesen formula konbergenteetako bat aplikatuko dugu. Integrala ondoko gisaz adieraz daiteke:

$$(2.29) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} (Q_i(x) + R_i(x)).$$

Beraz, formularen errorea $[a, b]$ tartean $R(f) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i(f)$ da.



Irudia 2.2: $f(x) = \text{sen}(8 * x) + 2$ funtzioaren diskretizazioak $[0, 5]$ tartean gero eta gehiago azpitartekatuz. Lehenengo diskretizazioa trapezioen erregelarena da eta bigarrena Simpsonena. Bi kasuetan zenbat eta diskretizazioa finagoa izan, interpolazio polinomioek orduan eta gehiago hurbiltzen dute funtzioa.

Formula konposatuen errorea

n mailako integrazio-formula bakunaren $[a_i, a_{i+1}]$ tarteko errorea, ondorengo adierazpideaz idatz daiteke:

$$(2.30) \quad R(f) = h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta_i) K_i.$$

Orduan, formula konposatuaren errore osoa hauxe izango da:

$$(2.31) \quad R(f) = h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta) h \sum_{i=0}^{N-1} K_i.$$

Izan bitez $K = \max_{i=0}^{N-1} |K_i|$ eta $M = \max_{\eta \in [a,b]} f^{(n+1)}(\eta)$. Orduan:

$$(2.32) \quad |R(f)| < h^{n+1} K M.$$

Kontutan hartu behar dugu $N \rightarrow \infty \Rightarrow h \rightarrow 0$, ondorioz, errorea zerorantz doa azpitarteen kopurua handiagotzen den heinean. Bereziki, baldin $f \in C^{k+1}[a, b]$ bada eta $M_{k+1} = \max_{x \in [a,b]} f^{(k+1)}(x)$ hartuz, ondoko bornapena beteko da:

$$(2.33) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - Q^{(N)}(f) \right| \leq 2(b-a) \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} \left(\frac{b-a}{2N} \right)^{k+1}.$$

Newton-Cotesen formula konposatuen koefizienteak

n	Newton-Cotesen ohiko formula konposatuak	errorea
1	$\frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N)$	$-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)$
2	$\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N})$	$-\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{iv}(\eta)$
3	$\frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_{3N-3} + 3f_{3N-2} + 3f_{3N-1} + f_{3N})$	$-\frac{(b-a)}{80} h^4 f^{iv}(\eta)$

Adibidea 2.4.1 Izan bedi $I = \int_{-2}^2 2 * e^{-2r^2} dx = 5.772453$ integrala:

Baldin bere emaitza formularen maila handituz kalkulatzeko badugu, orduan behar den konputazio-denbora ikaragarri handitzeaz gain maila handiko formularen koefiziente negatiboek

emaitz akastunak ekarriko dute. Aitzitik, jatorrizko tartea elkarren segidako azpitartetan zatitzen badugu eta Simpsonen formula konposatua badarabilgu, orduan nodo-kopuru berberaz erakitako balioen segidak askoz azkarrago konbergituko du besteak baino.

<i>Nodo-kopurua</i>	<i>Newton-Cotes bakuna</i>	<i>Simpsonen f. konposatua</i>
3	9.33333	9.33333
5	5.17086	5.43102
7	6.68075	6.08115
9	4.88888	5.67243
11	6.59758	5.79747
13	5.05564	5.76787
15	6.34939	5.77307
17	5.34206	5.77239

2.5 Extrapolazio formulak

Orain arte ikusitako formulek, informazio moduan, bakarrik funtzioaren balioztapenak darabiltzate. Baita funtzioaren deribatuen balioztapenek integrazio-formulei ekarpena eta xehetasun garrantzitsua eman dezakete. Adibidez, integrazio-tartearen muturretako funtzioaren deribatua badarabilgu, orduan trapezioen formularen hobekuntza lortzen dugu.

kasu bakuna

$$(2.34) \quad \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1}) + \frac{h^2}{12}(f'_i - f'_{i+1}) + \frac{h^5}{720}f^{(iv)}(\eta).$$

kasu konposatua

$$(2.35) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) + \frac{h^2}{12}(f'_0 - f'_N) + \frac{b-a}{720}h^4 f^{(iv)}(\eta).$$

Baldin $f \in C^{2k+2}[a, b]$ bada, maila handiko deribatuak esker garapen asintotikoa dugu:

$$(2.36) \quad I(f) = Q_N(f) + C_1 h^2 + C_2 h^4 + \dots + C_k h^{2k} + O(h^{2k+2}).$$

Funtzioaren balioztapen hauek manipulatu, oso emaitza zehatzak lortuko ditugu kostu operatibo minimoa ondorioztatuz.

Teorema 2.5.1 (Euler-McLaurinen formula). Izan bitez $s \geq 0$ eta $g \in C^{2k+2}[x_0, x_1]$ ($h = x_1 - x_0$). Orduan, ondorengo berdintza betetzen duten $B_2, B_4, \dots, B_{2s+2}$ konstanteak (Bernoulliren zenbakiak) existitzen dira:

$$(2.37) \quad \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \sum_{i=1}^k \frac{B_{2i}}{(2i)!} h^{2i} [f^{(2i-1)}(x_0) - f^{(2i-1)}(x_1)] - \frac{B_{2k+2}}{(2k+2)!} h^{2k+3} f^{(2k+2)}(\eta), \quad \eta \in (x_0, x_1).$$

Korolaria 2.5.1 (Euler-McLaurinen batuketa-formula). Izan bitez $s \geq 0$, $g \in C^{2k+2}[a, b]$, $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$ eta $h = b - aN$, orduan ondorengo berdintza beteko da:

$$(2.38) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{N-1} + f_N] + \sum_{i=1}^k \frac{B_{2i}}{(2i)!} h^{2i} [f^{(2i-1)}(a) - f^{(2i-1)}(b)] - \frac{B_{2k+2}(b-a)}{(2k+2)!} h^{2k+2} f^{(2k+2)}(\eta), \quad \eta \in (a, b).$$

Rombergen Koadratura

Baldin jatorrizko tartea erdibitzen badugu eta elkarren segidako azpitarteak erdibitzen jarraitzen badugu, orduan azpitarte horiekin oso prozesu eraginkorra sor dezakegu trapezioen erregela aplikatuz.

Izan bitez $[a, b]$ jatorrizko tartea eta $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ diskretizazioa non $x_j = x_0 + jh$ baitira. Orduan $f \in C^{2k+2}[a, b]$ funtzioaren $[a, b]$ tarteko $I(f)$ integralaren $T_N(f)$ trapezioen erregelaren bidezko hurbilketak ondoko hau beteko du:

$$(2.39) \quad \begin{aligned} I(f) &= T_N(f) + C_1 h^2 + C_2 h^4 + \dots + C_k h^{2k} + O(h^{2k+2}) \Rightarrow \\ T_N(f) &= I(f) + D_1 h^2 + D_2 h^4 + \dots + D_k h^{2k} + O(h^{2k+2}) \quad \text{non } D_j = -C_j \text{ diren.} \end{aligned}$$

Era berean, T_{2N} kalkula daiteke:

$$(2.40) \quad T_{2N} = I + D_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + D_2 \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + D_k \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + O(h^{2k+2})$$

eta hurrengo eragiketaren bitartez errorearen gaia $O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^4\right)$ bihurtuko dugu:

$$(2.41) \quad T_N^{(1)} = \frac{4T_{2N}^{(0)} - T_N^{(0)}}{3} = I + E_2 h^4 + \dots + E_k h^{2k} + O(h^{2k+2}).$$

Era berean, eragiketa hau errepikatzeke $T_{2N}^{(1)}$ kalkulatu dugu:

$$(2.42) \quad \begin{aligned} T_{2N}^{(1)} &= \frac{4T_{4N}^{(0)} - T_{2N}^{(0)}}{3} = I + E_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots + E_k\left(\frac{h}{2}\right)^{2k} + O(h^{2k+2}), \\ T_N^{(2)} &= \frac{16T_{2N}^{(1)} - T_N^{(1)}}{15} = I + F_3h^6 + \dots + F_k h^{2k} + O(h^{2k+2}). \end{aligned}$$

Koadraturaren gaiak elkarren segidan ondoko gisaz kalkulatu ohi dira:

$$(2.43) \quad T_{2N}^{(r)} = \frac{4^r T_{2N}^{(r-1)} - T_N^{(r-1)}}{4^r - 1} = T_{2N}^{(r-1)} + \frac{T_{2N}^{(r-1)} - T_N^{(r-1)}}{4^r - 1}.$$

Prozesua $r = k$ iritsi arte errepikatuko dugu errorearen gaia $O(h^{2k+2})$ mailakoa lortuz.

Prozesu honek $T_{2^i N}(f)$, $i = 0, \dots, k$ gaien kalkulua eskatzen du, ondorioz funtzioaren $2^i N$ balioztapen baino ez ditugu behar ($T_{2^i N}(f)$ berria kalkulatzeko behar ditugun balioztapen erdiak aurretik kalkulatu daudelarik). Beraz, gai horiek kalkulatu ondoren, oinarriko eragiketen bidez (oso kostu operatibo txikia) manipulatu ditugu konbergentzi maila handia lortzeko. Azalduko garapen hau ondoko diagraman adieraziko dugu:

$$(2.44) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & & & T_0^{(0)} \\ & & & & & & \\ & & & & & & T_1^{(0)} & T_0^{(1)} \\ & & & & & & T_2^{(0)} & T_1^{(1)} & T_0^{(2)} \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & T_k^{(0)} & T_{k-1}^{(1)} & T_{k-2}^{(2)} & \dots & T_0^{(k)} \end{array}$$

non batugaiak ondoko arauaz eraikiko diren,

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_j^{(0)} = T_{2^j N}(f) \\ T_j^{(r)} = T_{j+1}^{(r-1)} + \frac{T_{j+1}^{(r-1)} - T_j^{(r-1)}}{4^r - 1} \quad r = 1, \dots, k, j = 0, \dots, k - r. \end{array} \right.$$

Nevilleren algoritmoa

Nahiz eta Rombergen metodoak kostu operatibo gehigarririk gabe trapezioen formula konposatuak baino emaitza zehatzagoa eman, doitasun ona lortzeko funtzioaren $2^k N$ balioztapen behar ditugu eta kopuru hau oso handia egiten da k gorakorra denean. Beraz, baldin funtzioa kaxkarra bada, beronen balioztapen-kopuru handiak eragozpenak erakartzen dizkigu. Egoera hori gainditzeko $\{2^k N\}$ balioztapen-kopuruko segida hartu ordez, astiroago handitzen den beste segida bat $\{N(k)\}$ hautatuko dugu extrapolazioa garatzeko.

Izan bitez $N(0), N(1), N(2), \dots$ $[a, b]$ tartearen diskretizazio gero eta finagoak. Izan bitez $h_i = \frac{b-a}{N(i)}$ eta $T_i(f)$, $N(i)$ diskretizazioari dagokion trapezioen formula konposatua.

$$(2.46) \quad \begin{aligned} T_i(f) &= I(f) + D_1 h_i^2 + D_2 h_i^4 + \dots + D_k h_i^{2k} + O(h_i^{2k+2}) \\ T_{i+1}(f) &= I(f) + D_1 h_{i+1}^2 + D_2 h_{i+1}^4 + \dots + D_k h_{i+1}^{2k} + O(h_{i+1}^{2k+2}). \end{aligned}$$

Lehengo moduan emaitza hauek manipulaturaz 4. ordenako konbergentzia lor dezakegu

$$(2.47) \quad \frac{h_i^2 T_{i+1}(f) - h_{i+1}^2 T_i(f)}{h_i^2 - h_{i+1}^2} = I - D_2 h_i^2 h_{i+1}^2 - D_4 h_i^4 h_{i+1}^4 (h_i^2 + h_{i+1}^2) - \dots$$

eta adierazpen horrek $O(h_i^2 h_{i+1}^2)$ ordenako errorea dauka.

$T_j^{(0)} = T_j(f)$, $T_j^{(r)} = T_{\{h_{j-r}, \dots, h_j\}}(f)$ definituz, ondoko taula eraikiko dugu:

$$(2.48) \quad \begin{array}{cccc} & T_0^{(0)} & & \\ & & & \\ & & T_1^{(0)} & T_1^{(1)} \\ & & & \\ T_2^{(0)} & T_2^{(1)} & T_2^{(2)} & \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \\ T_k^{(0)} & T_k^{(1)} & T_k^{(2)} & \dots & T_k^{(k)} \end{array}$$

non batugaiak ondoko arauaz eraikiko diren,

$$(2.49) \quad T_j^{(r)} = T_j^{(r-1)} + \frac{h_j^2 (T_j^{(r-1)} - T_{j-1}^{(r-1)})}{h_{j-r}^2 - h_j^2}, \quad j = 0, \dots, k, \quad r = j, \dots, k.$$

Halako $\{N(i)\}$ segida egokia Burlischena izango litzateke: $N_0 = 1$, $N_1 = 2N_0$, $N_2 = 3N_0$, $N_k = 2N_{k-2}$, $\forall k \geq 3$.

2.6 Gauss-en koadratura

Newton-Cotesen formulak eta berauen aldakuntzek haien arteko tarte-luzera berdina daukaten nodo finakoak darabiltzate. Adibidez, n ordenako formulak $n+1$ parametro aske erabiltzen ditu, A_i hain zuzen. Pisu hauek $\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$, $k = 0, \dots, n$, baldintzak betetzen dituztenean formularen doitasun-maila n da. Baina koefizienteak aukeratzeko uzteaz gain aldiberean nodoak ere aske uzten baditugu, orduan $2n+2$ parametro aske daude eta agian formularen doitasun-maila $2n+1$ -ra iritsi daiteke. Hau da Gaussen koadraturaren formulek lantzen duten proposamena ordena maximoarekiko formulak plazaratzeko.

Prozesua hasteko bi funtzioen biderkadura eskalarra ondoko gisaz definituko dugu:

$$(2.50) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx.$$

Hemen $w(x)$ dentsitate-funtzioa da eta integrazio eremua zein problemaren jatorri fisikoaren menpekoa izaten da. Gauss-en formulek fisikan garrantzitsuak suertatzen diren eta eredu infinituetan aztertzen diren problema ugari lantzeko balio dute. Kasu horretan Newton-Cotesen formulak ez dira erabilgarriak bakarrik tarte bornatuak onartzen dituztelako. Hurrengo koardroan ohiko integrazio-tarteak eta dagozkien dentsitate-funtzioak adierazi ditugu:

Izena	Tartea	Dentsitate-funtzioa
Gauss-Legendre	$[a, b]$	$w(x) = 1$
Laguerre	$[0, \infty]$	$w(x) = e^{-x}$
	$[-\infty, \infty]$	$w(x) = e^{-x^2}$

Bereziki bi funtzio $f(x)$ eta $g(x)$ ortogonalak izango dira biderkadura eskalarrarekiko $\langle f, g \rangle = 0$ betetzen dutenean. Gauss-en formulak garatzeko funtsezkoa da $w(x)$ -ri dagokion berredura eskalarrarekiko ortogonalak diren polinomioak ezagutzea.

Teorema 2.6.1 *Existitzen dira j . mailako polinomioak, $p_j(x) \in \mathcal{P}_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ ortogonalak $\langle f, g \rangle$ biderkadura eskalarrarekin, hots, $\langle p_i(x), p_j(x) \rangle = 0$, $j \neq i$. Polinomio hauek prozesu errepikakorraz eraiki daitezke:*

$$(2.51) \quad \begin{cases} p_0(x) = 1, \\ p_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1})p_j(x) - \beta_{j+1}p_{j-1}(x). \end{cases} \quad \text{non} \quad \begin{cases} \alpha_{j+1} = \frac{\langle xp_j, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle}, \\ \beta_1 = 0, \\ \beta_{j+1} = \frac{\langle xp_{j-1}, p_j \rangle}{\langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle}. \end{cases}$$

frog.

