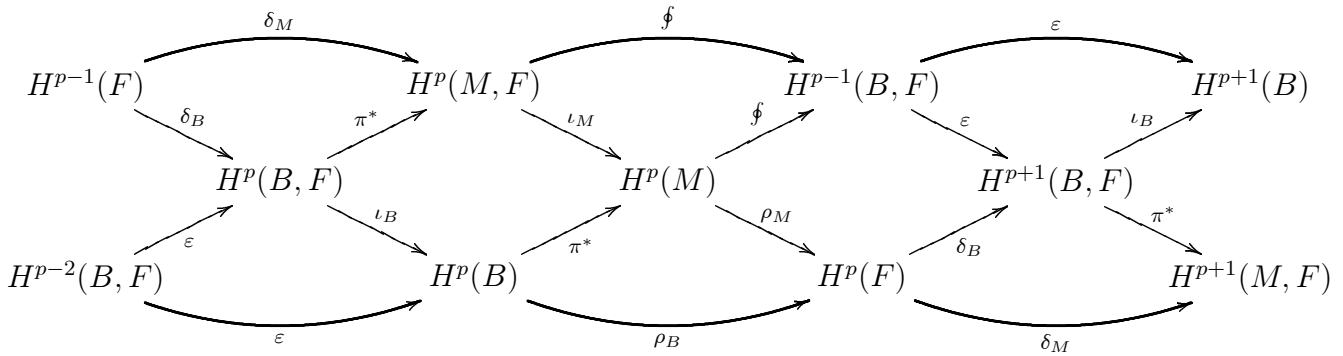


La sucesión de Gysin



José Ignacio Royo Prieto

LA SUCESIÓN DE GYSIN

por

José Ignacio Royo Prieto

Actúa como ponente en esta Memoria la Profesora Marta MACHO STADLER del Departamento de Matemáticas de la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea

Memoria realizada bajo la Dirección del Professeur Martintxo SARALEGI ARANGUREN de l'Université d'Artois, para optar al Grado de Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea.

Leioa, junio 1999

Agradecimientos

Gracias, Martintxo, por este tema de trabajo con el que tanto he disfrutado. Gracias por tus sugerencias, tu apoyo y tu hospitalidad.

Gracias, Raúl, por tu ayuda y por haber escuchado mi exposición sobre este trabajo antes de que cobrase forma de tesina.

Gracias Sonia, Luis Carlos, Susana; gracias a quienes me habeis apoyado o ayudado a que esta memoria sea más presentable.

Y gracias con especial cariño a ti, Marta. Gracias por todo. No sabría por dónde empezar...¡te debo tanto!

Índice General

Introducción	iii
1 Preliminares de Topología y Geometría	1
1.1 El Teorema de de Rham	1
1.1.1 Cohomología de de Rham	1
1.1.2 Lema de Poincaré	2
1.1.3 Sucesión de Mayer-Vietoris	4
1.1.4 Teorema de de Rham	5
1.2 Acciones de grupos	10
1.2.1 Definiciones	10
1.2.2 Integral de Haar	12
1.2.3 Entornos tubulares	13
2 Sucesión de Gysin. El caso libre	15
2.1 Estructura local de la acción	16
2.2 Cohomología invariante	17
2.2.1 Definiciones	17
2.2.2 Carácter funtorial	19
2.2.3 Lema de Poincaré en cohomología invariante	19
2.2.4 Sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología invariante	20
2.2.5 Cuasiisomorfismo	21
2.3 Formas básicas	24
2.4 Actores que intervienen en la sucesión de Gysin	25
2.4.1 El campo fundamental	26
2.4.2 Forma fundamental y forma de Euler	27
2.5 Sucesión de Gysin	28
2.5.1 Invarianza con respecto de la métrica	30
2.5.2 Estructura multiplicativa	30
2.6 Aplicación: Cohomología de $\mathbb{C}P^n$	31

