Poliedros proyectivos elementales

Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián, 1934

Para establecer la definición de polígono proyectivo, y también, claro está, la del polígono ordinario o métrico, puede seguirse el camino indicado por el Sr. Rey Pastor en sus «Fundamentos de la Geometría proyectiva superior» que consiste en la consideración de las quebradas simples (que no se cortan a sí mismas) cerradas y de especie par (es decir que son cortadas por cualquier recta que no pasa por ninguno de sus vértices en un número par de puntos). Estas quebradas (entre las que se incluyen las quebradas métricas u ordinarias cerradas, pues a éstas no las corta la recta impropia) tienen la propiedad de dividir al plano en dos regiones: a cualquiera de ellas denomina el citado Profesor *polígono proyectivo*. Esta idéntica denominación para las dos regiones no está justificada, pues cabe diferenciarlas proyectivamente: una de ellas, la que calificaríamos de interior, no puede contener quebrada alguna de especie impar; la otra exterior, sí. Pero, prescindiendo de esta observación, notaremos que la definición de polígono proyectivo exige la demostración de difíciles proposiciones, entre ellas la misma división del plano que requiere razonamientos profusos. Por otra parte, la generalización del concepto de polígono a espacios superiores necesita por esta vía, la definición previa de la superficie poliédrica cerrada de especie par, que ofrece aún mayores dificultades. Para evitar estos inconvenientes, sería propio utilizar el concepto más restringido de *poliedro elemental*, que vamos a establecer y el cual sustituye fácilmente al general en algunas de las cuestiones de aplicación de éste, como la teoría de los conjuntos proyectivos que el mismo Rey Pastor en la citada obra deja iniciada.

1. Dos puntos A y B dividen a la recta por ellos determinada en dos *segmentos proyectivos* $\overline{A\ B}$ y $\overline{\overline{A\ B}}$. si E es un punto de $\overline{\overline{A\ B}}$, designaremos el segmento $\overline{A\ B}$ por la notación $\overline{A\ B}$ (E) en la que E figura como *punto de exclusión*, es decir, no contenido en el segmento. Los segmentos proyectivos pueden ser *incompletos* o *completos* según que de ellos se excluyan o no los extremos A y B. Salvo cuando explícitamente se haga constar la condición de incompletos, se supondrá que nos referimos a segmentos completos. La notación anterior puede fácilmente generalizarse, pues en el caso de que *e* fuera una recta, plano o espacio

lineal sin punto alguno del segmento, designaríamos también a éste con la notación $\overline{\mathrm{A\,B}}$ (e) siendo *e*, recta, plano o espacio *de exclusión*.

2. Sea en un plano una recta *e* y un segmento a$\equiv$ $\overline{\mathrm{C\,B}}$(e).

Designemos por A un punto no contenido en $\overline{\mathrm{B\,C}}$ (e) ni en *e*. Llamaremos *triángulo proyectivo* A a (e) *al conjunto de los puntos pertenecientes a los infinitos segmentos proyectivos* $\overline{A\,P}$ *(e) estando P en* a. La recta *e* se denomina *recta de exclusión* del triángulo, los puntos A, B y C se llaman *vértices* del mismo, y los segmentos $\overline{\mathrm{A\,B}}$ (e) $\overline{\mathrm{B\,C}}$ (e) y $\overline{\mathrm{A\,C}}$ (e) *lados*. Para justificar estas definiciones demostraremos algunas propiedades inmediatas.

a) *El triángulo está unívocamente definido por los datos A, a y e*. Puesto que a cualquier punto P de *a* le corresponde un segmento y sólo uno $\overline{\mathrm{A\,P}}$ (e).

b) *Los triángulos A a (e) y B b (e) —donde b representa el lado* $\overline{A\,C}$ *(e)— son idénticos.*

En efecto; sean a_0 b_0 c_0 los puntos en que las rectas BC, AC y AB cortan la recta *e*. Sea P un punto de triángulo ABC (e) y α', β' y γ' los puntos en que la recta *e* corta a las PA, PB, PC. Sean asimismo α, β, γ los puntos de intersección de estas rectas con las BC, CA y BA respectivamente.

Sabemos, por hipótesis, que P y α' separan a A y α, lo que proyectado desde C sobre *e*, equivale a decir que γ' y α' separan a b_0 y a_0. Además, puesto que a_0 y α separan a B y C por hipótesis, proyectando desde A la cuaterna $\mathrm{a}_0\,\alpha\mathrm{BC}$, resulta que α_0 y α' deben separar a b_0 y c_0, y por tanto que b_0 y α_0 no separan a c_0 y α'.