Baldin bata bestearren segidan $\langle p_j, p_i \rangle = 0, \forall i < j$, baldintzak betetzen dituzten polinomioak eraiki behar baldin badugu, orduan bereziki $\langle p_{j+1}, p_j \rangle = 0$ eta ondorioz

$$(2.52) \quad \langle (x - \alpha_{j+1})p_j, p_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle xp_j, p_j \rangle = \alpha_{j+1} \langle p_j, p_j \rangle \Rightarrow \alpha_{j+1} = \frac{\langle xp_j, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle}.$$

Baita segidaren aurreko polinomioak ortogonaltasun baldintza bete beharko du, $\langle p_{j+1}, p_{j-1} \rangle = 0$, ondorioz

$$(2.53) \quad \langle (x - \alpha_{j+1})p_j - \beta_{j+1}p_{j-1}, p_{j-1} \rangle = 0 \Rightarrow \langle xp_{j-1}, p_j \rangle = \beta_{j+1} \langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle \Rightarrow \beta_{j+1} = \frac{\langle xp_{j-1}, p_j \rangle}{\langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle}.$$

Gauss-en n . ordenako koadratura formula eraikitzeke hurrengo urratsa $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ polinomioaren n erroak (denak errealak eta ezberdinak direla frogatu daiteke) hartzea da, $\{x_1, \dots, x_n\}$. Helburu hau lortzeko, behin $p_n(x)$ ikusitako formula errepikakorraz eraiki dugun, bere n erroak zenbakizko metodo baten bidez egin daiteke (bisekzioa, ebakitzaila, Newton,...). Hauxek izango dira funtzioa balioztatzeke puntuak koadratura formularen erabiltzeko.

Prozesua amaitzeko Gauss-en n . ordenako formularen $\{A_1, \dots, A_n\}$ pisuak edo koefizienteak hautatuto ditugu. Ondorioz formula honelakoa izango da:

$$(2.54) \quad \int_a^b w(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

Teorema 2.6.2 Baldin A_i koefizienteek sistema lineala osatzen duten ondoko berdintzak betetzen badituzte,

$$(2.55) \quad \int_a^b w(x)x^j dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^j, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

non x_i puntuak $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ polinomio ortogonalaren erroak diren, orduan Gauss-en koadratura formularen ordena $2n-1$ izango da,

$$(2.56) \quad \int_a^b w(x)p(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i), \quad \forall p(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}$$

frog.

Edozein $2n-1$ baino maila gutxiagoko polinomioa, $p(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}$, $p(x) = q(x)p_n(x) + r(x)$ moduan adieraz daiteke $q(x), r(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ izanik. Beronen integrala honela banandu daiteke

$$(2.57) \quad \int_a^b w(x)p(x) dx = \int_a^b w(x)(q(x)p_n(x) + r(x)) dx = \int_a^b w(x)q(x)p_n(x) dx + \int_a^b w(x)r(x) dx$$

Lehenengo integrala $\langle q, p_n \rangle$ da. $q \in \mathcal{P}_{n-1}$ eta $\{p_0, \dots, p_{n-1}$ polinomio ortogonalen multzoa espazio horren oinarria da, beraz, badago $q(x) = q_0 p_0(x) + \dots + q_{n-1} p_{n-1}(x)$ adierazteko modua oinarri horren polinomioen baturaren bidez. Ondorioz $\langle q, p_n \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} q_i \langle p_i, p_n \rangle = 0$. Orain erraz kalkula dezakegu p -ren integrala $p(x_i) = p_n(x_i)q(x_i) + r(x_i) = r(x_i)$ direla kontutan hartuz $p_n(x)$ -ren erroetan,

$$(2.58) \quad \int_a^b w(x)p(x) dx = 0 + \int_a^b w(x)r(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i r(x_i) = \sum_{i=1}^n A_i ((p_n(x_i)q(x_i) + r(x_i))) = \sum_{i=1}^n A_i p(x_i).$$

Polinomio ortogonalen propietateen bidez ondoko emaitza frogatu daiteke:

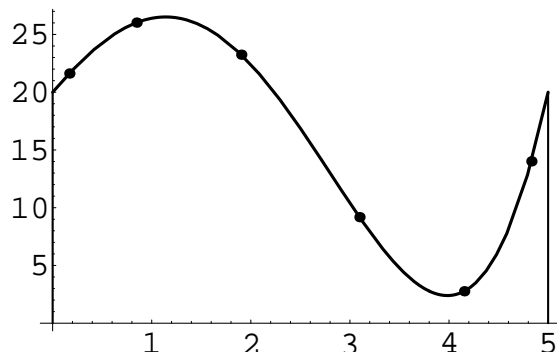
Biz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, $x \in [a, b]$ tartean $w(x)$ -arekiko $n + 1$ mailako polinomio ortogonalak. Baldin x_0, \dots, x_n bere erroak integrazio-formularen nodotzat hartzen baditugu, orduan:

- Formularen maila $= n + r \Rightarrow \int_a^b w(x)H(x)x^k dx = 0 \quad k = 0, \dots, r - 1$.
- Ez da existitzen $2n + 2$ doitasun-mailako formularik.
- $2n + 1$ ordenako formula eraikitzen duten x_0, \dots, x_n nodo eta A_0, \dots, A_n koefiziente bakarrak existitzen dira. Gainera nodo hauek tartearen erdigunearekiko simetrikoak dira eta koefizienteak positiboak dira; beraz, Gaussen formulak egonkorak dira eta berauen segida konbergentea da.
- Baldin $f \in C^{2n+2}[a, b]$, orduan $2n + 1$ mailako formularen erroa ondokoa da:

$$(2.59) \quad R^n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b w(x)H_n(x)^2 \quad \text{non} \quad H_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n).$$

Garapen hau ikusi eta gero, dauden nodo eta koefiziente askeen kopuruaren arabera formula berezi bat sortuko da, adibidez:

Izena	Parametro askeak	Doitasun maila	Parametro finkoak
Gauss	$A_0, \dots, A_n, x_0, \dots, x_n$	$2n + 1$	bat ere ez
Lobatto	$A_0, \dots, A_n, x_1, \dots, x_{n-1}$	$2n - 1$	$x_0 = a, x_n = b$
Newton-Cotes	A_0, \dots, A_n	n	$x_i = a + ih$
Chebyshev	x_0, \dots, x_n	n	$A_i = \frac{1}{n+1} \int_a^b w(x) dx$



Irudia 2.3: Irudian $0.4 * x^4 - 2 * x^3 - 2 * x^2 + 10 * x + 20$ polinomioari dagozkion Gaussen koadraturaren nodoak ageri dira.

Adibidea 2.6.1 Kalkula ezazu ondoko integral mugatuaren emaitz hurbildua 4 puntuetako Gauss-en koadratura formulaz,

$$\int_0^5 e^{\frac{1+x^3}{(1+x)^2}} dx$$

Soluzioa:

Integral zehatza mota honetako baturaren ordeztu nahi dugu,

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

Helburua betetzeko, lehenbizian $x \in [-1, 1]$ oinarrizko-tartean zenbakizko integrazio eredu orokorra garatuko dugu \bar{A}_i pisuak eta \bar{x}_i puntuak aukeratuz. Gero $x \in [a, b]$ tartera eramateko $x_i = a + (b - a) \cdot (1 - (-1)) \cdot (\bar{x}_i - (-1))$ eta $A_i = (b - a) / (1 - (-1)) \cdot \bar{A}_i$ aldagai aldaketa lineala aplikatuko dugu.

- Integral mugatua $[0, 5]$ tartean egingo dugu, $w(x) = 1$ dentsitate funtzioarekin. Ondoko formula errepikakorraren bitartez $\langle p_j, p_k \rangle = \int_{-1}^1 p_j(x)p_k(x)dx = 0$, $j \neq k$ ortogonaltasun baldintzak betetzen dituzten aurreneko 3 polinomio plazaratuko ditugu, .

$$p_{-1}(x) = 0, p_0(x) = 1,$$

$$p_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1})p_j(x) - \beta_{j+1}p_{j-1}(x), k \geq 2.$$

Baldin aurreko $p_{j+1}(x)$ -ren adierazpena aurretik kalkulaturako $p_j(x)$ eta $p_{j-1}(x)$ polino-
miengatik biderkatzen badugu orduan ortogonaltasun baldintzak betearazteko α_{j+1} eta β_{j+1}
koeffizienteak ondoko baldintzak beteko dute:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\langle xp_j, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle}, \quad \beta_{j+1} = \frac{\langle xp_{j-1}, p_j \rangle}{\langle p_{j-1}, p_{j-1} \rangle}$$

Iterazioaren aurreneko emaitzak $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ eta $p_1(x) = x$ dira eta hurrenez hurren balio
hauek aterako zaizkigu,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0, & \beta_2 &= \frac{1}{3}, & p_2(x) &= (x-0)p_1(x) - \frac{1}{3}p_0(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \\ \alpha_3 &= 0, & \beta_3 &= \frac{4}{15}, & p_3(x) &= (x-0)p_2(x) - \frac{4}{15}p_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \\ \alpha_4 &= 0, & \beta_4 &= \frac{9}{35}, & p_4(x) &= (x-0)p_3(x) - \frac{9}{35}p_2(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

- Zenbakizko integrazio formula garatzeko funtzioaren balioa hartzeko puntuak azken poli-
nomio ortogonalaren erroak dira, $p_4(x)$, hain zuzen. Maila handiagoko polinomioa izango
balitz, haren erroak kalkulatzeko bisekziokoa ala Newton-en metodo bezelako bat erabili
beharko genuke, baina kasu honetan nahikoa da $z = x^2$ aldagai aldaketa erabiltzea eta
ondorioztutako 2. mailako ekuazioa askatzea:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{35} = z^2 - \frac{6}{7}z - \frac{3}{35} = q(z), \\ q(z) = 0 \Rightarrow x^2 = z &= \frac{6/7 \pm \sqrt{6^2/7^2 - 4 \cdot 3/35}}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0.7415557471, \\ z_2 = 0.11558711, \end{cases} \\ \bar{x}_1 &= -\sqrt{z_1} = -0.8611363, & \bar{x}_2 &= -\sqrt{z_2} = -0.339981, \\ \bar{x}_3 &= \sqrt{z_2} = 0.339981, & \bar{x}_4 &= \sqrt{z_1} = 0.8611363. \end{aligned}$$

- Baturaren bidezko integrazio formula hurbilduak $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ eta
 $f(x) = x^3$ funtzioekin emaitz zehatza emango du. Ondorioz sistema lineala eraiki dezakegu
non \bar{A}_i , $i = 1, \dots, 4$ koefizienteak ezezagunak diren,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dx &= 2 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4, \\ \int_{-1}^1 x dx &= 0 = -0.8611363\bar{A}_1 - 0.339981\bar{A}_2 + 0.339981\bar{A}_3 + 0.8611363\bar{A}_4, \\ \int_{-1}^1 x^2 dx &= \frac{2}{3} = 0.7415557\bar{A}_1 + 0.1155871\bar{A}_2 + 0.1155871\bar{A}_3 + 0.7415557\bar{A}_4, \\ \int_{-1}^1 x^3 dx &= 0 = -0.6385806\bar{A}_1 - 0.0392974\bar{A}_2 + 0.0392974\bar{A}_3 + 0.6385806\bar{A}_4, \end{aligned}$$

Matrizialki idatziko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.8611363 & -0.339981 & 0.339981 & 0.8611363 \\ 0.7415557 & 0.1155871 & 0.1155871 & 0.7415557 \\ -0.6385806 & -0.0392974 & 0.0392974 & 0.6385806 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \\ \bar{A}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemaren soluzioa hau da:

$$\bar{A}_1 = 0.347855, \bar{A}_2 = 0.652145, \bar{A}_3 = 0.652145, \bar{A}_4 = 0.347855.$$

- Badaude beharrezko datu guztiak transformazio linealari ekiteko eta x_i puntuak eta A_i pisuak ondorioztatzeke,

$$x_1 = 0.347159, x_2 = 1.65005, x_3 = 3.34995, x_4 = 4.65284,$$

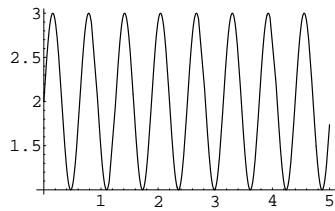
$$A_1 = 0.869637, A_2 = 1.63036, A_3 = 1.63036, A_4 = 0.869637.$$

- Hau da batura-formulako integralaren hurbilketa (emaitz zehatza $I = 1.488268$ da),

$$\sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = 0.869637 \cdot 0.56323 + 1.63036 \cdot 0.457443$$

$$+ 1.63036 \cdot 0.130079 + 0.869637 \cdot 0.0414384 = 1.48372.$$

Adibidea 2.6.2 Jarraian, lehenengoan ikusitako metodoak $f(x) = \sin(10 * x) + 2$ funtzioari aplikatuko dizkiogu eta emaitzak konparatzeko guztietan funtzioaren balioztapen-kopuru antzekoa erabiliko dugu. Integrazioaren 6 digito esangarrirekin emaitza zehatza 10.0035 da.



Irudia 2.4: Integrazio egokia kalkulatzeko mota hauetako funtzioek balioztapen ugari behar dituzte gora-behera asko dutelarik.

Baliozt. kop.	Simpson konp.	Gauss	Romberg	Neville
2	9.34018	10.193406	9.3401817	9.3401817
5	9.34018	9.9372702	9.3401829	7.6629329
9	9.34018	10.125940	10.297267	6.8614797
16	9.98908	10.006945	9.9831321	9.3333654
30	10.0037	10.003494	10.003827	9.9980821
60	10.0035		10.003502	10.003500

2.7 Ariketak

Ariketa 1. Froga ezazu $p(x) \in \mathcal{P}_\epsilon$ polinomio karratuko interpolazioari dagokion Newton-cotes-en formula arrunten (Simpson erregela) koefizienteak berdin ondorioztatzen direla $\{1, x, x^2\}$ funtzioen integral zehatzen propietateaz eta baita Lagrange-ren formularen adierazpena erabiliz.

Ariketa 2. Hurbil ezazu ondoko $f(x)$ funtzioaren integral definitua $[0, 1]$ tartean $x_0 = 0$, $x_j = x_0 + jh$ balioak erabiliz $j = 1, \dots, 8$ eta $h = (1 - 0)/8$ urrats konstantea izanik. Erabili Trapezioen formula konposatua., simpson-en formula konposatua eta rombreg-en koadratura formula.

$$\int_0^1 \ln \frac{x^2 + 3x + 5}{1 + x^4} dx.$$

Kapitulua 3

Ek. diferentz. zenbakizko soluzioa

3.1 Sarrera

Ekuazio diferentziala berdintza bat da menpeko aldagai bat edo funtzioa $y(x)$, haren zenbait deribatu $y^{(n)}$ eta x aldagai askearen funtziopeko adierazpenak erlazionatzen duena. Hastapen balioetako lehenengo ordenako problema ondoko adierazpidez idazten da,

$$(3.1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = \nu. \end{cases}$$

Orokorrean n . ordenako problema ondoko eraz idatz daiteke

$$(3.2) \quad \begin{cases} g(y^{(n)}(x), \dots, y'(x), y(x), x) = 0, \\ y^{(n-1)}(a) = \nu_{n-1}, \dots, y(a) = \nu_0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^{(n)}(x) = f(y^{(n-1)}(x), \dots, y'(x), y(x), x), \\ y^{(n-1)}(a) = \nu_{n-1}, \dots, y(a) = \nu_0. \end{cases}$$

Azken hau $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)$, \dots , $z_n(x) = y^{(n-1)}(x)$ aldagai aldaketa aplikatuz lehenengo ordenako ekuazio diferentzialen problema bektoriala bihur daiteke,

$$(3.3) \quad \begin{cases} z_1'(x) = z_2, \\ \vdots \\ z_n' = f(z_{n-1}(x), \dots, z_2(x), z_1(x), x), \\ z_n(a) = \nu_{n-1}, \dots, z_1(a) = \nu_0. \end{cases}$$

Teorema 3.1.1. (Picard-Lindelof-en existentzi eta bakartasun teorema)

Baldin $D = \{(x, \mathbf{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m\}$ eremuan $\mathbf{y}'(x) = f(x, \mathbf{y})$ ekuazioan parte hartzen duen f funtzioa jarraitua bada eta \mathbf{y} aldagaiarekiko Lipschitz baldintza betetzen bada L konstantearekin, ($\|f(x, \mathbf{y}) - f(x, \mathbf{y}^*)\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|$), orduan ekuazio diferentzialak badauka soluzio bakar bat jarraitua eta diferentziagarria $\mathbf{y}(a) = \nu \in \mathbb{R}^m$ hasierako baldintza betetzen duena.

