## Ahoz eta euskeraz irakurtzekotan, nola irakurri behar dira algebrazko formulak? (II)

*Elhuyar*, 8 zk., 1976

Algebrazko kalkulua hizkuntza formalizatu bat da. Bere *elementuak*, letrak eta zenbakiak izaten dira.

Elementu horik, *konektagailuak* deituko ditugun ikur berezi batzuen bidez lotzen dira, *formulak* osatzeko.

Konektagailu bakoitzak eragiketa bat itxuratzen du. Ez ordea beste aldera, eragiketa batzuek ez bait dute ikurrik izaten. Adibidez, berreketa delakoak ikurrik ez du, jakina denez. Biderkaketa ere, kasu askotan, ikurrik gabe erabiltzen da.

Izan ere, konektagailuak guztiz konbentzional eta desberdinak dira, nahiz beren formak gatik, nahiz beren erabili moldeak gatik. Anarkia honen arrazoia historiatik dator, noski, gure lehengo artikuluan esan genuen bezala.

Hona hemen konektagailuen errenkada. Bakoitzerako *itxura*, *izena* eta berak itxuratzen duen *eragiketa*, ematen dira, errenkada honetan bertan

| | | |
|---|---|---|
| + | gehi | batuketa |
| – | ken | kenketa |
| x | bider | biderkaketa |
| . | » | » |
| ——— | zati | zatiketa |
| : | » | » |
| ÷ | » | » |
| $\sqrt{\phantom{x}}$ | erro | erroketa |

Baldin algebrazko formula bat ezkerretatik eskuitara eta goitik behera, ikurrez ikur aztertzen badugu, elementu eta konektagailuen segida bat agertzen da (segida / sucesión).

Adibidez,

$$\frac{\sqrt[a]{5}}{10}$$

formula, prekauzio horiekin aztertzen baldin bada, honeko ikur segida hau arkitzen da:

$$a\ ;\ \sqrt{\phantom{x}}\ ;\ 5\ ;\ \rule{2em}{0.4pt}\ ;\ 10$$

Eta, ikur bakoitzari bere izena emanaz, ikur segida hori irakurtzean, *hitz segida* bat agertzen da, alegia:

*« a ; erro ; bost ; zati ; hamar »*

hitz segida.

Erraz ikusten da segida honen estruktura aldizkakoa dela, alegia, elementuak eta konektagailuak txandaka agertzen direla, lehenengoa eta azkenekoa, hain zuzen ere, elementuak izanik.

Estruktura honen eskema honako hau da beraz:

ELEM KONEK ELEM KONEK ELEM KONEK... KONEK ELEM

Aipatutako hitz segidari *frase* izena emango diogu, formula baten azaldura delako. *Kalkulu idatziak formulak* erabiltzen ditu, *kalkulu mintzatuak fraseak erabiltzen* dituen modura.

Halere, ikur izkutu zenbait dagoelako, esan dugunez, zenbait oharpen egin behar dugu honi buruz.

Nahiz eta ageriko ikurrik ez izan, izen bat ezarri behar diogu berreketaren ikus izkutuari; «*ber*» izena alegia.

Adibidez

$$a^3$$

formula irakurtzean, «*a ber hiru*» irakurriko dugu.

Biderkaketari buruz gauza bera esango dugu, «bider» ikurra askotan izkuturik uzten bait da. Adibidez

$$a + b\,c$$

formula «*a gehi b bider c*» irakurtzea komeni da, batzutan behintzat.

Bigarren graduko erroketan ere, 2 indizea kendu ohi da kasu gehienaetan. $\sqrt{5}$ idazten da, eta $\sqrt[2]{5}$. hala eta guztiz ere, formula horren egiazko irakurtza *«bi erro bost»* dela onartuko dugu.

## Ezkermakoak eta eskumakoak

Aipatu ditugun elementu eta konektagailuez gainera, beste ikur konplementariak ere erabiltzen dira; *makoak* deitzen ditugunak alegia.

Makoak, bi motatakoak izan ohi dira.