Resumiendo las líneas anteriores, se sabe pues, que

a_0 y b_0 separan a α' y γ'
a_0 y b_0 no separan a α' y c_0

Luego

a_0 y b_0 deben separar a c_0 y γ' (I)

En segundo lugar, de la afirmación (I), y puesto que a_0 y α' separan a γ' y β' (proyectando a_0 α' BC desde P), se deduce la

β' y γ' separan a a_0 y c_0 (II)

Las condiciones (I) y (II) proyectadas a su vez desde C y A respectivamente, sobre AB y CP prueban finalmente que

A y B separan a γ y c_0
P y γ' separan a C y γ

condiciones ambas que permiten afirmar la pertenencia de P al triángulo c, C, (e). Análogamente respecto de b, B, (e).

c) *La recta que une un vértice con un punto interior del triángulo corta al lado opuesto*, lo cual se desprende inmediatamente de la misma demostración de b).

d) *Un triángulo queda definido por sus vértices y la recta de exclusión*, puesto que se conocen los lados del mismo y puede aplicarse la definición establecida.

3. *a) Una recta que corta a dos lados de un triángulo proyectivo sin pasar por el vértice común a ambos, no tiene punto alguno común con el tercer lado.*

Sea ABC (e) el poliedro considerado y *p* la recta que corta en los puntos $1'$ y $2'$ a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ y en el punto $3'$ a la recta AB. Sean 1, 2 y 3 los puntos de intersección de BC, AC y AB con e. Proyectando sobre AB y desde el punto H, común a *p* y e las cuaternas $(1\,1'BC)$ $(2\,2'AC)$ resulta que el par $3\,3'$ separa la BC' y también al AC'. Luego, según propiedades conocidas de la serie rectilínea, A y B no separarán a 3 y $3'$ c.q.d.

Del mismo modo se prueba que

b) Una recta que no corta a dos lados de un triángulo proyectivo tampoco corta el tercero.

c) Una recta que corta a un lado de un triángulo proyectivo sin pasar por sus vértices extremos, corta necesariamente a otro lado.

d) Si una recta contiene un punto del contorno o interior de un triángulo proyectivo P_2, dicha recta corta por lo menos a dos lados del triángulo.

En el primer caso la propiedad está ya demostrada. Para probarla en el segundo designemos por P al punto interior de ABC (e) y sea M el punto de intersección de AP con $\overline{BC}$. La recta considerada corta a un lado del triángulo AMC (e) luego deberá cortar por lo menos a otro; sea al $\overline{MC}$ o al $\overline{AC}$. De esta proposición se concluye fácilmente la

e) Tres puntos A, B, C, no alienados, son vértices de cuatro triángulos proyectivos diferentes.

En efecto la recta de exclusión puede ocupar cuatro posiciones diferentes respecto de dichos puntos.

4. El concepto de triángulo proyectivo puede generalizarse a espacios de más de dos dimensiones con la denominación de *poliedro elemental*. Para ello puede seguirse un proceso idéntico al que nos ha servido para pasar del segmento al triángulo proyectivo. A este lo denominaremos *poliedro elemental de dos*

dimensiones y abreviadamente por P_2. Para generalizar por inducción, supondremos establecido ya el concepto de poliedro en el espacio de *u* dimensiones.

Sea

$$P_n = [A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ A_{n+1}]$$

un poliedro elemental de *n* dimensiones; A_{n+2} un punto arbitrario, exterior al hiperplano $(A_1, A_2, A_3 \ldots\ A_{n+1})$, y *e* un hiperplano que no contenga ningún punto de P_n. Llamaremos *poliedro elemental de n+1 dimensiones* al conjunto de los puntos pertenecientes a los infinitos segmentos proyectivos que se pueden definir con las condiciones de no cortar a e y tener un extremo en A_{n+2} y el otro en P_n.

Los puntos $A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots\ A_{n+2}$ se denominan *vértices* del poliedro P_{n+1}.

En particular los poliedros definidos por A_{n+2} con las caras (o lados si n = 2) de P_n, se llaman *caras* de P_{n+1}, así como también el mismo poliedro P_n. Cualquier cara contiene a todos los vértices menos uno. En consecuencia, las caras se designan por $a_1, a_2, a_3, \ldots\ a_{n+2}$ (a_1 no contiene a A_1; a_2 no contiene a A_2; .... $a_{n+2} \equiv P_n$ no contiene a A_{n+2}).