Gainera, baldin $\mathbf{y}_1(x)$ eta $\mathbf{y}_2(x)$ funtzioek $\mathbf{y}_1(a) = \nu_1$ eta $\mathbf{y}_2(a) = \nu_2$ hastapen baldintzei dagokizkien soluzioak badira, orduan haien arteko aldea ondoko formulaz bornatuta dago,

$$(3.4) \quad \|\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)\| \leq Le^{L|x-a|}\|\nu_1 - \nu_2\|$$

3.2 Zenbakizko metodo arruntak

Ekuazio diferentzial asko ezlinealak dira eta analitikoki ebazteko oso zailak edo ezinezkoak dira, beraz funtsezkoa da soluzioaren zenbakizko hurbilketak kalkulatzeko eta soluzio hauek hainbat eta doitasun maila handiagoa erabili orduan eta zehatzagoak izatea. Demagun $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ aldagai askearen eremua zatikatzen dugula, $h_j = x_j - x_{j-1}$ urratsak erabiliz (gehienetan $h_j = h$ urrats konstantea erabiltzen da), x_j puntu edo nodoetan soluzioaren emaitz hurbildua $y_j \approx y(x_j)$ kalkulatzeko. Zenbakizko metodoek puntu horietan emaitz hurbilduaren lana beteko dute ondoko baldintzak edo kontzeptuaz betetzen.

Definizioa 3.2.1. (Konbergentzia)

Demagun $x = a + nh \in [a, b]$ tarteko edozein puntu finkoa, non $h = (x - a)/n$ eta x -ra iristeko urratsa luzera murriztu, $h \rightarrow 0$, eta aldiberean urrats kopurua handitu, $n \rightarrow \infty$, baliokidea den. Orduan zenbakizko metodoa konbergentea izango da baldin $\{y_j\}_{j=0}^n$ segida eraikitzen duen eta

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(x)$$

Definizioa 3.2.2. (Zero-egonkortasuna)

Zenbakizko metodoa zero-egonkorra dela diogu baldin existitzen bada h_0 urratsa non $\forall h \leq h_0$ urrats luzera aukeratzen bada, orduan hasierako baldintzan egindako ϵ neurriko perturbazio bornatua, $y^*(0) = \nu + \epsilon$, ondorengo $\{y_j^*\}_{j=0}^n$ zenbakizko soluzioan aldaketa bornatua eragingo duen, $|y_j - y_j^*| < \infty, \forall 1 \leq j \leq n$.

Definizioa 3.2.3. (*Egonkortasun absolutua*)

Zenbakizko metodoa egonkortasun absolutua betetzen duela diogu baldin existitzen bada h_0 urratsa non $\forall h \leq h_0$ urrats luzera aukeratzen bada, orduan hasierako baldintzan egindako ϵ neurriko perturbazio bornatua, $y^*(0) = \nu + \epsilon$, ondorengo $\{y_j^*\}_{j=0}^n$ zenbakizko soluzioan ϵ konstanteaz bornatutako aldaketa eragingo duen, $|y_j - y_j^*| \leq \epsilon, \forall 1 \leq j \leq n$.

Ekuazio diferentzialak hurbiltzeko zenbakizko metodoak lehenengo ordenako ekuazioaren edo sistemaren gainean aplikatzen dira. Metodo expliziturik arruntena Euler-ena da eta deribatua hurbilketa diskretuan oinarrituta dago, $f(x, y(x)) = y'(x_n) \approx (y(x_{n+1}) - y(x_n))/h$. Formula hau $y(x_{n+1})$ hurbiltzeko azterna ematen digu,

$$(3.6) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Teorema 3.2.1. (*Euler-en metodoaren konbergentzia*)

Baldin $f(x, y)$ jarraitua bada $D = \{(x, \mathbf{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m\}$ eremuan, y aldagaiarekiko eta L konstantearekiko Lipschitz eta hasierako baldintza benetako hasierako baldintzaren baliora konbergitzen badu, $\lim_{h \rightarrow 0} y_0 = \nu$, orduan Euler-en metodoa konbergentea da.

Frog:

Frogapena errazteko har dezagun $f \in C^1$ dela, ondorioz $y \in C^2$ eta $\|y''(\xi)\| \leq K < \infty$ bornatua dago $[a, b]$ tartean.

Badago emaitz erraz bat $|u_{j+1}| \leq (1 + A)|u_j| + B$, $A > 0$, $B \geq 0$ betetzen duen $\{u_j\}$ segidak $|u_n| \leq e^{nA}|u_0| + B(e^{nA} - 1)/A$ bornapena ziurtatzen duena.

Demagun $e_n = y(x_n) - y_n$ n . puntuko errore oso, Taylor-en garapenak hau dio

$$(3.7) \quad y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + (h^2/2)y''(\xi_n)$$

Aldiberean Euler-en metodoaren hurbilketa $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ da, beraz adierazpenen kendura burutuz eta Lipschitz baldintza aplikatuz

$$(3.8) \quad \begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + h(f(x_n, y_n) - f(x_n, y(x_n))) + (h^2/2)y''(\xi_n) \Rightarrow \\ \|e_{n+1}\| &= \|e_n\| + hL\|e_n\| + (h^2/2)K \leq (1 + hL)\|e_n\| + (h^2/2)K. \end{aligned}$$

Beraz, $\{\|e_j\|\}$ goian aipatutako segidaren baldintza beteko du eta

$$(3.9) \quad \|e_n\| \leq e^{nhL}\|e_0\| + \frac{e^{nhL} - 1}{hL} \frac{h^2}{2}K \leq e^{(b-a)L}\|e_0\| + \frac{Ke^{(b-a)L} - 1}{2L}h.$$

□

Teorema 3.2.2. (*Euler-en metodoaren zero-egonkortasuna*)

Baldin $f(x, y)$ jarraitua bada $D = \{(x, \mathbf{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^m\}$ eremuan, y aldagaiarekiko eta L konstantearekiko Lipschitz, orduan Euler-en metodoa zero-egonkorra da.

Frog:

Demagun $\{y_j\}$ eta $\{z_j\}$ hurrenez hurren Euler-en metodoa zuzenak, $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ eta eraldatutak, $z_{n+1} = z_n + h(f(x_n, z_n) + \delta)$, ematen duten hurbilketa-segidak. Haien arteko errorea $r_n = y_n - z_n$ izanik, orduan ondorengo errore segida bornatuta egongo da,

$$(3.10) \quad \|r_{n+1}\| = \|r_n\| + hL\|r_n\| + h\|\delta_n\| \leq e^{(b-a)L}\|r_0\| + \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L} \max_n \|\delta_n\|.$$

□

Kasu praktiko gehienetan zaila da egonkortasun absolutua bermatzea. Baina puntu baten ingurunean soluzio zehatzaren gaineko perturbazio txikien portaera aztertzeke ekuazio diferentzialak linearizatu daitezke. Demagun $x_0 \in [a, b]$ puntuan $y(x_0) = y_0$ hastapen baldintza betetzen duen $y' = f(x, y)$ ekuazioaren soluzioa eta $\tilde{y}(x_0) = y_0 + \epsilon_0$ hastapen baldintza perturbatua betetzen duena, non $|\epsilon_0| \ll 1$ hondarra den. Demagun ere (x_0, y_0) -ren inguruan $\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon(x)$ baturaren moduan idatz daitekela non $\epsilon(x)$ hondar-funtzioa deribagarria eta txikia den, $|\epsilon(x)| \ll 1$. Azken hondar-funtzio honen bilakaera x_0 puntuaren inguruan aztertzeke ondoko ekuazio hurbildua begiratuko dugu Taylor-en garapena erabiliz (x_0, y_0) puntutik,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \tilde{y}(x_0) = f(x_0, \tilde{y}(x_0)) &\Leftrightarrow y'(x_0) + \epsilon'(x_0) = f(x_0, y_0 + \epsilon_0) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \epsilon_0 + O(\epsilon_0^2) \Rightarrow \epsilon'(x_0) \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \epsilon_0. \end{aligned}$$

Amaieran ϵ perturbazioa edo erroreak bilakaera $\epsilon' = \lambda \epsilon$ motako ekuazioaren menpean dago, non $\lambda = \partial f(x, y)/\partial y$ den. Aldiberean zenbakizko metodo hurbildua, Euler-ena hain zuzen, eragin antzekoa dauka x_n puntuan metatutako $\epsilon_n = y_n - y(x_n)$ hondarraren gainean,

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) &\Leftrightarrow y(x_{n+1}) + \epsilon_{n+1} = y(x_n) + \epsilon_n + hf(x_n, y(x_n) + \epsilon_n) = \\ &hf(x_n, y(x_n)) + h\epsilon_n \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y} + O(\epsilon_n^2) \Rightarrow \epsilon_{n+1} \approx \epsilon_n + h\epsilon_n \frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Baldin $\bar{h} = h\lambda$ parametroak $|\epsilon_{n+1}/\epsilon_n| \leq 1$ bornapernari eusten badio, $\lambda = \partial f(x, y)/\partial y$ izanik, orduan metodoa absolutuki egonkorra dela diogu. Bornapen hori betearazten duten \bar{h} balioek egonkortasun absolutuko $\Omega \subset \mathbb{C}$ eremua osatuko dute. Horregatik zenbakizko metodoetako literaturan $y' = \lambda y$ test ekuazioa aurkezten da eta $|y_{n+1}/y_n| \leq 1$ betearazten $\bar{h} = h\lambda$ balioei garrantzi handia ematen zaie, egonkortasun absolutuko eremua adierazten dutelako.

Adibidea 3.2.1. Euler-en metodoaren egonkortasun absolutuko baldintzak zehazteko $y' = \lambda y$ ekuazioa hartuko dugu eta $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ formula explizitua $y_{n+1} = y_n + hy_n = (1 + \lambda h)y_n = (1 + \bar{h})y_n$ rekurtsioa bihurtzen da. Hemen $|y_{n+1}/y_n| = |1 + \bar{h}| \leq 1$ bete behar da errorea ez hazitzeko kontrolik gabe eta horretarako λ eta $\bar{h} \in \mathbb{C}$ daudenez, $\bar{h} \in D$ eremuan egon behar du $D(-1, 0)$ zentrudun eta 1 erradiodun zirkulua izanik.

Kapitulua 4

Runge-Kutta Metodoak

Runge-Kutta metodoak urrats batekoak izango dira eta x_{n+1} puntuan $y(x)$ ekuazio diferentzialaren soluzioaren hurbiltzeko $y(x_n)$ -ri ϕ gehikuntza batuko diogu. Formulazio orokorra hau da s etapadun metodo baterako,

$$(4.1) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \\ \phi(x_n, y_n; h) = \sum_{i=1}^s b_i K_i, \\ K_i = f\left(x_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j\right). \end{cases}$$

Metodoa explizitua izango da $a_{ij} = 0, \forall j > i$, honek esan nahi du K_i bakoitzaren kalkulua ezagututako balioetan oinarrituta dagoela eta zuzenean kalkulatu dezakegula, aldiz a_{ij} pisuek edo koefizienteek ez badute murrizketa hori betetzen, orduan implizitua izango da ($a_{ij} = 0, \forall j \geq i$ betetzen bada erdiimplizitua dela diogu). Metodo implizitua explizitua baino emaitz zehatzagoak ematen dute h hurrats bera erabiltzen bada, baina eragozpena da K_i koefizienteak kalkulatzeko ekuazio ezlinealen sistema askatu beharko dela. K_i bakoitzak $y(x)$ soluzioaren deribatua den $f(x, y)$ funtzioaren balio emango du, beraz ϕ funtzioa y -ren deribatua zenbait puntuetan hartutako balioztapenen batezbestekoa baino ez da.

Definizioa 4.0.1. (*Mozketa-errore lokala*)

Ondoko aldeak zenbakizko metodoaren mozketa-errore lokala neurtuko du eta haren esanahia urrats batean eragindako errorea da aurreko urratsetako balioa zehatza denean, $y_n = y(x_n)$,

$$(4.2) \quad d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y_n; h).$$

Definizioa 4.0.2. (*Mozketa-errore osoa*)

Ondoko aldeak n urratsetan garatu den zenbakizko metodoaren mozketa-errore osoa neurtuko du,

$$(4.3) \quad e_n = y(x_n) - y_n.$$

Definizioa 4.0.3. (*Tinkotasuna*)

Demagun $x = x_N$ finkoa non $h = (x - x_0)/N$ eta x -ra heltzeko eta $x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$ diskretizazioaren tarteko puntuetan soluzioaren hurbilketa kalkulatzeko baliokidea da gero eta urrats trikiagoak hartzea, $h \rightarrow 0$, eta puntu kopurua handitze, $N \rightarrow \infty$, orduan zenbakizko metodoa tinkoa da baldin ondoko propietatea betetzen bada,

$$(4.4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{n=0, \dots, N-1} \left| \frac{d_{n+1}}{h} \right| \right) = 0$$

Gainera, baldin $d_{n+1} = O(h^{p+1})$ tamainakoa bada, orduan p ordenako tinkoa daukala diogu.

Teorema 4.0.1. (*Tinkotasun baldintza*)

Zenbakizko metodoa tinkoa izateko baldintza nahikoa eta beharrezkoa da $\phi(x_n, y_n; 0) = f(x, y)$ betetzea.

Teorema 4.0.2. (*Tinkotasun ordena*)

Demagun $f(x, y)$ funtzioa $p - 1$ aldiz jarraiki deribagarria $D = [a, b] \times \mathbb{R}$ eremuan eta $\phi(x, y; h)$ funtzioa h -rekin $p - 1$ aldiz jarraiki deribagarria orduan zenbakizko metodoak bete behar duen baldintza nahikoa eta beharrezkoa p ordenako konsistentzia betetzeko, hau da,

$$(4.5) \quad \left. \frac{\partial^k}{\partial h^k} \phi(x, y; h) \right|_{h=0} = \left(\frac{1}{k+1} \right) \frac{d^k}{dx^k} f(x, y(x)), \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

Definizioa 4.0.4. (*Zero-egonkortasuna*)

Demagun $\{y_n\}$ eta $\{z_n\}$ hurrenez hurren zenbakizko bi metodo hauek lortutako segidak,

$$(4.6) \quad \begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}, \\ y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \end{cases} \quad \begin{cases} z_0 \in \mathbb{R}, \\ z_{n+1} = z_n + h(\phi(x_n, z_n; h) + \epsilon_n), \end{cases}$$

orduan $\phi(x_n, y_n; h)$ gehikuntza funtzioari dagokion zenbakizko metodoa zore-egonkorra da baldin existitzen badira h -rekiko menpekotasunik ez daukaten M_1 eta M_2 konstante finituak non

$$(4.7) \quad \max_{n=0, \dots, N} |y_n - z_n| \leq M_1 |y_0 - z_0| + M_2 \max_{n=0, \dots, N} |\epsilon_n|.$$

Teorema 4.0.3. (*Zero-egonkortasunarako baldintza*)

Baldin $\phi(x, y; h)$ Lipschitz bada y -rekin, $\exists M \in \mathbb{R}$, $|\phi(x, y; h) - \phi(x, y^*; h)| \leq M|y - y^*|$, $\forall (x, y, h) \in D$, orduan zenbakizko metodoa zero-egonkorra da.

Definizioa 4.0.5. (*Konbergentzia*)

Baldin zenbakizko metodoaren hasierako balioa y_0 ekuazio diferentzialaren hastapen baldintza $y(0) = \nu$ gero eta gehiago hurbiltzen badu, $\lim_{h \rightarrow 0} y_0 = \nu$, eta mozketa-errore osoa baita 0-rantz konbergitzen badu $[a, b] = [x_0, x_N]$ tartean, $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{n=0, \dots, N} |e_n| \right) = 0$ orduan zenbakizko metodoa konbergentea dela diogu.