« ( » *ezkermako* deitzen duguna eta
« ) » *eskumako* deitzen duguna

Badago zenbait erregela makoak ongi jartzeko; hemen ez ditugu emango, ordea, lan hau gehiegi ez luzatzeko.

Dena den, ezkermako bat formularen hasieran ez baldin badago, edo beste ezkermako baten ondoan ez badago, elementu bat eta konektagailu baten artean izan behar da, KONEK EZKERMAKO ELEM ordenean hain zuzen ere. Eta eskumako bat formularen bukaeran ez baldin badago, edo beste eskumakoaren ondoan ez badago, elementu bat eta konektagailu baten artean izan behar du, nahi eta nahi ez, ELEM ESKUMAKO KONEK ordenean hain zuzen ere.

Adibidez: *«eskermako hiru bider bost ber bi eskermako zati hiru eskumako eskumako»* frasea gaizki eraturik dago, «bi eskermako zati» ordenazioa egokia ez delako.

Ordea, *ezkermako hiru bider bost ber ezkermako bi zati hiru eskumako eskumako»* ongi eratua da, nahiz eta makoak beharrezko ez izan. Haren eskema EZK ELEM KONEK ELEM KONEK EZK ELEM KONEK EZK ELEM KONEK ELEM ESK ESK da.

Ezkermako bakoitzari eskumako bat dagokio, haren eskuialdean dagoena, eta biek *makopare* bat osatzen dutela esaten dugu. Halaber, eskumako bakoitzari ezkermako bat dagokio, eta bien artean makopare pare bat osatzen dute.

EXENPLOZ: Delako *«bi bider ezkermako hiru ken ezkermako bost ken ezkermako sei gehi zazpi eskumako eskumako»* frasea ongi osaturik dago eta, berehala ikusten denez,

$$2 \text{ x } (3 - (5 - (6 + 7)))$$

formulari dagokio.

Makoen eginkizuna, formularen zati bat azpiformula bat dela azaltzea da —azpiformula hitz honen esannahia gerokoan erakusten da— hau da, makopare baten barruan dagoen zatia egiazko formula bat dela berez eta honen lekuan bere balorea jartzen baldin bada, formula berria lehenengoarekin baliokidea dela.

Adibidez, idatzi berri dugun formulean

$$6 + 7$$

batuketaren lekuan, honen balorea jartzen badugu, 13 dena,

$$2 \times (3 - (5 - 13))$$

agertzen den formula berria, lehengoaren baliokidea da.

Hau da, berriz ere diogu, makoen esannahia.

## Azpifraseak, azpifrase egokiak eta azpiformulak

Honeraino esandakoa erraza eta argia badirudi ere, eragozpenak eta anbiguetateak berehala agertzen dira formula batzuk irakurtzean. Guzti hau ongi garbitzeko eta gauzak beren lekuan jartzeko, beharrezkoa dugu orain zenbait definizio eta argipen ematea.

Orain esango duguna izanen da, apika, gure irakurleentzako artikulu honen punturik zailena. Irakurle gehienak, ordea, errigortasuna alde batera utzirik, nahikoa izanen du exenploak ulertzearekin.

Frase batetan, edo hitz segida huts batetan, bi nolanahiko hitz har dezagun, *mugak* bezala. Bi hitz muga hauen artean dauden hitz guztiak, batere utzi gabe eta dauden ordenean bertan, beste hitz segida bat osatzen dute. Hitz segida hau *irekia* ala *itxia* izan daiteke.

Mugak, berak mugatutako hitz segidan bertan sartzen direla onartzen denean, hitz segida *itxia* dela esaten da. Bestela, mugak ez ba dira hitz segidan sartzen alegia, hau *irekia* dela esaten da.

Adibidez,

*«a ber bost gehi hiru erro pe zati hiru erro e»*

frasean «bost» eta «zati» hitzak mugatzat hartzen ba ditugu,

*«gehi hiru erro pe»*

izanen da berak mugatutako hitz segida, *irekia* izatekotan, eta

*«bost gehi hiru erro pe zati»*

hitz segida *itxia izanez gero.*

Oharraraz dezagun ordea, hitz segida horik ez direla fraseak, ez bata ez bestea, beraiek ez bai dagozkio inolako formulari.

