División del plano por quebradas proyectivas

Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián, 1934

1. En una quebrada proyectiva simple y abierta[1] $\overline{A.....B}$, un punto cualquiera P_1 perteneciente a la misma, da origen a dos quebradas parciales, también simples y abiertas y que designaremos por $\overline{P...A}$ (B) y $\overline{P...B}$ (A).

Si en dicha quebrada hay varios puntos P, Q, R, S...U, diremos que uno de ellos, por ejemplo el S_1 es el primero respecto de A, cuando no haya en la quebrada $\overline{A...S}$ (B) ningún otro de los tales puntos. Análogamente puede decirse respecto de B. La anterior definición puede también referirse a un segmento $\overline{A\ B}$.

2. *Si una quebrada simple y abierta $\overline{A...L\ S...B}$ no tiene ningún vértice en un poliedro elemental[2] y corta a una cara del mismo, corta necesariamente a otra cara.* En efecto, si el punto común pertenece, p.ej., al lado $\overline{a} \equiv \overline{L\ S}$ de $\overline{A...L\ S...B}$ la recta LS cortará a otra del poliedro elemental en otro punto T[3]. Este punto se halla también sobre $\overline{a}$, pues de lo contrario L o S pertenecerían al poliedro, puesto que uno de los dos segmentos determinados por un par de puntos pertenecientes a dististas caras de un mismo poliedro elemental pertenece totalmente a éste. Análoga propiedad puede establecerse respecto de un ángulo.

3. *Si se considera en un plano una quebrada abierta* σ *y dos puntos S y P, puede determinarse otra quebrada $\overline{S...P}$ que no corta a* σ.

Supongamos el teorema demostrado para quebradas de *n* lados o menos de *n*. (Para n=1 es inmediato). Sea $\overline{ABC....Z} \equiv \sigma$ una quebrada de *n+1* lados y S y P dos puntos de su plano. Existe una quebrada simple abierta $\sigma_1 \equiv \overline{S....HJ....P}$ que no corta a la $\sigma' \equiv \overline{BC....Z}$ (de n lados, obtenida de la σ por supresión de $\overline{AB}$). Esta σ′ podrá cortar al segmento $\overline{AB}$ en uno o varios puntos; sea, entre éstos, T el primero respecto de S. Admitamos, para fijar las ideas, que T se halle, p.ej., en el lado $\overline{HJ}$ de σ′, si no es vértice de esta quebrada, o se confunda con J si lo es. Escojamos sobre la recta AB un punto R no contenido en $\overline{AB}$, tal que en el segmento RA (B) no haya ningún punto σ. Si desde R proyectamos sobre $\overline{HT}$, contenido en $\overline{HJ}$ o confundido con él, todos los vértices de σ′ que sean suceptibles de ello y designamos por V un punto talque no se halle en $\overline{V\,T}$ (H) ninguna de las proyecciones obtenidas —excepción hecha de la B, que se realiza sobre T— ocurrirá que en el triángulo $\overline{R\,V\,T}$ (HB) no habrán ningún vértice de σ′ y como esta quebrada no corta a los lados $\overline{R\,T}$ ni $\overline{V\,T}$ del triángulo, tampoco cortará al $\overline{R\,V}$ [2]. Queda así unido R con S y análogamente se une R con P. Existe, pues, una quebrada $\overline{S\ldots.P}$ que no corta a σ y si esta quebrada no fuera simple, fácilmente daría lugar a otra simple mediante la supresión de sus partes cerradas.

4. En el enunciado anterior se puede introducir otra condición: si además de σ, S y P se suponen en el plano varias rectas *v*, *z*,.... *r*, existe una $\sigma_2 \equiv \overline{S\ldots.P}$ que además de no cortar a σ no tiene ningún vértice sobre las rectas *v*,*z*,.... *r*. La demostración es inmediata.