Teorema 4.0.4. (*Baliokidetasun teorema*)

Baldin $\phi(x, y; h)$ jarraitua bada $[a, b] \times \mathbb{R} \times [0, \bar{h}]$ iturri eremu itxian (beraz absolutuki jarraitua), L konstatearekiko Lipschitz y aldagaiarekin (beraz zero-egonkorra) eta Runge-Kutta metodoaren hurbilketa a puntuan, $y_0, h \rightarrow 0$ doanean $y(a) = \nu$ balio zehatzera badoa, $\lim_{h \rightarrow 0} y_0 = \nu$, orduan baliokidea da zenbakizko metodoa tinkoa eta zero-egonkorra izatea.

Frog:

Teorema honetan garrantzitsua da azpimarratzea y aldagaiarekin $f(x, y)$ Lipschitz deanean orduan ϕ funtzioa y -rekin Lipschitz izango dela ere. y_n zenbakizko soluzioa $y(x_n)$ soluzio zehatzerantz konbergetea dela frogatzeko metodoa tinkoa dela bermatu behar da eta azken hau askoz errazagoa izaten da. Teoremaren alde bakar bat frogatuko dugu, tinkotasuna \Rightarrow konbergentzia, hain zuzen.

Demagun $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ eremua eta $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ diskretizazioa non $h = x_{i+1} - x_i$ den. Runge-Kutta metodoa tinkoa bada $f(x, y(x)) = \phi(x, y(x); 0)$ da. Azter dezagun ekuazio zehatza eta hurbilketa segiden arteko aldea:

$$(4.8) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) = \phi(x, y(x); 0) \\ y(x_0) = \nu \end{cases} \quad \text{eta} \quad \begin{cases} y_n = y_{n-1} + h\phi(x_{n-1}, y_{n-1}; h) \\ y_0 = \nu_0 \end{cases}$$

Batazbesteko balioaren teorematik $\exists x = x_{n-1} + \theta_n h \in [x_{n-1}, x_n]$, $\theta_n \in [0, 1]$ non

$$(4.9) \quad y(x_n) - y(x_{n-1}) = hy'(x_{n-1} + \theta_n h) = h\phi(x_{n-1} + \theta_n h, y(x_{n-1} + \theta_n h); 0).$$

Bedi $e_n = y(x_n) - y_n$ errore osoa x_n -an, orduan $y(x_n)$ eta y_n balioak hurrenez hurren $y(x_{n-1})$ eta y_{n-1} funtziopeko errekursioaz ordezkaturaz, hau lortuko dugu,

$$(4.10) \quad \begin{aligned} e_n &= e_{n-1} + h [\phi(x_{n-1} + \theta_n h, y(x_{n-1} + \theta_n h); 0) - \phi(x_{n-1}, y_{n-1}; h)] \\ &- \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); 0) + \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); 0) - \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); h) + \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); h). \end{aligned}$$

Azken bi terminoen batura/kendurak gehitu ditugu ezberdintza triangeluarra aplikatzeko. Orain ϕ Lipschitz izateagatik bornapen hau erabil daiteke

$$(4.11) \quad |\phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); h) - \phi(x_{n-1}, y_{n-1}; h)| \leq L|e_{n-1}|,$$

eta ϕ absolutuki jarraitua izateagatik beste hauek

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \max_{x_{n-1} \in [a, b]} |\phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); 0) - \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); h)| &= \alpha_n(h) = O(h), \\ \max_{x_{n-1} \in [a, b]} |\phi(x_{n-1} + \theta_n h, y(x_{n-1} + \theta_n h); h) - \phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}); 0)| &= \beta_n(h) = O(h). \end{aligned}$$

Beraz $|e_n| \leq (1 + hL)|e_{n-1}| + h\gamma_n(h)$ bornatuta dagon non $\gamma_n(h) = \alpha_n(h) + \beta_n(h)$ den.

$$(4.13) \quad \max_{1 \leq n \leq N} |e_n| \leq e^{NhL}|e_0| + \frac{e^{NhL} - 1}{L}\gamma(h) = \max_{1 \leq n \leq N} |e_n| \leq e^{(b-a)L}|e_0| + \frac{e^{(b-a)L} - 1}{L}\gamma(h)$$

Baldin $\lim_{n \rightarrow 0} |e_0| = 0$ eta $\lim_{N \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ badira, orduan $\lim_{N \rightarrow \infty} y_n = y(x_n)$. Gainera prozesu honetaz lortutako $y(x)$ funtzioa $y(a) = \nu$ hastapen baldintzarekiko ekuazio diferentzialaren soluzioa izango da f funtzioa y -rekiko Lipschitz izateagatik eta bakartasun teoremagatik. \square

Adibidea 4.0.1. (Euler-en metodo explizituaren tinkotasun ordena 1 da) Demagun ekuazio diferentzialaren soluzioa hurbiltzen duen $\{y_n\}$ segida eraikitzeke Euler-en formula arrunta eta explizitua $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$. Baldin $y_n = y(x_n)$ zehatza dela hartzen badugu, orduan $x_{n+1}f = x_n + h$ puntuko $y(x_{n+1})$ soluzio zehatzarekiko alde kalkulatzean, alde batetik Taylor-en garapena $y(x_n)$ puntutik eta bestetik zenbakizko metodoaren formula erabiliko dugu,

$$(4.14) \quad d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \left(y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) \right) - (y_n + hf(x_n, y_n)) = \\ (y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2) - (y_n + hf(x_n, y_n))) = O(h^2).$$

Beraz $d_{n+1} = O(h^2) = O(h^{p+1})$, $p = 1$ ordena izanik.

Adibidea 4.0.2. (Euler-en metodo implizituaren edo trapezio erregelaren tinkotasun ordena 2 da) Demagun ekuazio diferentzialaren soluzioa hurbiltzen duen $\{y_n\}$ segida eraikitzeke trapezioen erregela izena duen formula implizitua $y_{n+1} = y_n + (h/2)(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$. Baldin $y_n = y(x_n)$ zehatza dela hartzen badugu, orduan $x_{n+1} = x_n + h$ puntuko $y(x_{n+1})$ soluzio zehatzarekiko alde kalkulatzean, alde batetik Taylor-en garapena $y(x_n)$ puntutik eta bestetik zenbakizko metodoaren formula erabiliko dugu. Gogora dezagun $d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{2+1}) = O(h^3)$ izateko zenbakizko hurbilketak ondoko adierazpenaren lehenengo 3 terminoak adostu beharko dituela,

$$(4.15) \quad y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + f_n \frac{\partial f_n}{\partial y} \right) + O(h^3).$$

Hemen $f_n = f(x_n, y_n)$ laburpena darabilgu. Aurreko adierazpena eta implizitoki emanda dagoen y_{n+1} -rena konparatzeko, azken honen $O(h^2)$ ordenako Taylor-en garapena idazten hasiko gara

$$(4.16) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f(x_{n+1}, y_{n+1})) = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_n + O(h)) = y_n + hf_n + O(h^2).$$

Adierazpen hau $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ funtzioan sartuz eta azken honen $O(h^2)$ ordenako Taylor-en garapena idatziz,

$$(4.17) \quad f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n + h, y_n + hf_n + O(h^2)) = f_n + \frac{\partial f_n}{\partial x}h + \frac{\partial f_n}{\partial y}hf_n + O(h^2)$$

Azken adierazpen hau berriro y_{n+1} -ean sartzen badugu

$$(4.18) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f_n + f_n + h \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n \right) + O(h^2) \right) = \\ y_n + hf_n + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} + \frac{\partial f_n}{\partial y} f_n \right) + O(h^3).$$

Beraz, azkenik $d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3) = O(h^{p+1})$ lortu dugu, $p = 2$ ordena izanik.

Runge-Kutta motako metodoaren eraginkortasuna neurtzeko bi ezaugarri aztertu behar dira, lehenengoa aurreko adibidetan ikusitako tinkotasun ordena zehaztea da, p indizea, eta hori, ahal den handiena izatea komenigarria da, bigarrena konbergentzi absolutuko eremua neurtzea da, hau da $y' = \lambda y$ test-ekuazioa hartu eta ordezkatu metodoaren formularen $p(\bar{h}) = y_{n+1}/y_n$ zehazteko zein \bar{h} parametroaren balioetarako (egonkortasun-absolutuko eremua) $p(\bar{h})$ polinomio karakteristikoaren r_i erroen moduluak $|r_i| \leq 1$ bornatutak dauden.

Adibidea 4.0.3. (Euler-en eta trapezio erregelaren egonkortasun-absolutuko eremuak) Euler-en $p = 1$ ordenako metodo explizituaren formula $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ da eta $y' = \lambda y$ ekuazioari aplikatuz honela geratuko da,

$$(4.19) \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n = (1 + \bar{h})y_n \Rightarrow p(\bar{h}) = \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \bar{h}$$

Kopuru hori bornatuta mantentzeko $|p(\bar{h})| \leq 1$ eta hori gertatuko da \mathbb{C} eremu konplexuko $(-1, 0)$ zentrudun eta 1 erradiodun zirkuluan.

Bestaldetik $y_{n+1} = y_n + (h/2)(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$ metodo implizittoa $y' = \lambda y$ ekuaziopean honela geratuko da,

$$(4.20) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) = y_n + \frac{h}{2}\lambda(y_n + y_{n+1}) \Rightarrow p(\bar{h}) = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1 + \bar{h}/2}{1 - \bar{h}/2}$$

Azken honek adierazten duen d eremua $|p(\bar{h})| \leq 1$ betetzeko $(-\infty, 0) \subset D$ ardatz errealaaren zati negatibo osoa barneratuko du.

4.1 Orden handiko Runge-Kutta Metodoak

Demagun 3 etapadun Runge-Kutta motako zenbakizko metodo explizitua,

$$(4.21) \quad y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h) = y_n + h(b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3)$$

K_i bakoitzaren definizioan soilik K_j balioak parte hartzeak ($j < i$) piso edo konstante asko gutxi baimentzen ditu tinkotasun baldintzak bete beharrarengatik:

$$(4.22) \quad \begin{cases} K_1 = f(x, y), \\ K_2 = f(x + hc_2, y + hc_2K_1), \\ K_3 = f(x + hc_3, y + h(a_{31}K_1 + (c_3 - a_{31})K_2)), \end{cases}$$

Metodoak 3 etapadun izanik, eta $\{b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, a_{31}\}$ parametro askeak zehazteko ahal den ordenik handiena lortzeko, $(\partial^k \phi(x, y; 0))/(\partial h^k) = 1/(k+1) \cdot (d^k f(x, y))/(dx^k)$ erabiliko dugu. Orduan $f(x+h, y(x+h))$ eta baita $\phi(x, y; h)$ Taylor-en berretura-serieaz garatzea h -rekin kome-nigarria da. Gero batugaiz batugai berdinduko ditugu eta parametro askeen gainean agertzen diren baldintzak plazaratuko ditugu. Gehienez $p = 3$ ordenako metodoa eraiki dezakegu.

Garapenak sinplifikatzeko $f(x, y) = f$, $f_x(x, y) = f_x$, $f_y(x, y) = f_y$ idatzi eta adierazpen murriztu hauek erabiliko ditugu: $F = f_x + ff_y$, $G = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy}$ eta h^3 edo orden altuagoko batugaiak $O(h^3)$ batugaipen pilatuko ditugu. Alde batetik $y(x+h)$ -ren garapena idatziko dugu $f(x+h, y(x+h))$ adierazpenaren garapenaren laguntzaz:

$$(4.23) \quad \begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4) = \\ & y(x) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_yf) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_yf_x + f_y^2f) + O(h^4) = \\ & y(x) + hf + \frac{h^2}{2}F + \frac{h^3}{6}(G + Ff_y) + O(h^4) \end{aligned}$$

Bestetik $\phi(x_n, y_n; h) = (b_1K_1 + b_2K_2 + b_3K_3)$ garatuko dugu

$$(4.24) \quad \begin{aligned} K_1 &= f(x, y) = f, \\ K_2 &= f(x + hc_2, y + hc_2K_1) = f + hc_2(f_x + K_1f_y) + \\ & \quad \frac{(hc_2)^2}{2}(f_{xx} + K_1f_{xy} + K_1^2f_{yy}) = f + hc_2F + \frac{(hc_2)^2}{2}G, \\ K_3 &= f(x + hc_3, y + h(a_{31}K_1 + (c_3 - a_{31})K_2)) = \\ & f + h \{ c_3f_x + [a_{31}f + (c_3 - a_{31})(f + hc_2F + O(h^2))] f_y \} + \frac{h^2}{2} \{ c_3^2f_{xx} + \\ & 2c_3 [a_{31}f + (c_3 - a_{31})(f + O(h))] f_{xy} + [(a_{31}f + (c_3 - a_{31})(f + O(h))]^2 f_{yy} \} = \\ & \dots = f + hc_3F + h^2 \left[c_2(c_3 - a_{31})Ff_y + \frac{c_3^2}{2}G \right], \end{aligned}$$

Ondorioz $\phi(x_n, y_n; h)$ gehikuntza funtzioaren adierazpena honela geratuko da

$$(4.25) \quad \phi(x_n, y_n; h) = (b_1 + b_2 + b_3)f + h(b_2c_2 + b_3c_3)F + \frac{h^2}{2}[2b_3c_2(c_2 - a_{31})Ff_y + (b_2c_2^2 + b_3c_3^2)G] + O(h^3)$$

Kasu honetan ordenik handiena lortzeko parametro askeek ondoko ekuazioak bete beharko dute:

$$(4.26) \quad \begin{aligned} (b_1 + b_2 + b_3) &= 1, \\ (b_2c_2 + b_3c_3) &= 1/2, \\ b_3c_2(c_2 - a_{31}) &= 1/6, \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= 1/3. \end{aligned}$$

Aurreko sistemak infinitu soluzio dauzka 6 ezezagun dauden bitartean 4 baldintza baino ez daudelako. Metodo ohiko eta eraginkorrenak simetriaren bat aurkezten dute haien koefizientetan. Adibidez, ondoko 3 ordenako metodoak erabilienetakoak dira, besteak beste Heun-en formula eta Kutta-ren formula:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_3) \\ \text{(Heun-en formula)} \end{aligned} \quad \begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + (1/3)h, y_n + (1/3)hK_1), \\ K_3 = f(x_n + (2/3)h, y_n + (2/3)hK_2). \end{cases}$$

$$(4.28) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \\ \text{(Kutta-ren formula)} \end{aligned} \quad \begin{cases} K_1 = f(x_n, y_n), \\ K_2 = f(x_n + (1/2)h, y_n + (1/2)hK_1), \\ K_3 = f(x_n + h, y_n + h(-K_1 + 2K_2)). \end{cases}$$

Orokorrean errenkada baldintza, $c_i = \sum_{j=1}^s a_{i,j}$, betetzen duen Runge-Kutta metodoak tinkotasun ordena 3rarte izateko baldintza gehigarri hauek bete beharko ditu,

Ordena	Baldintzak
$p \geq 1$	$\sum_{i=1}^s b_i = 1$
$p \geq 2$	$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2}$
$p \geq 3$	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$

Adibidea 4.1.1. (*Kutta-ren metodoaren egonkortasun absolutuko eremua*)

Har dezagun $y' = \lambda y$ test ekuazioa eta aplika diezaiozun aurretik ikusitako Kutta-ren zenbakizko metodoa errorearen hazkuntza adierazten duen $\bar{h} = \lambda$ parametroaren menpeko polinomioa eraikitzeko:

(4.30)

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n, y_n) = \lambda y_n, \\ K_2 &= f(x_n + (1/2)h, y_n + (1/2)hK_1) = \lambda(y_n + (1/2)hK_1) = \lambda(y_n + (1/2)\bar{h}y_n), \\ K_3 &= f(x_n + h, y_n + h(-K_1 + 2K_2)) = \lambda(y_n + h(-K_1 + 2K_2)) = \lambda(y_n + \bar{h}y_n + \bar{h}^2 y_n). \end{aligned}$$

Orain $y_{n+1} = y_n + (h/6)(K_1 + 4K_2 + K_3)$ formulatik y_{n+1}/y_n proportzioa kalkulatzeko,

$$(4.31) \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(\lambda y_n + 4\lambda(y_n + (1/2)\bar{h}y_n) + \lambda(y_n + \bar{h}y_n + \bar{h}^2 y_n)) = y_n \left(1 + \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 + \frac{1}{6}\bar{h}^3\right)$$

Amaitzeko $p(\bar{h}) = 1 + \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{h}^2 + \frac{1}{6}\bar{h}^3$ polinomioa $|p(\bar{h})| < 1$ bornapena beteko du $\bar{h} \in (-2.51, 0)$ eremuan.