Ordea, «hiru» eta «pe» hitzak hartzen baditugu mugatzat,

*«hiru erro pe»*

hitz segida erdesten da egiazko frase bat dena, bera

$$\sqrt[3]{p}$$

formulari dagokionez gero. Hori dela eta, aipatutako hitz segida, frase osoaren azpifrase bat dela esango dugu, honako erregela honen arabera: *frase jakin batean, bi hitzek mugatutako hitz-segida, edozein formulari dagokionean, hitz segida horri «azpifrase» izena ematen diogu.*

Bi kasu desberdin ager daiteke azpifrasetan.

Har dezagun, esate baterako,

$$\frac{6 + 4}{2}$$

F delako formula guztiz erraza. Formula honi dagokion S frasea honako hau da:

*«sei gehi lau zati bi»*

Frase honetan

*«lau zati bi»*

azpifrase bat da,

$$\frac{4}{2}$$

formulari dagokionez gero. Formula honen balorea 2 da; alegia «bi».

Ordezka ditzagun beraz «lau zati bi» hitzak, «bi» hitzaz. S frasearen lekuan

*«sei gehi bi»*

$S_1$ frase berria izango dugu,

$$6 + 2$$

$F_1$ formulari dagokiona.

Baina $F_1$ formularen balorea, 8 da. Berehala ikusten da beraz kalkulua gaizki egina dela. Ondorea hau da: *egin dugun ordezkatzea ez da zilegi.*

Beste gauza bat gertatzen da

*«sei gehi lau»*

S frasearen azpifraseari begiratzen badiogu. Kasu honetan zilegi da azpifrase hori «hamar» hitzaz ordezkatzea, eta

*«hamar zati bi»*

$S_1$ frase berria onartzea. Gauza bera esaten dugu F formulari buruz. Zilegi da

$$\frac{6 + 4}{2}$$

F formulan

$$6 + 4$$

f zatia, hona 10 baloreaz ordezkatzea. $F_1$ formula berria

$$\frac{10}{2}$$

izango da.

Gertaera hau azaltzeko *«azpifrase egoki»* kontzeptua sartzen dugu. Delako *«lau zati bi»,* S frasearen azpifrase egoki bat ez dela esaten dugu, ordezkatzea zilegi ez delako. Ordea, *«sei gehi bi»* delako frasea, S frasearen azpifrase egoki bat dela esaten dugu, ordezkatzea zilegi denez gere.

DEFINIZIOA. Baldin $F$ formularen $S$ frasean $s$ azpifrase bat bada, eta $s$ azpifraseari dagokion formula $f$ bada, $f_1$ deituko diogu $f$ formularen baloreari; $s_1$ deituko diogu $f_1$ balorearen izenari; $S_1$ deituko diogu $S$ frasean $s$ azpifrasea $s_1$ izenaz ordezkatzearen ondoreari eta $F_1$ deituko diogu $S_1$ fraseari dagokion formulari. Guzti hau honela izanik, $F$ eta $F_1$ formulak baliokideak baldin badira, $s$ delakoa $S$ frasearen azpifrase egoki bat dela esaten dugu eta $f$ delakoa, $F$ formularen azpiformula bat dela esaten dugu.

EXENPLUZ:

$$\frac{3 + \sqrt{3^2 + 4^2}}{2}$$

| | | |
|---|---|---|
| «hiru gehi bi erro hiru ber bi gehi lau ber bi zati bi» | S | (F-ren frasea) |
| «hiru ber bi gehi lau ber bi» | s | (S-ren azpifrasea) |
| $3^2 + 4^2$ | f | (s-ri dagokion formula) |
| 25 | $f_1$ | (f-ren balorea) |
| «hogeitabost» | $s_1$ | ($f_1$-ren izena) |
| «hiru gehi bi erro hogeitabost zati bi» | $S_1$ | (ordezkatzearen ondorea) |
| $\frac{3 + \sqrt{25}}{2}$ | $F_1$ | ($S_1$-ri dagokion formula) |

*F* eta $F_1$ formulak baliokideak direlako, *s* delakoa *S* frasearen azpifrase egoki bat dela esan daiteke, eta *f* delakoa *F formularen azpiformula* bat dela esan daiteke ere.