Frecuentemente se dice que la cara a_h se opone al vértice A_h y viceversa.

Para designar las caras de las caras o *caras secundarias* del poliedro, emplearemos la notación a_{hk}; el primer subíndice señala que a_{hk} está en a_h, y el segundo que no contiene a A_k. De otro modo podrá, pues, definirse a a_{hk} diciendo que es un poliedro que tiene por vértices los mismos de P_{n+2}, excepto A_h y A_k, y por hiperplano de exclusión el mismo *e* (o mejor dicho, la intersección de su espacio con *e*). De esta suerte, es inmediato que $a_{hk} \equiv a_{kh}$.

En general, llamaremos *caras p-arias* a los poliedros definidos por n − p vértices del P_{n+2} y que no cortan a *e*. Si designamos por una notación análoga $a_{ijhfg\ldots m}$ es evidente la propiedad conmutativa.

Los puntos pertenecientes a las caras de un poliedro elemental constituyen lo que se llama el *contorno* del poliedro. Un poliedro privado de su contorno se denomina *incompleto*; con su contorno, *completo*.

Propiedades de los poliedros elementales

Nos referimos a un P_{n+1}, determinado de la misma manera que en el párrafo anterior, y también de n+1 dimensiones.

a) *Los elementos* A_h, a_h, e, *definen un poliedro y sólo uno*; pues a cada punto M de a_h, le corresponde un segmento, y sólo uno, que cumpla la condición de no cortar a *e*.

b) *Los poliedros elementales definidos por*

$$(A_{n+2}\ a_{n+2}\ e) \text{ y } (A_i\ a_i\ e)$$

son idénticos, es decir, se hallan formados por unos mismos puntos.

En efecto, si M pertenece al poliedro $(A_{n+2}\ a_{n+2}\ e)$, el plano A_{n+z} Ai M corta necesariamente a la cara secundaria $a_{n+2,\,i}$ en un punto H (ya que A_{n+2} M corta a a_{n+2} en un punto J y, en el poliedro a_{n+2}, A_iJ debe cortar a la cara opuesta, que es precisamente $a_{n+2,i}$ en otro punto H). El punto M pertenece, pues, a un poliedro elemental de dos dimensiones A_{n+2} A_i H. Según las propiedades demostradas en los P_2, A_i M cortará a A_{n+2} H y el punto de intersección V y el A_i estarán separados por M y *e*, con lo cual M pertenece al poliedro $(A_i\ a_i\ e)$. Análogamente podría probarse el recíproco, es decir que todo punto de $(A_i\ a_i\ e)$ pertenece a $(A_{n+z}\ a_{n+z}\ e)$.

Con esto queda probado al mismo tiempo que

c) un poliedro queda definido por cualquier vértice y la cara opuesta y el hiperplano de exclusión. O también por sus vértices y el hiperplano de exclusión.

d) La recta que une un vértice de un poliedro con un punto del mismo corta necesariamente la cara opuesta.

Posiciones de una recta con respecto a un poliedro

e) Una recta que corte a dos caras de un poliedro elemental no corta a ninguna de las restantes caras.

Esta propiedad es una generalización de la correspondiente de los poliedros elementales planos. Vamos a demostrarla por inducción suponiéndola cierta hasta *n*. Admitamos que la recta *p* corta a las caras a_h y a_s. Sea A_m un vértice cualquiera contenido en la cara secundaria a_{hs}. Proyectando desde A_m la recta *p* sobre el hiperplano a que pertenece a_m obtendremos una recta: en particular los puntos H y S se proyectarán respectivamente sobre puntos de las caras secundarias a_{ms} y a_{mh}. Y dicha proyección no podrá cortar a ninguna otra cara de a_m, lo que equivale a decir que la recta *p* no cortará a ninguna de las caras que pasa por A_m. Queda aún la duda de si cortará a a_m pero esta duda se desvanece eligiendo otro vértice de la cara secundaria a_{hs}.

Análogamente se generalizan las propiedades:

f) Si una recta no corta n *caras de un poliedro de* n *dimensiones tampoco corta a la otra cara del mismo poliedro.*

g) Si una recta corta a una cara de un poliedro elemental sin cortar a ninguna cara secundaria, corta necesariamente a otra cara y sólo otra del poliedro.

h) Si una recta contiene un punto interior de un poliedro elemental proyectivo corta necesariamente al contorno del poliedro en dos puntos.