Metodo implizitoak aurrera eramateak iterazio bakoitzea ekuazio ezlinealen sistemen askapena derrigortzen du. Horrek zailtasuna gehitzen dio metodoari, baina horren truke metodoaren ordena zein egonkortasun absolutuko eremuak askoz hobeagoak dira metodo explizitoenak baino. Orokorrean 2 urratsetako metodoarekin ordena 4 lor dezakegu, adibidez $y_{n+1} = y_n + (h/2)(K_1 + K_2)$ Gauss-en metodoa, non K_1 eta K_2 hauek diren

$$(4.32) \quad \begin{cases} K_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + h\left(\frac{1}{4}K_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)K_2\right)\right), \\ K_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + h\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)K_1 + \frac{1}{4}K_2\right)\right). \end{cases}$$

4.2 Butcher-en ordena-mugak

Oso gai garrantzitsua da s etapadun Runge-Kutta metodoaren bitartez lor daitekeen ordenik handieneko hurbilketa zehaztea da. Argi dago $s = 1$ etapadun metodo explizituaren ordena $p = 1$ dela eta hainbat eta zenbakizko metodoari etapa gehiago erantsi, orduan eta benetako soluzioaren Taylor-en garapenaren batugai gehiago egokitu daitezkeela. Orduan badirudi etapa kopurua eta metodoaren ordena elkar haziko direla, baina hazkuntza hori nolakoa da? Butcher-en ordena-mugek galdera hori erantzuten dute.

Teorema 4.2.1. (*Ordena maximoko baldintza*)

s etapadun Runge-Kutta metodo explizituaren p tinkotasun ordena beti $p \leq s$ izango da.

Frog:

Demagun $y' = y$, $y(0) = 1$ ekuazio diferentziala $x \in [0, r]$ eremuan eta ondoko h -ren funtziopeko bi adierazpenak:

$$(4.33) \quad \begin{aligned} F(h) &= y(x+h) = y(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x), \\ G(h) &= y(x) + h \sum_{i=1}^s b_i K_i(x, y(x); h). \end{aligned}$$

Funtzio hauen p ordenako deribatuak h -rekin $h = 0$ balioan hauxek dira:

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \frac{d^p F}{dh^p}(0) &= y(x), \\ \frac{d^p G}{dh^p}(0) &= p \sum_{i=1}^s b_i K_i^{(p-1)}(x, y(x); h) \Big|_{h=0}. \end{aligned}$$

Aztertzen ari den ekuazioa $y' = \lambda y$ denez, erraz aplikatu daitezke biderkaduraren deribatuaren formula errekursiboki eta ondoko emaitza ondorioztatuko dugu,

$$(4.35) \quad K_i^{(p-1)} \Big|_{h=0} = (p-1) \sum_{j_1=1}^s a_{i,j_1} K_{j_1}^{(p-2)} \Big|_{h=0} = \dots = (p-1)! \sum_{j_1, \dots, j_{p-1}=1}^s a_{i,j_1} \dots a_{j_{p-2}, j_{p-1}} K_{j_{p-1}} \Big|_{h=0}$$

Beraz,

$$(4.36) \quad \frac{d^p G}{dh^p}(0) = p! \sum_{i, j_1, \dots, j_{p-1}=1}^s b_i a_{i,j_1} \dots a_{j_{p-2}, j_{p-1}} y(x).$$

Orain tinkotasun ordenak derrigortzen duen baldintza $p! \sum_{i, j_1, \dots, j_{p-1}=1}^s b_i a_{i,j_1} \dots a_{j_{p-2}, j_{p-1}} = 1$ da. Metodoak explizitua bada ($a_{ij} = 0$, $j \geq i$) orduan existitu beharko litzateke p zenbaki oso (azpiindizeak) non $i < j_1 < j_2 < \dots < j_{p-1}$ eta $i, j_1, \dots, j_{p-1} < s$ baina hori bakarrik gerta daitezke $p \leq s$ denean.

□

Badaude teorema batzuk “Butcher-en tinkotasun ordena mugak” finkatzen dituztenak, besteak beste $p \geq 5$ denean ez daude $s = p$ etapadun eta p ordenako metodo expliziturik, $p \geq 7$ denean ez daude $s = p + 1$ etapadun eta p ordenako metodo expliziturik eta $p \geq 8$ denean ez daude $s = p$ etapadun eta $p + 2$ ordenako metodo expliziturik.

4.3 Errorearen kalkulua eta urrats-luzera egokitzea

Ekuazio diferentzialaren soluzioaren zenbakizko hurbilketaren mozketaren errore locala x_{n+1} puntuan aurreko $y_j = y(x_j)$ zehatzak direla, $j = 0, \dots, n$, puntuetan, hau da $d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y_n; h)$. Metodoaren ordena p bada, orduan mozketaren errorea $\varphi(x_n, y(x_n))h^{p+1}$ zati nagusiaz eta $O(h^{p+2})$ hondarraz osatuta dago. Hemen ϕ gai nagusia $y' = f(x, y)$ funtzioaren deribatuen eta Runge-Kutta metodo bereziaren koefizienteen menpeko funtzioa da. Demagun y_n datutik h urratsaz kalkulatu-tako y_{n+1} hurbilketa eta y_{n-1} datutik $2h$ urratsaz kalkulatu-tako y_{n+1}^* hurbilketa. Hurbilketa hauei dagozkien errore lokalak $d_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ eta $d_{n+1}^* = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^*$ dira,

$$(4.37) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n; h), \\ y_{n+1}^* = y_n + 2h\phi(x_{n-1}, y_{n-1}; 2h), \end{cases} \implies \begin{cases} d_{n+1} = \varphi(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2}), \\ d_{n+1}^* = \varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1}))(2h)^{p+1} + O(h^{p+2}), \end{cases}$$

φ erregularra bada orduan (x, y_n) puntutik Taylor-en garapena aplika daiteke, $\varphi(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = \varphi(x_n, y(x_n)) + O(h)$, beraz $d_{n+1}^* = \varphi(x_n, y(x_n))(2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$ adieraz daiteke eta

$$(4.38) \quad \begin{aligned} y_{n+1} - y_{n+1}^* &= (2^{p+1} - 1)\varphi(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2}) \implies \\ d_{n+1} &\approx \varphi(x_n, y(x_n))h^{p+1} = \frac{y_{n+1} - y_{n+1}^*}{2^{p+1} - 1} \end{aligned}$$

Baldin soluzio hurbilduaren kalkuluan mozketaren errorearen balioa emandako $\epsilon \ll 1$ baino handiagoa bada, orduan komenigarria da doitasun handiago erabiltzea, hau da, $0 < h_{new} < h$ erabiltzea. Urrats-luzera berriak tolerantzia beheragotzearen baldintza bete beharko du,

$$(4.39) \quad d_{n+1} < \epsilon \implies \varphi(x_n, y(x_n))h_{new}^{p+1} = \frac{y_{n+1} - y_{n+1}^*}{(2^{p+1} - 1)} \frac{h_{new}^{p+1}}{h^{p+1}} < \epsilon \implies 0 < h_{new} < h^{p+1} \sqrt{\frac{\epsilon(2^{p+1} - 1)}{y_{n+1} - y_{n+1}^*}}$$

Kapitulua 5

Urrats anitzetako metodoak

Hastapen balioetako problema edo ekuazio diferentzialaren ohiko problemaren soluzioa hurbiltzeko,

$$(5.1) \quad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(a) = \nu. \end{cases}$$

badago zenbakizko metodoen familia garrantzitsua, *urrats anitzetako metodoak*, hain zuzen. Metodo mota honen dinamika hau da, x_{n+k} diskretizazioaren puntu zehatz batean $y(x_{n+k})$ soluzioari dagokion hurbilketa, $y_{n+k} \approx y(x_{n+k})$, ekuazioaren eskubiko aldeko funtzioa $f(x, y(x))$ eta aurreko puntuetan soluzioaren portaeraren menpean dago, koefiziente berezi batzuetaz osatutako ondoko berdintza bete eginez,

$$(5.2) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}.$$

Formula honetan $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ eta $\alpha_k \neq 0$ betetzen denean, orduan k urrats kopurukoa dela diogu. Orokorrean $\alpha_k = 1$ aukeratu daiteke beste α_j eta β_j guztiak $1/\alpha_k$ parametroarengatik renormalizatuz. Noski, formula hau martxan jartzeko y_0, \dots, y_{k-1} hasierako balioak eman behar dira. Idazkeran $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$ laburketa erabili dugu. Baldin $\beta_k = 0$ bada, orduan metodoa esplizitua izango da azken puntuaren hurbilketa y_{n+k} aurreko puntuetan kalkulaturako datu ezagunen funtziopekoa delako, bestela metodoa implizitua izango da.

Urrats anitzetako metodo esplizituen hurbilketa x_{n+k} puntuan zuzenean kalkula daiteke balio ezagunak ondoko formulaz ordezkatuz $y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}$. Baina metodo implizituen kasuan $f(x, y)$ funtzioa y -rekiko ezlineala den kasu orokorrean, ekuazio ezlinealak askatzeko zenbakizko metodo errepikaria beharko dugu, adibidez puntu finkoarena,

$$(5.3) \quad y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + M.$$

Hemen $M = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}$ gaia y_{n+k} -rekin konstantea den zatia adierazi dugu. Puntu finkoaren iterazioa martxan jartzeko y_{n+k} -ren aurreneko estimazioa behar dugu, $y_{n+k}^{[0]}$, adibidez $h \ll 1$ txikia denean $y_{n+k}^{[0]} = y_{n+k-1}$ ez dirudi hurbilketa txarra, eta gero hurrenez hurren hurbilketa hobetzen joango gara puntu finkoa S aldiz errepikatuz

$$(5.4) \quad y_{n+k}^{[s]} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]}) + M, \quad s = 1, \dots, S.$$

Puntu finkoaren iterazioa konbergentea izateko funtsezko baldintzak bete behar dira, lehenengoan f funtzioa x_{n+k} puntuaren ingurunean y aldagaiarekin Lipschitz izatea L konstantearekin eta gero ondoko bornapenaz mugatutako h urrats txikia aukeratzea,

$$(5.5) \quad h < \frac{1}{\beta_k L}.$$

5.1 Urrats anitzetako metodoen eraikuntza

Oraindik ez dugu adierazi nola aukeratu behar ditugu α_j eta β_j koefizienteak, baina orain ere erroka $d_{n+k} = y(x_{n+k}) - y_{n+k}$ mozketaren errore lokalarik txikiena ondorioztatzea izango da. Erabil dezagun Taylor-en berretura serie garapenak helburua hau lortzeko.

Izan bitez $h = x_{n+j} - x_{n+j-1}$ eta idatz ditzagun $y(x_{n+1})$ eta $y(x_{n-1})$ balioen Taylor-en garapena $y(x_n)$ puntutik:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots \\ y(x_{n-1}) &= y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \dots \end{aligned}$$

Demagun beste balioen menpean bakandu nahi dugun soluzioaren hurbilketa azkeneko $y(x_{n+1})$ dela, orduan bakarrik $y(x_n)$ -ren eta $y(x_{n+1})$ -en adierazpenak erabiliz urrats bateko Euler-en metodoa ondorioztatuko genuke eta $y(x_n)$ -ren eta $y(x_{n+1})$ -ena erabiliz erdigunearen erregela, bi urratsetako metodoa hain zuzen,

$$(5.7) \quad \begin{aligned} 1) \quad y(x_{n+1}) - y(x_n) &= hy'(x_n) + O(h^2) \Rightarrow y_{n+1} - y_n = hf_n + O(h^2), \\ \alpha_0 &= -1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1 \text{ eta } \beta_1 = 0 \text{ izanik,} \end{aligned}$$

$$2) \quad y(x_{n+1}) - y(x_{n-1}) = 2hy'(x_n) + O(h^3) \Rightarrow y_{n+1} - y_{n-1} = 2hf_n + O(h^3),$$

$$n-1 \rightarrow n \text{ hartuz, } \alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 2 \text{ eta } \beta_2 = 0 \text{ izanik.}$$

Lehenengo kasuan metodoaren mozketaren erroreak ordena 1 da eta bigarrenean 2. Adibidez planteatutako bagenu urrats bateko eta ordena handieneko metodoa asmatzea, orduan aurkitzeke

dauden hiru koefizienteen menpako $y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$ egitura aztertuko genuke. Nola $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ hurbildu nahi ditugun eta ondorioz $f_{n+1} \approx y'(x_{n+1})$ izango den, baldin adierazpen horretan balio zehatzak sartuko bagenu, haien Taylor-en garapenak kontutan hartuz $y(x_n) = y_n$ zehatza izanik,

$$(5.8) \quad \begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3) \\ y'(x_{n+1}) &= f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) = y'(x_n) + hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''_n + O(h^3) \end{aligned}$$

Baldin garapenak metodoaren egituran sartzen badugu,

$$(5.9) \quad \begin{aligned} &y(x_{n+1}) + \alpha_0 y(x_n) - h \left[\beta_1 f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + \beta_0 f(x_n, y(x_n)) \right] = \\ &y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3) + \alpha_0 y(x_n) - h \left[\beta_1 (y'(x_n) + hy''_n + \frac{h^2}{2}y'''_n + O(h^3)) + \beta_0 f_n \right] \end{aligned}$$

Orain aurreko adierazpena 0-tik ahal den gertuen egoteko aurkitzeko dauden koefizientek egokituko ditugu,

$$(5.10) \quad \begin{aligned} (1 + \alpha_0)y_n = 0 &\quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = -1, \\ (1 - \beta_1 - \beta_0)y'_n = 0 &\quad \Rightarrow \quad \beta_0 = 1/2, \\ (1/2 - \beta_1)y''_n = 0 &\quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 1/2, \end{aligned}$$

Bakarrik 2 urratsetako metodoak aske uzten dituen hiru koefizienteak hartzen baditugu, ezin da 2 baino errore ordena handiagoko metodoak eraiki $O(h^3)$ mozketara errore lokala saitezina baita. Ondorioztutako koefizienteek esker trapezioaren erregelari dagokion metodoa lortuko dugu,

$$(5.11) \quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n).$$

Puntu gehiago hartuz eta Taylor-en maila handiagoko garapenak erabiliz urrats eta ordena handiko metodoak eraiki daitezke. Baita baliokideki polinomio-nterpolazioa edota zenbakizko integrazio formulak erabiliz urrats anitzeko metodoak eraiki daitezke ere.

5.2 Urrats anitzetako metodoen konbergentzia

Bedi k urratseko metodo lineala eta $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ hastapen baldintzak $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ puntuetan, $x_j = x_0 + jh$. Atal honetako helburua tinkotasun, egonkortasun eta konbergentzi baldintzak zehaztea da metodoaren urratsa h gero eta finagoa denean, $h \rightarrow 0$.