5. La división del plano por una línea poligonal cerrada[4] se extiende, mediante ciertas restricciones, al plano proyectivo elemental. Nos limitaremos por de pronto a generalizarla para las quebradas proyectivas con recta de exclusión[5], de acuerdo con el siguiente enunciado:

Sea r una quebrada proyectiva simple, cerrada, de m lados, no cortada por una recta e. *a) Dicha quebrada divide al conjunto de los puntos del plano, exceptuados los de r, en dos subconjuntos o regiones, y cualquier punto del plano que no pertenezca a r, pertenece a una u otra, pero no a las dos. Además, dos puntos de una misma región, o un punto de una de las regiones y otra de r, son en todo caso, extremos de una quebrada proyectiva simple que no tiene ningún punto común con la r. Y recíprocamente, si un par de puntos que no pertenecen a r son extremos de una quebrada simple que no tiene ningún punto común con la r, los tales puntos pertenecen a una misma de las dos regiones. b) Si una quebrada abierta σ tiene sus extremos en una misma región, y ningún vértice de la misma se halla en r, ni ninguno de r en σ, ambas quebradas tienen un número par de puntos comunes. c) Sobre cualquier recta que corte a r en un punto S, no vértice, hay un segmento $\overline{R\,L}$, que contiene a S, y en el cual, los puntos de $\overline{R\,S}$ (L) pertenecen a una misma región, y los de $\overline{R\,L}$ (S) a la otra. d) Los puntos de* e *pertenecen a una misma región.*

Todas estas propiedades son exactas para m=3, como se desprende del estudio de los poliedros elementales. Supongámoslas probadas para quebradas de menos de *m* lados, y vamos a generalizarlas para cualquier quebrada 1, de *m* lados. Tomemos un punto E en *e*, no alineado con dos vértices de r y proyectemos desde E todos los vértices de r: sean *a* y *z* dos de las rectas proyectantes tales, que, todas las restantes se hallen en $\overline{a\,z}$(e)[6]. Sea A el vértice contenido en *a* y *B* y *C* los vértices inmediatos, anterior y posterior, al A sobre r. No habrá, pues, sobre la recta AE ningún punto de r, ya que r no corta a *e*[7]. Si por el punto E trazamos otra recta *b* que corte a $\overline{\mathrm{B\ A}}$ (e) en el punto B_1 y tal que en el ángulo $\overline{\mathrm{ba}}$ (e) no haya ningún vértice de r, dicha recta cortará también a $\overline{\mathrm{A\ C}}$ (e) en su punto C_1, y los segmentos $\overline{\mathrm{E\ B}_1}$ (c_1) $\overline{\mathrm{EC}_1}$ (B_1) no contendrán ningún punto de la quebrada abierta $\overline{\mathrm{B.....C}}$ (A)[8] y por tanto no cortarán a r. Si en el triángulo $\overline{\mathrm{A\ B\ C}}$ (e) no hay vértice de r, ni siquiera en su contorno (1ª hipótesis), designaremos por *s* al segmento $\overline{\mathrm{B\ C}}$ (e). Si en el triángulo $\overline{\mathrm{A\ B\ C}}$ o en su lado $\overline{\mathrm{B\ C}}$ (e) existen uno o más vértices de r (2ª hipótesis) escogeremos uno de ellos P, de tal posición que el segmento $\overline{\mathrm{A\ P}}$ (e) no corte a r[9] y reservaremos la citada letra *s* para representar el segmento $\overline{\mathrm{A\ P}}$ (e). En uno u otro caso los extremos de *s* dividen a r en dos quebradas abiertas σ_1 y σ_2 (p.ej. en la primera hipótesis $\sigma_1 \equiv \overline{\mathrm{B\ A\ C}}$; $\sigma_2 \equiv \overline{\mathrm{B\ldots C}}$ (A) y en la segunda hipótesis $\sigma_1 \equiv \overline{\mathrm{A\ B\ldots P}}$; $\sigma_2 \equiv \overline{\mathrm{A\ C\ldots P}}$, las cuales reunidas respectivamente a *s* dan lugar a quebradas cerradas r_1 y r_2. Estas quebradas que constan de menos de *m* lados y tienen rectas de exclusión *e*, dividen al plano en regiones Δ y Δ' y π y π' respectivamente (representando las letras con comilla, regiones que contienen a e). La quebrada σ_2 contiene al menos un punto de Δ' (cualquier vértice no extremo en la hipótesis primera, y en la segunda, el punto C, que pertenece a Δ' ya que puede unirse con E por los segmentos $\overline{\mathrm{C\ C}_1}$ (A) y $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{E}}$ (B_1)).