## Irakurtzearen anbiguetatea

Formula bat ikurrez ikur irakurri behar dela esan dugu. Erregela honen bidez nolanahiko *F* formula *S* frase bakar bati dagokio dudarik gabe.

Baina beste aldera ez da gauza bera gertatzen, zeren formula desberdin eta ez-baliokideei irakurtze berdina bait dagokieke.

Har dezagun, adibidez, lau formula hau

$F_{I}$ $\quad a + \frac{b}{c} + d$

$F_{II}$ $\quad \frac{a + b}{c} + d$

$F_{III}$ $\quad a + \frac{b}{c + d}$

$F_{IV}$ $$\frac{a+b}{c+d}$$

Irakurketa ikurrez ikur egitekotan, frase bakar batera eramaten dute lau formula horiek, alegia,

*«a gehi be zati ze gehi de»*

frasera.

Hemen agertzen da anbiguetatea. Formula batetik frase batera pasatzea posible bada ere, frasetik formulara bihurtzerik ez dugu kaso askotan.

Berehala saiatuko gara nahasmen hau garbitzen.

## Hitz disoziatzaileak

Direlako «gehi» eta «ken» hitzak, *disoziatzaileak* direla esaten dugu. Frase batean holako hitz batzu agertzen bada, *paremakoen barruan daudenak kendu eta*, hitz disoziatzaileen segida bat osatzen dugu. Adibidez:

*«hiru ber bi GEHI ezkermako bi gehi hiru eskumako ber hiru KEN hiru zati bi GEHI bi erro bost»*

SOILIK HITZ MARKATUAK, hartzen baldin baditugu, «gehi» ez-markatua alde batera utziz, paremakoen artean dagoelako, honako segida hau osatzen da

«GEHI KEN GEHI»

Egin ere, holako kasuetan *antolapen* hau egiten da beti: *hitz disoziatzaileek mugatutako hitz segidak, azpifrase egokitzat hartzen dira beti, besterik esaten ez bada.*

Adibidez, lehengo frasean,

*«hiru ber bi»*
*«ezkermako bi gehi hiru eskumako ber hiru»*
*«hiru zati bi»*
*«bi erro bost»*

azpifraseak, azpifrase egokiak direla esaten dugu aipatutako antolapenaren arabera. Eta hortik

$3^2$

$(2 + 3)^3$

$\frac{3}{2}$

$\sqrt[2]{3}$

azpiformulak dira. Beraz, lehengo frasearen interpretazioaz ez da batere anbiguetaterik gelditzen, eta frase horri dagokion formula honako hau da

$$3^2 + (2 + 3)^3 - \frac{3}{2} + \sqrt[2]{3}$$

Orain lehengo parrafoan emandako exenplua, alegia $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ formulen exenplua, berriz ere aztertzen badugu, batere anbiguetaterik ez dagoela ikusten dugu egindako antolapenari esker. Izan ere

*«a gehi be zati ze gehi de»*

frasea, hiru azpifrase egokitan zatitzen da, eta, batere zalantzarik gabe, $F_I$ formulari dagokio. Beste problema bat agertzen zaigu beraz alegia $F_{II}$, $F_{III}$ eta $F_{IV}$ formulak nola irakurri behar diren jakiteko problema. Gerokoan emango diogu erantzuna.