Definizioa 5.2.1 (Konbergentzia). *Demagun $x \in [a, b]$ aldagaia non $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ diren eta $\{y_n\}_{n \geq 0}$ urrats anitzetako metodoak eraikitako segida, non hastapen baldintzak*

$\max_{n=n, \dots, k-1} \lim_{h \rightarrow 0} |y_n - y(x_n)| = 0$ betetzen duten. Orduan metodoa konbergentea dela esango dugu baldin ondoko limitea betetzen den

$$(5.12) \quad \max_{n=k, \dots, N} \lim_{h \rightarrow 0} |e_n| = 0, \quad e_n = y_n - y(x_n).$$

Zenbakizko metodoaren konbergentzia zuzenean bermatzea zaila da, horregatik tinkotasuna, zero-egonkortasun eta egonkortasun absolutuko kontzeptuak definitu behar ditugu. Zailtasunei aurre egiteko eta idazkera errazteko lehenbizian $\mathcal{L}[y(x); h]$ metodoari elkartutako eragilea definituko dugu mozketa errore lokala neurtu ahal izateko,

$$(5.13) \quad \mathcal{L}[y(x); h] = \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x + jh) - h\beta_j y'(x + jh)].$$

Eragile honen Taylor-en garapena $y \in C^q[a, b]$ funtzioarekin zenbait D_j konstanteen menpean dagoen mota honetako adierazpena izango da

$$(5.14) \quad \mathcal{L}[y(x); h] = D_0 y(x) + D_1 h y'(x) + \dots + D_q h^q y^{(q)}(x) + O(h^{q+1}).$$

Taylor-en berretura-serieak garatu besterik ez dugu egin behar D_j konstanteen balioa zehazteko,

$$(5.15) \quad \begin{aligned} D_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k, \\ D_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_k), \\ &\vdots \\ D_q &= \frac{1}{q!} \sum_{j=1}^k j^q \alpha_j - \frac{1}{(q-1)!} \sum_{j=1}^k j^{q-1} \beta_j, \end{aligned}$$

Definizioa 5.2.2 (tinkotasuna Ordena). *Urrats anitzetako metodo linealaren tinkotasun ordena p izango da $D_0 = \dots = D_p = 0 \neq D_{p+1}$ betetzen denean. Bereziki metodoa tinkoa dela esango dugu baldin aurreko baiztapenean $p \geq 1$ baliorako betetzen denean.*

Definizioa 5.2.3 (Mozketa errore lokala). *Urrats anitzetako metodo linealaren mozketa errore lokala x_{n+k} puntuan $T_{n+k} = \mathcal{L}[y(x_n); h]$ adierazpenaz definitzen da $y(x)$ hastapen baldintzetako ekuazio diferentzialaren problemaren soluzio zehatza izanik.*

Metodoaren mozketa errore lokala, aurreko urrats guztietako hurbilketak zehatzak izanik, hurrengo puntuko hurbilketaren errorearen ordenakoa da, $T_{n+k} = (y(x_{n+k}) - y_{n+k})(1 + O(h))$. Noski, $y_{n+j} = y(x_{n+j})$ balioak hartuz ondoko adierazpena idatz dezakegu,

$$(5.16) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y(x_{n+j}) = \mathcal{L}[y(x_n); h] + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_n + jh, y(x_n + jh)).$$

Aldiberean metodoaren hurbilketek (denak zehatzak dira y_{n+k} eta f_{n+k} ezik) hau beteko dute,

$$(5.17) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}).$$

Azken bi adierazpenetatik lehenengoa ken bigarrena kalkulatzen badugu eta batezbesteko balioaren teorema aplikatzen badugu hau lortuko dugu

$$(5.18) \quad y(x_{n+k}) - y_{n+k} = h\beta_k \left. \frac{\partial f(x_{n+k}, y)}{\partial y} \right|_{y=\nu_{n+k}} (y(x_{n+k}) - y_{n+k}) + \mathcal{L}[y(x_n); h],$$

non $\nu_{n+k} \in (y_{n+k}, y(x_{n+k}))$ tartean dagoen. Beraz, metodoaren mozketaren errore lokala eta urrats batean sortutako errorea ordena berekoak direla zuzenean ondorioztatuko dugu,

$$(5.19) \quad T_{n+k} = \mathcal{L}[y(x_n); h] = \left[1 - \frac{\partial f(x_{n+k}, \nu_{n+k})}{\partial y} \right] (y(x_{n+k}) - y_{n+k}) = (y(x_{n+k}) - y_{n+k})(1 + O(h)).$$

Hemendik baita mozketaren errore lokalaren adierazpen erabilgarria ondoriozta daiteke ere,

$$(5.20) \quad y(x_{n+k}) - y_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} + O(h^{p+2}).$$

Urrats anitzetako metodo linealaren egonkortasuna aztertzeke lehenbizian haren polinomio karakteristikoak definituko ditugu.

Definizioa 5.2.4. *Urrats anitzetako metodo linealaren lehenengo eta bigarren polinomioak, $\rho(\xi)$ eta $\sigma(\xi)$ honela definitzen dira,*

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \rho(\xi) &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j, \\ \sigma(\xi) &= \sum_{j=0}^k \beta_j \xi^j \end{aligned}$$

Urrats anitzetako metodo linealaren bi polinomio karakteristikoaren definizioetatik tinkoa izatea ($D_0 = D_1 = 0$) eta $\rho(1) = \rho'(1) - \sigma'(1) = 0$ betetzea belioidea dela erraz ikus daiteke. Gainera tinkotasunarako lehenengo baldintza horrek ρ -ren erro bat $\xi_1 = 1$ izan behar duela ziurtatzen du. Beste erroak ekuazio diferentziala zenbaizko metodoko hurbilketaren menpekoak dira, non ekuazioaren deribatuak diferentzia finituen bidez ordeztu baitira. Metodoaren egitura diferentzia finituetako ekuazioarena da eta horren soluzioa polinomio karakteristikoaren erroen berreturen baturaren moduan adierazten da. Erro horien balioa garrantzitsua da egonkortasuna eta konbergentzia bermatzeko.

Definizioa 5.2.5 (Zero-egonkortasuna). Demagun $x \in [a, b]$ aldagaia non $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ diren eta ondoko bi segidak, $\{u_n\}_{n \geq 0}$ eta $\{v_n\}_{n \geq 0}$ urrats anitzetako metodo berberak eraikitakoak, baina bakoitzean pertubazio ezberdin batek eragiten, hurrenez hurren, $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ eta $\{\gamma_n\}_{n \geq 0}$,

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j u_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, u_{n+j}) &= \delta_n, \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j v_{n+j} - h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, v_{n+j}) &= \gamma_n. \end{aligned}$$

Orduan metodoa zero-egonkorra dela izango da existitzen badira K_1 eta K_2 h -rekiko konstante askeak non ondoko bornapena betetzen den:

$$(5.23) \quad \max_{n=k, \dots, N} |u_n - v_n| < K_1 \max_{n=0, \dots, k-1} |u_n - v_n| + K_2 \max_{n=0, \dots, N-k} |\delta_n - \gamma_n|$$

Ondoko ekuazio arruntaren laguntzaz ikus dezagun zenbakizko metodoak bete behar dituen gutxieneko baldintzak konbergentea izateko,

$$(5.24) \quad \begin{cases} y'(x) = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ekuazio honen soluzioa $y(x) = 0$ da eta urrats anitzetako metodoa aplikatzen badugu, nola $f(x) = 0$ den ondorioz $f_{n+j} = 0$ izango dira beti eta eskubiko terminoa desagertuko da. Beraz, metodoaren egitura $\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = 0$ diferentzia finituetako ekuazio honen soluzioa hau da,

$$(5.25) \quad y_n = h(d_1 \xi_1^n + d_2 \xi_2^n + \dots + d_k \xi_k^n)$$

non ξ_m parametroak lehenengo polinomio karakteristikoaren erroak diren, $\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j = 0$. Soluzio zehatza $x = xn = x_0 + nh$ puntuan $y(x) = 0$ dela esan dugu, beraz $h \rightarrow 0$ edo baliokideki $n \rightarrow \infty$ doanean $\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x) = 0$ izan beharko da metodoa konbergentea izateko. Odorioz $\rho(\xi)$ polinomio karakteristikoaren erroak ondoko ezaugarri hauek bete beharko dute:

$$(5.26) \quad \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} h \xi_m^n = 0 \Leftrightarrow |\xi_m| \leq 1, & \xi_m \text{ erro sinpleak direnean } \forall m, \\ \lim_{h \rightarrow 0} h n^q \xi_m^n = 0 \Leftrightarrow |\xi_m| < 1, & \xi_m \text{ erroa anitza denean } q \text{ ordenakoa.} \end{cases}$$

Teorema 5.2.1 (Zero-egonkortasunaren baldintza baliokidea). *Urrats anitzetako metodo linealaren $\rho(\xi)$ lehenengo polinomio karakteristikoaren erro anitzen modulua $|\xi| < 1$ eta erro sinpleen modulua $|\xi| \leq 1$ izango dira baldin eta soilik baldin metodoa zero-egonkorra bada.*

Teorema 5.2.2 (Baliokidetasun-teorema). *Urrats anitzetako metodo lineala konbergentea da baldin eta soilik baldin tinkoa eta zero-egonkorra bada.*

Dakusagunez ekuazio diferentzialen soluzioak hurbiltzeko zenbakizko metodoak zero-egonkorra eta tinkoak izan behar dute, eta ahal den doitasun handienaz hornituta egotea. Noski, k urratseko metodoak α_j -en eta β_j -en artean $2k+1$ parametro aske eskeintzen ditu ($\alpha_k = 1$ aukeratzen

dugulako) eta pentsa genezake $2k + 1$ parametroak egoki daitezkeela metodoaren tinkotasun ordena $2k$ izateko, baina ordena maximoetako metodo horiek ez dute zero-egonkortasuna beteko teorema batek ziurtatzen duen moduan.

Teorema 5.2.3 (orden handieneko metodoak). *Ez daude $k+1$ (k bakoitia) edo $k+2$ (k bikoitia) baino orden handiagoko urrats anitzetako metodo lineal zero egonkorrak.*

Zero-egonkortasuna bermatzeko $\rho(\xi) = \xi^s(\xi - 1) = \xi^{s+1} - \xi^s$, $s \geq 0$ motako polinomio karakteristikoa daukaten eskemak aurkeztuko ditugu, Adams izenekoak hain zuzen ere. Metodoaren formularen ezker aldean $y_{n+s+1} - y_{n+s}$ egitura dago eta zero-egonkorrak dira $\rho(\xi)$ -ren erroak $\xi = 1$ eta $\xi = 0$ baitira.

Adams metodoen eraikuntza $f(x, y(x))$ funtzioari dagokion polinomio interpolatzailearen diferentzi atzerakorreko, $p(x) = u(r)$, $x = x_{n+1} + rh$, adierazpenean eta haren integral definituan, $y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x) dx = h \int_{-1}^0 u(r) dr$, oinarrituta dago. Nahiz eta integrala bakarrik $r \in [-1, 0]$ tartean burutu, $q(r)$ polinomioa aurreko puntu batzuetako interpolatzailea izan daiteke, adibidez m puntuetako interpolatzailea bada,

$$(5.27) \quad \begin{aligned} u(r) &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_{n+1} \Rightarrow \\ y_{n+1} - y_n &= h \int_{-1}^0 u(r) dr = h \left(1 - \frac{1}{2} \nabla - \frac{1}{12} \nabla^2 - \frac{1}{24} \nabla^3 - \dots \right) f_{n+1} \end{aligned}$$

Adibidez 3 ordenako Adams metodo implizitua idatziko dugu:

$$(5.28) \quad \begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= h \left(1 - \frac{1}{2} \nabla - \frac{1}{12} \nabla^2 \right) f_{n+1} = \\ h &\left(f_{n+1} - \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n) - \frac{1}{12}(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \right) = \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \end{aligned}$$

Azpiindizeari unitate bat gehituz $y_{n+2} - y_{n+1} = h(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)/12$ geratuko da.

Adams metodo mota ezberdin daude, implizitoei Adams-Moulton esaten zaie eta explizitoei Adams-Bashforth. Azken eskema hauek eraikitzeke $u(r)$ polinomioa $\{x_{n-i}, \dots, x_n\}$ puntuetan oinarrituta egongo da. Orain integrala $x \in [x_n, x_{n+1}]$ edo baliokideki $r \in [0, 1]$ tartean, diskretizazioko azken puntua x_n delako eta beronekiko $x_{n+1} = x_n + 1h$. Beraz, eskemaren ezker aldean $y_{n+1} - y_n$ agertuko da eta eskubialdean $\{f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-i}\}$. Beste metodo egonkor sortaa Nyström izenekoak dira, non $\rho(\xi) = \xi^k - \xi^{k-2}$ polinomio karakteristikoko daukaten.

5.3 Egonkortasun absolutua eta erlatiboa

Atal honetan urrats anitzetako metodo linealen erantzuna $y' = \lambda y$ ekuazio linealaren aurrean aztertuko dugu Runge-Kutta metodoen kasuaren moduan. Helburua da metodo bakoitzerako

h urratsa eta λ parametroaren arteko erlazioa finkatzea zenbakizko metodoak eraikitzen duen soluzio hurbilduaren errorearen hazkuntza kontrolpean edukitzeko. Gogora dezagun aritmetika zehatza erabiliz sortuko litzatekeen $\{y_n\}$ zenbakizko soluzio hurbilduaren mozketaren errorea $T_{n+k} = \mathcal{L}[y(x_n); h]$ eta defini dezagun borobilketa erroreak kontutan hartuz ondorioztatzen den $\{\tilde{y}_n\}$ zenbakizko soluzio hurbilduaren mozketaren errorea R_{n+k} ,

$$(5.29) \quad \begin{aligned} T_{n+k} &= \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(x_{n+j}) - h\beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j}))], \\ R_{n+k} &= \sum_{j=0}^k [\alpha_j \tilde{y}_{n+j} - h\beta_j f(x_{n+j}, \tilde{y}_{n+j})]. \end{aligned}$$

Idazkera errazteko $\tilde{e}_{n+j} = y(x_{n+j}) - \tilde{y}_{n+j}$ eta $\phi_{n+k} = T_{n+k} - R_{n+k}$ errorea definituko dugu. Aurreko lehenengo adierazpenetik bigarrena kenduko dugu eta gero batezbesteko balioaren teorema aplikatuz

$$(5.30) \quad \begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j \tilde{e}_{n+j} &= h \sum_{j=0}^k \beta_j [f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) - f(x_{n+j}, \tilde{y}_{n+j})] + \phi_{n+k} = \\ &h \sum_{j=0}^k \beta_j (y(x_{n+j}) - \tilde{y}_{n+j}) \left. \frac{\partial f(x_{n+j}, y)}{\partial y} \right|_{y=\delta_{n+j}} + \phi_{n+k} \Rightarrow \\ &\sum_{j=0}^k \left(\alpha_j - h\beta_j \frac{\partial f(x_{n+j}, \delta_{n+j})}{\partial y} \right) \tilde{e}_{n+j} = \phi_{n+k}. \end{aligned}$$

Emaitz hau $y' = \lambda y$ antzako ekuazioan sartuz eta $\phi_{n+k} = \phi$ konstantea hartuz $\forall k$ diferentzia finituetako ekuazioa lortuko dugu $\{\tilde{e}_{n+j}\}$ segidarako,

$$(5.31) \quad \sum_{j=0}^k (\alpha_j - h\beta_j \lambda) \tilde{e}_{n+j} = \phi \Rightarrow \tilde{e}_n = \sum_{j=0}^k d_j r_j^n - \frac{\phi}{h\lambda \sum_{j=0}^k \beta_j}.$$

Hemen r_j ondoko polinomio karakteristikoaren erroak dira $\bar{h} = h\lambda$ izanik,

$$(5.32) \quad \pi(r, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - h\lambda\beta_j) r^j = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r) = 0.$$

Azken hau zenbakizko metodoaren egonkortasun absolutuko polinomioa da.