No hay, pues, en Δ ningún punto de σ_2, pues si así fuera, esta quebrada debería cortar a σ_1 o a $\overline{\mathrm{A\ \ P}}$ (e), lo cual no sucede. Análogamente se prueba que no hay en π ningún punto de σ_1. Teniendo presentes estas observaciones se concluye que cualquier punto de Δ puede ser unido con E sin cortar a σ_2, o lo que es lo mismo, que $\Delta > \pi'$ y análogamente que $\pi < \Delta'$. Vamos a probar ya, que las regiones que satisfacen al enunciado son las $\pi+\Delta$ y $\pi'-\Delta$. En efecto, los puntos Δ pueden unirse con los de *s* sin cortar a *r*, y otro tanto ocurre con estos y los de π. Así pueden ser unidos un par de puntos de $\Delta+\pi$.

Sean, por otra parte, L y M dos puntos de $\pi'-\Delta$; si en r se suprimer el lado $\overline{\mathrm{A\ B}}$ se obtiene una quebrada abierta β'; existiría, por tanto, [4] otra, también abierta, $\beta'' \equiv \overline{\mathrm{L\ldots M}}$ sin punto común con la β' y sin ningún vértice sobre AB ni sobre s. En estas condiciones β'' y $\overline{\mathrm{A\ B}}$ han de tener un número par de puntos comunes (si es que tienen alguno), pues de lo contrario β'' y r_2 tendrían un número impar de puntos comunes, contra la proposición c) del enunciado, que hemos supuesto demostrada para quebradas de menos de *m* lados, como la propia r_2. Entre esos puntos comunes sea 1 el primero respecto de L, y 2 el primero respecto de M. En el lado HI de β'' que contenga a a habrá un punto T (cualquiera de H1(I)) tal que todos los del segmento $\overline{T\,1}$ (M) pertenecerán $\pi'-\Delta$ (incluso el T); proyectando desde 2 los vértices de r, que sean susceptibles de ello, sobre $\overline{T\,\alpha}$ (H), sea R una de las proyecciones tal que $\overline{R1}$ (H) no haya ninguna otra (si no hubiere ninguna proyección en $\overline{T\,1}$ (H) supondríamos R≡T). El segmento $\overline{R\,2}$, que juntamente con los $\overline{R\,1}$ (H) y $\overline{1\,2}$ (e) forma un triángulo proyectivo, no podrá ser cortado por β'. Análogamente se halla en el lado UV de β'' que pasa por 2 un punto Z, tal que todos los de Z2 (U) pertenezcan a $\pi'-\Delta$, incluso el Z; el segmento $\overline{Z\,T}$, que forma triángulo proyectivo con $\overline{1\,2}$ (e) y $\overline{RB'}$ (U), no contiene ningún punto de 1, y por tanto tampoco de $\overline{1\,2}$ (e). Si suprimimos de β'' la quebrada abierta R....Z (L), el resto no contiene ningún punto de r, y como otro tanto ocurre con el citado segmento $\overline{Z\,T}$, los puntos $\pi'-\Delta$ quedan unidos sin cortar a I. C q d.

Lo que resta de la proposición a) así como las proposiciones b), c) y d) se generalizan inmediatamente, haciendo convenientes aplicaciones a r_1 y r_2.

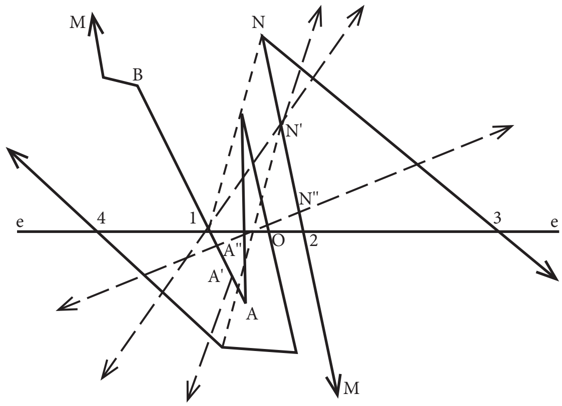
6. Fundándonos en la proposición (5) podemos ya probar la más general que se anuncia así:

Si una quebrada proyectiva simple, cerrada ζ es cortada por una recta e *en* 2m *puntos, ninguno de los cuales sea vértice de ζ, hay entre los citados puntos de intersección, un par al menos que son consecutivos simultáneamente en* e *y en* ζ[10]. *Dicha quebrada divide al plano en dos regiones, de tal suerte que:*

a) Un punto cualquiera no contenido en ζ debe pertenecer a una o a otra, pero no a las dos. Los puntos de una misma región, o uno de una región y otro de ζ, son extremos de una quebrada abierta σ que no corta a ζ; b) toda quebrada abierta cuyos extremos pertenezcan a una misma región, si no tiene ningún vértice en ζ, ni ζ ningún vértice en ella, corta a ζ en un número par de puntos y recíprocamente; c) sobre cualquier recta que contenga un punto P de ζ, no vértice, hay un segmento $\overline{M\,N}$, *que contiene a P y cuyos puntos* $\overline{P\,M}$ *(N) pertenecen a una misma región y los de* $\overline{P\,N}$ *(M) a la otra.*

Todas estas propiedades, con excepción naturalmente de la primera, la hemos probado ya para quebradas con recta de exclusión [5]. Vamos ahora a generalizarlas por inducción, suponiendo que son ciertas cuando el número de puntos de intersección es 2 (m–1).

Sean 1 y 2, dos puntos pertenecientes a $\zeta \equiv \overline{A\,B..MN..A}$ y a *e* consecutivos sobre ζ (figura). Si en cualquiera de los segmentos $\overline{1\,2}$, existe al menos un punto de ζ, los puntos



1 y 2 no son consecutivos sobre *e*, pero vamos a probar que en uno de los segmentos $\overline{1\ 2}$, hay un par de consecutivos sobre ζ y sobre *e*. Supongamos, por ejemplo, que 1 se halle en $\overline{A\ B}$ y 2 en $\overline{M\ N}$ y que no haya en $\overline{1 \ldots 2}$ (A) ningún punto común a ζ y a *e*. Proyectamos desde 1 sobre $\overline{2\ N}$ (M) todos los vértices de z, que sean susceptibles de ello y sea N′ un punto de $\overline{2\ N}$ (M), tal que en el segmento $\overline{2\ N'}$ (N) no figure ninguna de las proyecciones obtenidas. Análogamente proyectemos desde N′ sobre $\overline{1\ A}$ (B) los vértices de ζ que sean susceptibles de ello y designemos por A′ un punto de $\overline{1\ A}$ (B) tal que no haya en $\overline{1\ A'}$ (B) ninguna proyección. El segmento $\overline{A'\ N'}$ (e) determina con el $\overline{A'\ 1}$ (A) un triángulo proyectivo cuyo lado $\overline{1\ N'}$ designaremos por *s*; y este segmento con el $\overline{2\ N'}$(N) determina a su vez otro triángulo proyectivo en el que designaremos por *t* al lado $\overline{1\ 2}$. Si por el punto O, común a *e* y a A′N′, se traza una recta que corte a $\overline{2\ N'}$ (N) en un punto N′′, cortará a $\overline{1\ N'}$ en otro punto P y por tanto $\overline{1\ A'}$ (A) en un tercer punto A″. Evidentemente que la quebrada cerrada $\zeta' \equiv \overline{A''\ B \ldots\ldots M\ N''\ A''}$ constituida por la porción de ζ, $\sigma' \equiv \overline{B \ldots\ldots M}$ (A) y los segmentos $\overline{A''\ B}$ (A), $\overline{M\ N''}$ (N) y $\overline{A''\ N''}$ (O) no es cortada por A′N′ y por tanto divide al plano en dos regiones, a una de las cuales pertenecen A′ y N′.

En consecuencia, la quebrada $\overline{A'A \ldots\ldots N\ N'}$ (B) corta a $\overline{A''\ N''}$ (O) en un número par de puntos. Sean entre éstos Y′′ y X′′ dos consecutivos sobre la quebrada. Los lados que los contienen, cortarán también a *s*, y por lo tanto a *t*, en otros dos puntos, 3 y 4, que serán igualmente consecutivos en ζ, entre los varios comunes a ζ y *e*. Si en el segmento $\overline{3\ 4}$ (O) no hay puntos de ζ, son consecutivos sobre ζ y sobre *e* simultáneamente c. q. d. En caso contrario se aplica al segmento $\overline{3\ 4}$ (O) el razonamiento anterior hasta llegar a demostrar la existencia de dos puntos doblemente consecutivos. Queda demostrada la primera afirmación del enunciado.