Direlako «bider» eta «zati» hitzak ere disoziatzaileak dira, baina baldintza batekin, alegia, interpretatu behar den frasean «gehi» eta «ken» hitzak ez agertzea (makoen artean izan ezik). Antolapen hau egiten dugu beraz: *formula batetan; baldin «gehi» eta «ken» hitzak agertzen ez badira, makoen artean izan ezik, «bider» eta «zati» hitzak hitz disoziatzaileak dira; eta berak mugatutako azpifraseak azpifrase egokitzat hartzen dira, lehengoan «gehi» eta «ken» hitzei buruz esan ditugun kondizio berdinetan.*

EXENPLUZ

Delako *«b zati ze erro a ber pe bider te»* frasea interpretatzen saiatzen garenean, hiru azpifrase egokitan zatitzen zaigu bera alegia,

*«be»*
*«ze erro a ber pe»*
*«te»*

goiko horik azpifrase egokiak direlarik.

Beraz frase horren interpretazio zuzena honako hau da, batere anbiguetaterik gabe

$$\frac{b}{\sqrt[c]{a^p}}\ x^t$$

Beste interpretazioak $\sqrt[b/c]{a^{pxt}}$ eta abar bezalakoak, ez dira zuzenak, «bider» eta «zati» hitzak disoziatzaileak direlako. Baina problema berri bat dugu orain, lehengoan esan dugun bezala, beste interpretazioak nola irakurri behar diren jakiteko.

## Ahozko makoak

Kalkuluaren ikurrak epoka diferentetan sarturik izan dira matematika sailean, eta asmatzaile anitz izan da hortaz. Ez da beraz estraina izanen ikur horien artean desberdin asko ager dadin. Kalkulu idatziaren anarkia galanta!

Adibidez, berehala ikusten da horietako ikur batzuek makoen eginkizuna egiten dutela eta beste batzuek, berriz, holako abantailarik ez dutela.

Delako «$\sqrt{\ }$» erroketaren ikurrak makopare baten eginkizuna egiten du. Biderkaketaren ikurrak, «X»ek, ez du holako eginkizuni egiten, eta horregatik batzutan makoen erabiltzea eskatzen du.

Adibidez, batetik:

$$\sqrt[a]{b + c}$$

idazten da makorik gabe, eta bestetik ordea

$$a \text{ x } (b + c)$$

idatzi behar, makopare batekin.

Halaber, zatiketaren « ——— » ikurrak makopare eginkizuna egiten du, baina « : » zatiketaren ikurrak ez du horretarako balio.

Adibidez

$$\frac{a + b}{c + d}$$

makorik gabe idazten da baina

$$(a + b) : (c + d)$$

bi makoparez idatzi behar.

Irakurtzean ordea, alegia kalkulu idatzitik kalkulu mintzatura bihurtzen denean, esan dugun *ikur batzuren abantaila hori galdu egiten da;* hau da, hain zuzen ere, anbiguetate askoren kausa.

Adibidez, baldin

$$\sqrt[p]{a + b}$$

formula ahoz irakurtzen badugu *«pe erro a gehi be»* frasea agertzen da. Baina frase honen interpretazio zuzena $\sqrt{a + b}$

formula da, «gehi» hitza, disoziatzailea delako.

Gauza bera gertatzen da

$$\frac{p}{a + b}$$

formularekin, *«pe zati a gehi be»* frasearen bidez irakurtzen da; ba frase horren egiazko esannahia

$$\frac{p}{a} + b$$

formula da, eman ditugun erregelen arabera.

Anbiguetatea, erdaraz ere agertzen da, jakina, baina pratikan, ingurumari, pausu eta abots doinuaren aldaketen bidez kendu ohi da.

Asmakeria eta artikulu guzti horik ez zaizkigu zientifikoak iduritzen inolaz ere, eta euskaraz beste moduz jokatu behar dugula uste dugu esandakoa baino garbiagoa izan dadin.

Beraz, eragozpen hau gainditzeko, *ahozko makoak* edo erabiltzea proposatzen dugu.

«Ahozko mako» direlakoak *«has»* eta *«buka»* hitzak izango dira gure jokabidean.