Definizioa 5.3.1 (Egonkortasun absolutua). *Baldin urrats anitzetako metodo linealaren egonkortasun absolutuko polinomioaren erroak $\|r\| < 1$ badira \bar{h} baliorako, orduan \bar{h} horrekin metodoa absolutuki egonkorra da. Baldintza hori betetzen duten $\bar{h} \in \mathbb{C}$ balioek egonkortasun absolutuko \mathbb{C} -ko eremua osatzen dute eta eremu horren $\bar{h} = \bar{h}_r + 0i$ balio errealeek egonkortasun absolutuko \mathbb{R} -ko tartea osatzen dute.*

Baldin $\bar{h} > 0$ bada, nahiz eta $\|\bar{h}\| \ll 1$ oso txikia izan, metodo absolutuki ezegonkorra da. Noski $\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \pi(r, \bar{h}) = \rho(r)$ eta tinkotasuna eta zero-egonkortasunagatik $\rho(\xi) = 0$ polinomioaren erroak $\xi_1 = 1$ eta besteak $|\xi_j| < 1, j > 1$ dira. Polinomioaren erroak beronen koefizienteen menpeko funtzio jarraiak dira, beraz $\pi(r, \bar{h})$ -ren erroak r_j izanik, $\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} r_j = \xi_j$ beteko dute. $y' = \lambda y$ ekuazioaren soluzioa $y(x) = e^{\lambda x}$ izanik eta p ordenako metodoa hartuz,

$$(5.33) \quad \sum_{j=0}^k [\alpha_j e^{\lambda x_{n+j}} - h \lambda \beta_j e^{\lambda x_{n+j}}] = e^{\lambda x_n} \sum_{j=0}^k [\alpha_j e^{j\bar{h}} - \bar{h} \beta_j e^{j\bar{h}}] = O(\bar{h}^{p+1}).$$

Azken adierazpen hau $e^{\lambda x_n}$ -gatik zatituz $\pi(e^{\bar{h}}, \bar{h})$ da. Beronen koefiziente nagusiaren eta erroen menpean idazten badugu hau lortuko dugu,

$$(5.34) \quad \pi(r) = (\alpha_k - \bar{h} \beta_k)(r - r_1) \cdots (r - r_k).$$

Aurretik $\pi(e^{\bar{h}}, \bar{h}) = O(\bar{h}^{p+1})$ dela frogatu dugunez, orduan $r = e^{\bar{h}}$ puntuan polinomioaren balioa $\pi(e^{\bar{h}}, \bar{h}) = (e^{\bar{h}} - r_1) \cdots (e^{\bar{h}} - r_k) = O(\bar{h}^{p+1})$. Baina tinkotasunagatik bakarrik $\xi_1 = 1$, beraz $\bar{h} \rightarrow 0$ doanean $r_j \rightarrow \xi_j$ eta $e^{\bar{h}} \rightarrow 1$ doazenez, $(e^{\bar{h}} - r_1) = O(\bar{h}^{p+1})$ da. Ondorioz edozein $\bar{h} > 0$ balioa $r_1 > 1$ eta ezegonkortasuna halabehartuko du.

Definizioa 5.3.2 (Egonkortasun erlatiboa). *Baldin urrats anitzetako metodo linealaren egonkortasun absolutuko polinomioaren erroak $\|r_j\| < \|r_1\|$ badira $\forall j > 1$ eta \bar{h} baliorako, orduan \bar{h} horrekin metodoa erlatiboki egonkorra da. Baldintza hori betetzen duten $\bar{h} \in \mathbb{C}$ balioek egonkortasun erlatiboko \mathbb{C} -ko eremua osatzen dute eta eremu horren $\bar{h} = \bar{h}_r + 0i$ balio errealeek egonkortasun erlatiboko \mathbb{R} -ko tartea osatzen dute.*

Egonkortasun erlatiboko eremua praktikan $\|r_j\| < e^{\bar{h}}, \forall j$ bornapenari eustea derrigortzen duten \bar{h} parametroen eremua da.

5.4 Abiarazle-zuzentzaile metodoak

Urrats anitzetako metodo linealaren helburua urrats bakoitzea y_{n+k} berria kalkulatzeko da, baina metodoa inplizitua denean hau ezin da zuzenean lortu f -ren antzaren arabera y_{n+k} ezezagunaren menpeko ekuazio ezlineala agertuko delako. Orduan funtzio ezlinealen erroak hurbiltzeko zenbakizko metodoaren zenbait errepikapen aplikatu beharko ditugu. Demagun metodo inplizitua orokorraren formulazioa

$$(5.35) \quad y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h \beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}).$$

Berdintza honetatik puntu finkoko eskema ondoriozta dezakegu,

$$(5.36) \quad y_{n+k} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y_{n+j}) = G(y_{n+k}),$$

non y_{n+k} -ren funtziopeko G -ren batugai bakarra $h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k})$ den. Puntu finkoaren konbergentzirako $\|G'(y_{n+k})\| < 1$ baldintza betetzeko, aurretik ikusitako $h < 1/(L|\beta_k|)$ urrats-hautaketa egin behar da (L parametroa f -ren y -rekiko Lipschitz konstatea izanik). Metodo honen prozeduraren hasieran $y_{n+k}^{[0]}$ hartu behar da eta hurrenez hurren y_{n+k} balio zehatzera konbergitzen duten $y_{n+k}^{[s]} = G(y_{n+k}^{[s-1]})$ hurbilketa segida eraikiko dugu. Konbergentzi abiadura arintzeko komenigarria da soluziotik hurbil dagoen $y_{n+k}^{[0]} \approx y_{n+k}$ aurkitzea eta horretarako erabilgarria izango da urrats anitzetako metodo explizitua erabiltzea, hau da, abiarazle metodoa (A). Gero metodo implizitoaren koefizientekin sortutako $y_{n+k}^{[s]} = G(y_{n+k}^{[s-1]})$ puntu finkoko iterazioari zuzentzaile metodoa (Z) esango diogu. Azken hau $\|y_{n+k}^{[s]} - y_{n+k}^{[s-1]}\| < \epsilon$ tolerantzia beharagotu arte edo m iterazio kopuru finko bete arte errepikatuko da. Beraz, lehenbizian $y_{n+k}^{[0]}$ balioztatuko dugu metodo abiarazlearen bitartez eta gero y_{n+k} -ren hurbilketa hobetoagoak diren $y_{n+k}^{[s]}$ -ak eskuratzeko $f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]})$ balioztapenen laguntzaz (B) metodo zuzentzailea m aldiz errepikatuko dugu $y_{n+k}^{[m]}$ lortu arte. Prozesu osoa $A(BZ)^m$ adierazten da.

Demagun $y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f(x_{n+j}, y_{n+j})$ metodo abiarazlearen koefizienteak, orduan $A(BZ)^m B$ prozesua honela balioztatuko da:

$$(5.37) \quad \begin{aligned} 1) \quad & y_{n+k}^{[0]} = -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[m]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[m]}, \\ 2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} a) f_{n+k}^{[s-1]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[s-1]}), \\ b) y_{n+k}^{[s]} = h\beta_k f_{n+k}^{[s-1]} - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[m]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[m]} \end{array} \right\} \quad s = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Demagun p^* ordenako P metodo abiarazlea eta p ordenako Z zuzentzailea, eta hurrenez hurren $C_{p^*+1}^*$ eta C_{p+1} elkartutako errore konstanteak eta $\{y_{n+j}\}$ soluzio zehatzak $j = 0, \dots, k-1$, orduan metodo bakoitzaren mozketaren errorea honelakoa da

$$(5.38) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}^*[y(x); h] &= C_{p^*+1}^* h^{p^*+1} y^{(p^*+1)} + O(h^{p^*+2}), \\ \mathcal{L}[y(x); h] &= C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)} + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Gogora dezagun hurrenez hurren $C_{p^*+1}^* h^{p^*+1} y^{(p^*+1)}$ eta $C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}$ batugaiak $\mathcal{L}^*[y(x); h]$ eta $\mathcal{L}[y(x); h]$ mozketaren erroreen zati nagusiak direla. Metodo abiarazlea explizitua da, beraz bere mozketaren errorea $y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[0]} = \mathcal{L}^*[y(x); h]$, baina metodo zuzentzailearen kasuan ekuazio

ezlineala agertzen da eta honen soluzioa puntu fikoaren metodoa errepikatuz hurbiltzen da. Errepikapen bakoitzean ondorengo hau beteko da

$$(5.39) \quad y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[s]} = h\beta_k \left. \frac{\partial f(x_{n+k}, y)}{\partial y} \right|_{y=y_{n+k}} (y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[s-1]}) + \mathcal{L}[y(x_n); h].$$

Hemen ν_{n+k} balioa $y(x_{n+k})$ eta $y_{n+k}^{[s-1]}$ puntuek mugatzen duten tarteko puntua da. Erraz ikus daiteke mozketa erroreak ordena honetakoa izango dela

$$(5.40) \quad y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[s]} = O(h^s)\mathcal{L}^*[y(x); h] + (1 + \dots + h^{s-1})\mathcal{L}[y(x_n); h] \approx O(h^{s+p^*+1}) + O(h^{p+1}).$$

Izan bitez p^* metodo abiarazlearen ordena eta p metodo zuzentzailearena, haien arteko $p - p^*$ aldearen arabera erabaki beharko dugu zein izango den metodo zuzentzaileari aplikatutako errepikapen kopurua m (puntu finkoa) prozedura eraginkorra izateko.

- $m > p - p^* \implies \mathcal{L}[y(x); h] = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)} + O(h^{p+2})$ mozketa errorea metodo zuzentzailearena da eta emaitza ez da hobetuko $m = p - p^*$ errepikapen kopurutik aurrera. Ez du merezi $p^* > p$ ordenako metodo abiarazleak erabiltzea, hasierako doitasun handiko $y_{n+k}^{[0]}$ balioa lortzeko lana alferrikakoa da, $y_{n+k}^{[s]}$ -ak okerragoak izango baitira.
- $m \leq p - p^* \implies$ mozketa errorea $O(h^{p^*+1+m})$ ordenakoa izango da.

Ekuaizio diferentzialaren integrazioa aurrera doan bitartean, mozketa erroreen zati nagusien laguntzaz, errore horren garapena neur daiteke. Baldin erroreak hazkuntza larria bada, orduan aurrerantzean h urratsa lehenago baino laburragoa aukeratzea erabaki daiteke. Horretarako $p = p^*$ ordena berdineko metodoak erabiliko dira eta $\mathcal{L}^*[y(x); h]$ adierazpenari $\mathcal{L}[y(x); h]$ kenduz “Milneren teknika” izeneko hurbilketa hau lortuko dugu

$$(5.41) \quad (C_{p+1}^* - C_{p+1})h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]} + O(h^{p+2}) \implies \mathcal{L}[y(x); h] = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) \approx \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}) + O(h^{p+2}).$$

Nola $y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[m]} = \mathcal{L}[y(x); h] + O(h^{p+2}) \implies y(x_{n+k}) = y_{n+k}^{[m]} + \mathcal{L}[y(x); h] + O(h^{p+2})$ den, azken emaitza hori $y_{n+k}^{[m]}$ hurbilketa hobetzeko balioko zaigu zuzenketa arruntaren bitartez,

$$(5.42) \quad \hat{y}_{n+k}^{[m]} = y_{n+k}^{[m]} + \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}(y_{n+k}^{[m]} - y_{n+k}^{[0]}).$$

Prozesu antzekoa bete genezake hasierako $y_{n+k}^{[0]}$ hurbilketa hobetzeko. Nahikoa da aurreko adierazpena bider C_{p+1}^*/C_{p+1} -gatik biderkatuz, baina formulatan $y_{n+k}^{[m]}$ balioak parte hartzen du

eta azken hau dagoeneko kalkulatzeko egongo da. Taylor-en garapenaren arabera $y^{(p+1)}(x_n) = y^{(p+1)}(x_{n-1}) + O(h)$ dela kontutan hartuz,

$$(5.43) \quad h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n) = h^{p+1}y^{(p+1)}(x_{n-1}) + O(h^{p+2}) \approx \frac{1}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}(y_{n+k-1}^{[m]} - y_{n+k-1}^{[0]}).$$

Orain bai $y(x_{n+k}) - y_{n+k}^{[0]} = \mathcal{L}^*[y(x); h] \Rightarrow y(x_{n+k}) = y_{n+k}^{[0]} + \mathcal{L}^*[y(x); h]$ erabil dezakegula $y_{n+k}^{[0]}$ -rako zuzenketa eskuratzeko,

$$(5.44) \quad \hat{y}_{n+k}^{[0]} = y_{n+k}^{[0]} + \frac{C_{p+1}^*}{C_{p+1}^* - C_{p+1}}(y_{n+k-1}^{[m]} - y_{n+k-1}^{[0]}).$$

5.4.1 Abiarazle-zuzentzaile metodoen egonkortasun absolutua

Demagun α_j^* , β_j^* eta α_j , β_j hurrenez hurren metodo abiarazlearen eta metodo zuzentzailearen koefizienteak. Orokorrean metodo zuzentzailea zenbait aldiz errepikatuz zenbakizko eskema osoak metodo zuzentzailearen egonkortasun absolutuko ezaugarri berberak izango ditu. Berriaz, metodo zuzentzailearen errepikapen gutxi burutzen direnean metodo abiarazlearen eragina nabaria da. Adibidez azter dezagun egonkortasun absolutuko baldintzak metodo zuzentzailea behin aplikatzen denean ($m = 1$), eskema $A(BZ)B$ gisaz geratuz. Demagun $\tilde{y}_{n+k}^{[0]}$ eta $\tilde{y}_{n+k}^{[1]}$ hurrenez hurren x_{n+k} puntuan metodo abiarazleak eta zuzentzaileak ematen dituzten soluzioaren hurbilketak eta R_{n+k}^* eta R_{n+k} hurbilketa hauei dagozkien borobilketa erroreak. Aldiberean izan bitez T_{n+k}^* eta T_{n+k} metodoaren mozketak errorea:

$$(5.45) \quad \begin{aligned} (a) \quad \tilde{y}_{n+k}^{[0]} &+ \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \tilde{y}_{n+j}^{[1]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f(x_{n+j}, \tilde{y}_{n+j}^{[1]}) &+ R_{n+k}^*, \\ (b) \quad \tilde{y}_{n+k}^{[1]} &+ \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \tilde{y}_{n+j}^{[1]} &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, \tilde{y}_{n+j}^{[1]}) + h\beta_k f(x_{n+k}, \tilde{y}_{n+k}^{[0]}) &+ R_{n+k}, \\ (c) \quad y(x_{n+k}) &+ \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y(x_{n+j}) &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) &+ T_{n+k}^*, \\ (d) \quad y(x_{n+k}) &+ \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y(x_{n+j}) &= h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f(x_{n+j}, y(x_{n+j})) + h\beta_k f(x_{n+k}, y(x_{n+j})) &+ T_{n+k}. \end{aligned}$$

Izan bitez $\tilde{e}_n^{[0]} = y(x_n) - \tilde{y}_n^{[0]}$ eta $\tilde{e}_n^{[1]} = y(x_n) - \tilde{y}_n^{[1]}$ hurrenez hurren metodo abiarazlearen eta zuzentzailearen errore osoak, gure helburua $\tilde{e}_n^{[1]}$ -rako diferentzia finituetako ekuazioa eraikitzea da eta bere soluzioa aztertuz ondorioztatzea ze baldintzapetan errorea bornatuta egongo den $n \rightarrow \infty$ bitartean. Aurreko kapituluaren moduan $y' = \lambda y$ test ekuazioa hartuko dugu, hau da,

$f(x, y) = f(y) = \lambda y$ eskubiko zatia daukan ekuazio diferentziala. Ohi bezela $\bar{h} = \lambda h$ laburketa idatziko dugu. Aurreko ekuazio sortatik (c) – (a) eta (d) – (b) kenketak eginez,

$$(5.46) \quad \begin{aligned} \tilde{e}_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* \tilde{e}_{n+j}^{[1]} &= \bar{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* \tilde{e}_{n+j}^{[1]} + K_1, \\ \sum_{j=0}^k \alpha_j \tilde{e}_{n+j}^{[1]} &= \bar{h} \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \tilde{e}_{n+j}^{[1]} + \bar{h} \beta_k \tilde{e}_{n+k}^{[0]} + K_2, \end{aligned}$$

non K_1 eta K_2 konstanteak diren. Lehenengo ekuazioa $\bar{h}\beta_k$ -gatik biderkatuz eta jarraian bi berdintzetako $\bar{h}\beta_k \tilde{e}_{n+k}^{[0]}$ adierazpenak berdintzen baditugu eta lortutako ekuazioaren bi aldetan $\bar{h}\beta_k \tilde{e}_{n+k}^{[1]}$ gehituz adierazpen laburtu hau geratuko da,

$$(5.47) \quad -\bar{h}\beta_k^* \sum_{j=0}^k (\alpha_j^* - \bar{h}\beta_j^*) \tilde{e}_{n+j}^{[1]} = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h}\beta_j) \tilde{e}_{n+j}^{[1]} + K_3.$$