Sean α y β un par de puntos comunes a *r* y a *e* y consecutivos sobre ambas líneas, contenidos respectivamente, p.ej., en los lados $\overline{A\ B}$ y $\overline{M\ N}$ de $r \equiv \overline{A\ B \ldots\ldots M\ N \ldots\ldots A}$ de tal suerte que no haya en $\overline{\alpha \ldots\ldots \beta}$ (A) ningún punto de e, ni en un segmento $\overline{\alpha\ \beta}$ ningún punto de r, como hemos visto en los razonamientos anteriores, puede determinarse un punto O no contenido en $\overline{\alpha\ \beta}$ y de tal modo, que una recta que pase por O corte a los lados $\overline{A\ B}$ y $\overline{M\ N}$ en puntos A″ y N″ originándose una quebrada cerrada $r' \equiv \overline{A''\ B \ldots\ldots M\ N''\ A''}$ integrada por la porción de r, A″. . . . . N″ (A) y por el segmento A″N″ (o) quebrada que es cortada por *e* en dos puntos, y que divide al plano en dos regiones Δ y Δ′ según se ha señalado ya anteriormente. A una de estas regiones Δ′ pertenece íntegramente, como también se ha indicado, la quebrada abierta A″. . . . N″ (B).

Por otra parte, la quebrada cerrada $r' \equiv \overline{A''A \ldots N\ N''\ A''}$ constituída por la porción de r, $\overline{A''A - N\ N''}$ (B) y el segmento A″N″ (o) determina también, a su vez, dos regiones π y π′, pues es cortada por *e* en 2m - 2 puntos; a más de éstas, la π′ p.ej., pertenece íntegramente A″B . . . M N″ (A). En consecuencia, π y Δ no tienen punto alguno común, pues todos los de π están en Δ′ y todos los de Δ en π′. Las regiones que satisfacen al enunciado son Δ+π y π′−Δ (o lo que es igual, Δ′−π). La demostración se realiza por el mismo método seguido en [5].

---

1. Definición de quebrada proyectiva simple y abierta en «Fundamentos», de Rey Pastor, pág. 116.
2. Rev. del Centro, febrero 1934, «Peoliedros elementales».
3. Idem id.: «Posiciones de una recta y un poliedro elemental».
4. Ver p.ej., Kerékjártó. «Vorlesungen über Topologie» pág. 21.
5. Entenderemos por «recta de exclusión» una recta que no corte a la quebrada. Las quebradas métricas u ordinarias admiten como rcta de exclusión la recta impropia del plano.
6. Indicamos con esta notación el ángulo $\overline{az}$ que no contiene a *e*.
7. Y esto basta en virtud de la aplicación para ángulos censignada en [2].
8. En efecto, el triángulo $\overline{A\ E\ B_1}$ (C_1B) no contiene ningún vértice de $\overline{B \ldots C}$ (A) y como esta quebrada no corta a $\overline{E\ A}$ ni a $\overline{A\ B_1}$ (B) no cortará tampoco a $\overline{E\ B_1}$ (c_1) en virtud de (2); análogo para $\overline{E\ C_1}$ (B_1).
9. A este efecto se proyectan sobre $\overline{A\ C}$ (e) desde B, los vértices de $\overline{B \ldots C}$ (A) que se hallen en $\overline{A\ B\ C}$ (e) en en $\overline{B\ C}$ (e) excepto el C, y siendo 1 la primera proyección respecto de A, se elige cualquier vértice de $\overline{B\ 1}$ (e).
10. Diremos que entre varios puntos de ζ, dos de ellos K y X son consecutivos en ζ, cuando en una de las quebradas abiertas $\overline{K \ldots X}$, porciones de ζ, no se halle ningún otro de aquellos puntos. Análoga definición para puntos sobre una recta.