*Formula bat ahoz irakurtzean, «has» eta «buka» hitzen arteka artean dagoen hitz segida azpifrase egoki bat dela onartuko dugu, makotarako erregela berdinak errespetatuz gero.*

Ikus dezagun, adibidez, erregela honen arabera nola irakurri behar diren lehengo $F_{II}$, $F_{III}$ eta $F_{IV}$ formulak.

$F_{II}$ delako

$$\frac{a+b}{c}+d$$

formula, «*has a gehi be buka zati ze gehi de*» frasearen bidez irakurriko dugu. Erdaraz ere zenbait ingurumari egin behar da irakurtze honetan anbiguetatea kentzeko. Delako «*a más b partido por c más d*» esatea ez da nahiko, eta «*la suma a más b partida por c y todo ello más d*» edo holako zerbait irakurri behar da. Geuk proposatzen dugun irakurtzea hori baino hamaika bider garbiago da, noski.

Halaber, $F_{III}$ delako

$$a+\frac{b}{c+d}$$

formula «*a gehi b zati has ze gehi de buka*» fraseaz irakurriko da, batere anbiguetaterik gabe.

Azkenean,

$$\frac{a+b}{c+d}$$

$F_{IV}$ formulari dagokion frasea, «*has a gehi be buka zati has ze gehi de buka*» frasea izanen da.

Halaber, lehengoan aipatu dugun

$$\frac{b}{\sqrt[c]{a^p}}\ x\ t$$

formula berriz ere aztertzen badugu, formula batzu agertzen dira eta formula bakoitzak bere frase egokia du, batere anbiguetaterik gabe. Adibidez

$$\frac{b}{\sqrt[c]{a^p}}\ x\ t$$

$G_I$ formula,

«*b zati ze erro a ber pe bider te*» irakurtzen da.

$$\sqrt[b/c]{a^p\ x\ t}$$

$G_{II}$ formula

*«has be zati ze buka erro has a ber pe buka bider te»* irakurtzen da.

$$\frac{b}{\sqrt[c]{a^p}\ \mathrm{x}\ t}$$

$G_{III}$ formula

*«be zati has ze erro a ber pe bider te»* irakurtzen da.

$$\frac{b}{\sqrt[c]{a^p\ \mathrm{x}\ t}}$$

$G_{IV}$ formula

*«be zati ze erro has a ber pe bider te buka»* irakurtzen da.

Etabar, zeren eragiketa beroriekin beste konbinaketa batzuk ere egin bait daitezke.

Beste aldera, baldin *«has be zati ze buka erro a ber has pe bider te buka»* frasea ematen bazaigu, berehala aurkitzen da berari dagokion formula. Azpifrase egokiak honako hauk dira, besteak beste.

*«be zati ze», zeren «has» eta «buka»* hitzen artean dagoelako.

*«pe bider te»*, arrazoi berdinagatik.

Beraz, esandako formula honako hau da

$$\sqrt[b/c]{a^p\ \mathrm{x}\ t}$$

## Ariketa erraz batzu

Formularik korapilotsuenetan sarturik gabe, hona hemen pratikan interes handia duten exenplu batzuk.

| Formulak | Fraseak |
|---|---|
| $\frac{a/b}{c}$ | *«has a zati be buka zati ze»* |
| $\frac{a}{b/c}$ | *«has zati has be zati ze buka»* |
| $\frac{a/b}{c/d}$ | *«has a zati be buka zati has ze zati de buka»* |

| | |
|---|---|
| $a^b + c$ | *«a ber be gehi ze»* |
| $a^{b+c}$ | *«a ber has b gehi ze buka»* |
| $a^b \times c$ | *«a ber be bider ze»* |
| $a^{b \times c}$ | *«a ber has b bider ze buka»* |
| $\sqrt[a]{b} \times c$ | *«a erro be bider ze»* |
| $\sqrt[a]{b \times c}$ | *«a erro has be bider ze buka»* |
| $\sqrt[a]{b + c}$ | *«a erro has b gehi ze buka»* |
| $\sqrt[a]{b} + c$ | *«a erro be gehi ze»* |

Has eta buka dezagun geuk ere.