Hemen ere K_3 konstantea da eta aurkeztu dugun urrats anitzetako metodo linealen deskribapena $\alpha_k^* = \alpha_k = 1$ eta $\beta_k^* = 0$ aukera erabili dugu. $\tilde{e}_{n+j}^{[1]}$ bakoitzaren koefiziente guztiak bilduz $\{\tilde{e}_n^{[1]}\}_{j \geq 0}$ segidak betetzen duen diferentzia finituetako ekuazioa ondorioztatuko dugu non polinomio karakteristikoa ondoko $\pi_{AZ}(r, \bar{h})$ den,

$$(5.48) \quad \pi_{AZ}(r, \bar{h}) = \bar{h}\beta_k (\rho^*(r) - \bar{h}\sigma^*(r)) + \rho(r) - \bar{h}\sigma(r).$$

Polinomio honi egonkortasun absolutuko polinomioa esango diogu eta errore osoak betetzen duen diferentzietako ekuazioaren polinomio karakteristikoa da. Soluzioa $\tilde{e}_{n+j}^{[1]} = \sum_{j=1}^k d_j r_j^n + K_4$ antzakoa da, K_4 konstantea izanik. Azken hau bornatuta egongo da $\pi_{AZ}(r, \bar{h})$ erroak $|r_j| \leq 1$, $j = 1, \dots, k$ izan bitartean. Orokorrean metodo zuzentzailea m aldiz aplikatuz, egonkortasun absolutuko polinomioa hau da

$$(5.49) \quad \pi_{AZ^m}(r, \bar{h}) = M_m(\bar{h}) (\rho^*(r) - \bar{h}\sigma^*(r)) + \rho(r) - \bar{h}\sigma(r), \quad M_m(\bar{h}) = (\bar{h}\beta_k)^m \frac{1 - \bar{h}\beta_k}{1 - (\bar{h}\beta_k)^m}.$$

Argi dago $|\bar{h}\beta_k| < 1$ denean, orduan $\lim_{m \rightarrow \infty} \pi_{AZ^m}(r, \bar{h}) = \pi_Z(r, \bar{h})$ egonkortasun polinomioa metodo zuzentzailearen polinomioa konbergituko duela eta azken metodo honena izango dela eskema osoaren eragin handiena.

5.5 Egonkortasun absolutuko eta erlatiboko eremuen kalkulua

Gogora dezagun egonkortasun absolutuko eta ererlatiboko eremuak hurrenez hurren $\|r_j\| < 1$ eta $\|r_j\| < e^{\bar{h}}$, $\forall j$ bornapenari eustea derrigortzen duten \bar{h} parametroen \mathbb{C} -ko multzoak dira.

Badaude zenbait metodo, batzuk analitikoak eta beste batzuk ordenagailu baten laguntzaz erabiltzeko eremuaren mugaren parametrizazioa ekuazio ezlinealen soluzioen menpean baitaude.

5.5.1 Schur-en metodoa

Baldin $p(r) = c_k r^k + \dots + c_0 \in \mathcal{P}_k$ koefiziente konplexuko polinomioaren erroen moduluak 1 baino txikiagoak badira, $\|r_j\| < 1$, $j = 1, \dots, k$, orduan Schur-ena dela diogu. Demagun $\hat{p}(r) = c_0^* r^k + \dots + c_k^*$, $p(r)$ -ri elkartutako polinomioa non c_j^* koefizientea c_j -ren konjokatu konplexua den, eta $p_1(r) = (\hat{p}(0)p(r) - p(0)\hat{p}(r))/r$, orduan Schur-en teorema batek ondokoa dio: $p(r)$ Schur-ena da baldin eta soilik baldin $\|\hat{p}(0)\| > \|p(0)\|$ eta $p_1(r)$ Schur-ena bada. Egonkortasun absolutuko eremua finkatzeko $\pi(r, \bar{h})$ polinomioa Schur-ena bihurtzen duten \bar{h} parametroak aurkitu behar ditugu, aldiz egonkortasun erlatiboko eremua finkatzeko $r = Re^{\bar{h}}$ ordezkapena egin eta ea $\pi(Re^{\bar{h}}, \bar{h}) = \tilde{\pi}(r, \bar{h})$ Schur-ena den aztertuko dugu R aldagaiarekin.

Adibidea 5.5.1. Azter dezagun $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{1}{2}h(3f_{n+1} - f_n)$ urrats anitzetako metodo lineal explizituaren egonkortasun absolutuko tartea, hau da $\bar{h} \in \mathbb{R}$ dela kontutuan izanik.

Noski egonkortasun absolutuko polinomioa eta hari elkartutakoa hauek dira,

$$(5.50) \quad \begin{aligned} \pi(r, \bar{h}) &= r^2 - \left(1 + \frac{3\bar{h}}{2}\right)r + \frac{\bar{h}}{2}, & \hat{\pi}(r, \bar{h}) &= \frac{\bar{h}}{2}r^2 - \left(1 + \frac{3\bar{h}}{2}\right)r + 1, \\ \pi_1(r, \bar{h}) &= \left(1 - \frac{\bar{h}}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{\bar{h}}{2}\right)r - \left(1 - \frac{3\bar{h}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Ondorioz egonkortasun bi baldintza plazaratuko dira:

$$(5.51) \quad \left| \frac{\bar{h}}{2} \right| < 1, \quad \left| \frac{1 + 3\bar{h}/2}{1 + \bar{h}/2} \right| < 1 \implies \bar{h} \in (0, 1).$$

5.5.2 Routh-Hurwitz-en metodoa

Egonkortasun absolutuko eremua osatzen duten $\bar{h} \in \mathbb{C}$ plano konplexuko parametroek $\pi(r, \bar{h}) = 0$ polinomioaren erroak $\|r\| \leq 1$ betearazten dute. Eremu horren hedadura ezagutzeko plano erreel negatiboa bola unitarioa bihurtzen duen \mathbb{C} -ko ondoko transformazioa aurkeztuko dugu,

$$(5.52) \quad \begin{aligned} \Phi : W &\longrightarrow V, & V &= \{r \in \mathbb{C}, \|r\| \leq 1\}, & W &= \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq 0\}, \\ r = \Phi(z) &= \frac{z+1}{z-1} & \iff & z = \Phi^{-1}(r) = \frac{r+1}{r-1} \end{aligned}$$

Noski $\|r\| < 1$ puntuak $r = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $0 \leq R < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$, adierazpidez idatz daitezke eta beraien irudia Φ -ren bitartez honelakoa da,

$$(5.53) \quad \Phi^{-1}(r) = \frac{R \cos \theta + i R \sin \theta + 1}{R \cos \theta + i R \sin \theta - 1} = \frac{R^2 - 1}{1 + R^2 - 2R \cos \theta} - i \frac{2R \sin \theta}{1 + R^2 - 2R \cos \theta}.$$

Hemen $\Re(r) < 0$ izango da aurreko adierazpenaren zenbakitzailea $R^2 - 1 \leq 0$ eta izendatzailea $0 \leq (1 - R)^2 \leq 1 + R^2 - 2R \cos \theta \leq (1 + R)^2$ direlako.

Transformazio honek $\pi(r, \bar{h}) = 0$ polinomioaren erroek noiz betetzen duten $\|r\| < 1$ aztertu ordez $\tilde{\pi}(z, \bar{h}) = \pi(\Phi(z), \bar{h})$ funtzioaren erroak noiz betetzen duten $\Re(z) < 0$ aztertzea baimentzen du. k ordenako urrats anitzetako metodoari dagokion $\tilde{\pi}(z, \bar{h})$ funtzioa ez da z -ren funtziopeko polinomioa, baina $\hat{\pi}(z, \bar{h}) = \tilde{\pi}(z, \bar{h}) = (z - 1)^k \tilde{\pi}(z, \bar{h}) = a_0 z^k + \dots + a_{k-1} z + a_k$ adierazpena halakoa izango da eta nola azken polinomio hau a_0 -rengatik zatigarria den, $a_0 = 1$ har daiteke, azken honen erroak polinomioaren erroak erroak $\tilde{\pi}(z, \bar{h})$ -renak izanik, $z = 1$ erroa erantsiz. Azter dezagun ze baldintzak bete behar dituzten $\tilde{\pi}(z, \bar{h})$ polinomioaren a_j koefizienteek haien erroen zati erreala $\Re(z) \leq 0$ izateko. Koefizienteak \bar{h} -ren funtziopekoak dira eta haien gaineko baldintzak \bar{h} -ren hautapen eremua mugatuko dute metodoaren egonkortasun absolutua bermatzeko.

Baldin metodoaren urrats kopurua k bada, orduan aurretik definitutako a_j koefizienteak nuluak dira $j > k$ denean. Egoera honetan Hurwitz-en H_k matrizeak hnela definituko da

$$(5.54) \quad H_k = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

Algebra linealeko teorema batek bermatzen du $\tilde{\pi}(z, \bar{h})$ polinomioaren erroen zati erreala negatiboa izango dela baldin H_k matrizearen minore nagusi guztien determinantea $\det H_j > 0$ positiboak badira non

$$(5.55) \quad H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

Baldintza hauen ondorioak $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ edo $k = 4$ kasuetan hauek dira:

$$(5.56) \quad \begin{aligned} k = 1: & \quad a_1 > 0. \\ k = 2: & \quad a_1 > 0, a_2 > 0. \\ k = 3: & \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3, a_1 a_2 a_3 > a_3^2. \\ k = 4: & \quad a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 > a_3, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_4 a_1^2. \end{aligned}$$

Adibidea 5.5.2. Azter dezagun $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{1}{2}h(3f_{n+1} - f_n)$ urrats anitzetako metodo lineal explizituaren egonkortasun absolutuko tartea Routh-Hurwitz-en erizpidearen laguntzaz.

(5.57) *Aurrena* $(z-1)^k \tilde{\pi}(z, \bar{h})$ polinomioa idatziko dugu

$$\begin{aligned} \pi(r, \bar{h}) &= r^2 - \left(1 + \frac{3\bar{h}}{2}\right)r + \frac{\bar{h}}{2} \Rightarrow \\ (z-1)^k \tilde{\pi}(z, \bar{h}) &= (z+1)^2 - \left(1 + \frac{3\bar{h}}{2}\right)(z+1)(z-1) + \frac{\bar{h}}{2}(z-1)^2 = -\bar{h}z^2 + (2-\bar{h})z + 2(1+\bar{h}). \end{aligned}$$

Ondorioz egonkortasun baldintza honela geratuko dira $\bar{h} \in \mathbb{R}$ balio errealetarako:

$$(5.58) \quad \left. \begin{array}{l} -\bar{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h} < 0, \\ 2 - \bar{h} > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h} < 2, \\ \frac{(2-\bar{h})2(1+\bar{h})-0}{(2-\bar{h})} > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{h} > -1, \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{h} \in (-1, 0).$$

5.5.3 Egonkortasun eremuaren mugaren parametrizazioa

Soilik egonkortasun tarte erreala aurkitu beharrean plano konplexuaren gainean dagoen egonkortasun eremua finkatzeko edo behintzat beronen muga parametrizatzeko $\pi(r, \bar{h})$ -ren $\|r\| = 1 \Leftrightarrow r = e^{i\theta}$ motako erroak sortzen duten \bar{h} -ren balioaren bila joango gara. Orduan

$$(5.59) \quad \pi(e^{i\theta}, \bar{h}) = 0 \Leftrightarrow \rho(e^{i\theta}) - \bar{h}\sigma(e^{i\theta}) = 0 \Leftrightarrow \bar{h} = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}.$$

Orain $0 \leq \theta < 2\pi$ balioak eman eta egonkortasun absolutuko eremuaren muga den kurba parametrizatuko dugu.

Beste aldetik egonkortasun erlatiboko eremuaren barnealdea $\|r\| \leq \|e^{\bar{h}}\|$ motako $\pi(r, \bar{h})$ -ren erroak ondorioztatzen dituzten $\bar{h} \in \mathbb{C}$ parametroak dira eta eremu honen muga $\|r\| = \|e^{\bar{h}}\|$ beteko da eta ondorioz

$$(5.60) \quad \pi(\|e^{\bar{h}}\|e^{i\theta}, \bar{h}) = 0 \Leftrightarrow \rho(\|e^{\bar{h}}\|e^{i\theta}) - \bar{h}\sigma(\|e^{\bar{h}}\|e^{i\theta}) = 0.$$

Azken hau $\bar{h} = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ezezagunerako ekuazio ezlineala da eta gehienetan analitikoki askaezina izango da. Beraz, haren zati errealean eta irudikarian zatituko dugu eta soluzio hurbilduak lortzeko ordenagailuan programatutako sistema linealak ebazteko metodoa erabiliko dugu, puntu finkoa edo Newton-ena, besteak beste.

Ariketak

Ariketa 1. Aurkitu ondoko egiturako eta tinkotasun ordena handieneko metodoa,

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} - \alpha_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

Ariketa 2. Frogatu urrats anitzetako metodoaren tinkotasun ordena $p \geq 1$ dela baldin eta soilik baldin $k \neq 0$ konstantea existitzen bada non $\bar{h} \rightarrow^1$ konbergitzen duenean orduan $\rho(\bar{h})$ eta $\sigma(\bar{h})$ polinomio karakteristikoek ondoko erlazioa beteko duten,

$$\rho(\bar{h}) - \sigma(\bar{h}) \log \bar{h} = k(\bar{h} - 1)^{p+1} + O(|\bar{h} - 1|^{p+2})$$

Ariketa 3. Demagun $\rho(\bar{h}) = (\bar{h} - 1)(\bar{h}^2 + 1)$ lehenengo polinomio karakteristikoarekiko urrats anitzetako metodoa. Aurkitu $\sigma(\bar{h})$ bigarren polinomio karakteristikoa tinkotasun ordenik altueneko metodoa lortzeko.

Ariketa 4. Aztertu ondoko bi urratsetako metodoaren tinkotasuna eta konbergentzia (tinkotasuna + zero-egonkortasuna). $\Re(\rho(\bar{e}^{it})/\sigma(\bar{e}^{it}))$ adierazpena aztertuz, ba al da metodoa A-egonkorra? (stiff-sistemetan ikasitako A-egonkortasunaren kontzeptua = zuzen erreal negatiboa egonkortasun erlatiboaren barruan dago)

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}$$

Ariketa 5. Zein da $\rho(\bar{h}) = (\bar{h} - 1)(\bar{h}^2 + 1)$, $\sigma(\bar{h}) = (5\bar{h}^3 + 7\bar{h}^2 + 7\bar{h} + 5)$ polinomio karakteristikodun metodoaren tinkotasun ordena?

Ariketa 6. Zein da $y_{n+3} - (18/11)y_{n+2} + (19/11)y_{n+1} - (2/11)y_n = (6/11)hf_{n+3}$ metodoaren tinkotasun ordena? Ba al da A-egonkorra?

Ariketa 7. Frogatu $\rho(\bar{h})$ eta $\sigma(\bar{h})$ polinomio karakteristikodun metodoak hau betetzen badu, $\Re(\rho(\bar{e}^{it})/\sigma(\bar{e}^{it})) = 0$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, orduan haren egonkortasun erlatiboko eremua hutsa da, $D = \emptyset$ ala $D = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) < 0\}$. Frogatu 2 urratsetako eta ordena ≥ 2 daukan ondoko metodoa A-egonkorra izateko $\beta > 1/2$ bete behar duela,

$$y_{n+2} - y_n = h(\beta f_{n+2} + 2(1 - \beta)f_{n+1} + \beta f_n)$$

Ariketa 8. Frogatu ondoko metodoaren ordena ez dela α parametroaren menpekoa,

$$y_{n+2} - (1 + \alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = (h/2)(1 - \alpha)(f_{n+1} + f_n), \quad -1 < \alpha < 1$$