3	Sucesión de Gysin. El caso semilibre	33
3.1	Particularidades del caso semilibre	34
3.1.1	Puntos fijos	35
3.2	Explosión de Jänich	36
3.2.1	Construcción de la explosión	37
3.2.2	Estructura local de la acción	40
3.2.3	Explosión para el espacio de órbitas	42
3.3	Cohomología de Verona	43
3.3.1	Definiciones	43
3.3.2	Carácter funtorial	45
3.3.3	Teorema de de Rham para la cohomología de Verona	47
3.4	Cohomología de Verona invariante	52
3.5	Actores que intervienen en la sucesión de Gysin	55
3.5.1	Campo fundamental y métricas invariantes	55
3.5.2	Formas fundamentales y forma de Euler	56
3.6	Sucesión de Gysin	58
4	Algunas aplicaciones	63
4.1	Otras sucesiones “tipo Gysin”	63
4.1.1	Cohomología relativa de Verona	63
4.1.2	Sucesión de Smith-Gysin	66
4.2	Números de Betti	68
4.3	Acciones sobre el espacio proyectivo complejo	71
	Índice Terminológico	79

Introducción

Una acción diferenciable de \mathbb{R} sobre una variedad diferenciable M define una foliación \mathcal{F} , y estamos interesados en estudiar la relación entre la cohomología de M y la del espacio de órbitas M/\mathcal{F} (o cohomología básica). Este espacio de órbitas puede ser algo muy patológico, así que nos limitaremos a las *acciones riemannianas* (las que inducen foliaciones riemannianas), donde la cohomología básica ha demostrado ser un invariante adaptado y rico.

Cuando esta acción es periódica, tenemos de hecho una acción diferenciable de \mathbb{S}^1 . Llamemos $\pi : M \rightarrow B$ a la proyección sobre el espacio de órbitas y F a la variedad de los puntos fijos por la acción. En este caso, la relación cohomológica viene dada por la sucesión de Gysin:

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\pi^*} H^p(M) \xrightarrow{\int} H^{p-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots,$$

donde \int es la integración a lo largo de las fibras y ε , salvo signo, la multiplicación por la clase de Euler. Este resultado se encuentra típicamente en el marco de la Topología Algebraica (ver, por ejemplo, [GHV], [BoTu] o [Die]), pero a nosotros nos interesa recuperarlo usando formas diferenciales, “a la de Rham”. Este enfoque desde la Geometría Diferencial nos resultará más adecuado a la hora de extender la sucesión de Gysin a las acciones riemannianas.

Nuestro marco de trabajo va a ser una acción diferenciable de \mathbb{S}^1 sobre una variedad M . Construiremos la sucesión de Gysin en los casos en que la acción sea libre y semilibre (es decir, libre fuera de los puntos fijos).

Aunque parezca que nos hemos delimitado en exceso al abordar sólo el caso semilibre, se puede comprobar que los resultados son formalmente los mismos para una acción genérica. La prueba del caso general supone una complicación técnica, al pasar de la presencia de dos estratos del caso semilibre (los puntos fijos y los “móviles”) a la aparición de uno de ellos por cada grupo de isotropía. El esfuerzo técnico a realizar es excesivo, y el interés conceptual no es mayor que en el caso semilibre, ya que cuando nos extendamos a ciertas acciones de \mathbb{R} , trabajaremos con formas de M en lugar de con formas en los diferentes estratos de B . De hecho, no podremos contar con B en ese caso (puede ser totalmente desconexo, por ejemplo).

El material de esta Memoria está organizado como sigue: en el primer capítulo trataremos algunos tópicos de Topología Algebraica y Geometría Diferencial. Algunos serán meras presentaciones de resultados y definiciones que usaremos, y otros serán tratados en profundidad, como el Teorema de de Rham, ya que nos interesa comprender bien su demostración para adaptarla en otros casos.

En los capítulos segundo y tercero construimos la sucesión de Gysin en los casos libre y semilibre, respectivamente. Resultará fundamental entender cómo funciona la geometría de la acción, dando una descripción local adecuada. En el caso semilibre, el espacio de órbitas no tiene por qué ser una variedad, sino que es una variedad singular. Esto lo solventaremos técnicamente con las formas de Verona y la explosión de Jänich.

En el capítulo de aplicaciones, derivamos algunas sucesiones más “tipo Gysin”, obtenemos una relación entre los números de Betti de M y de F , e ilustramos esta teoría con algunos cálculos en ejemplos de acciones concretas de \mathbb{S}^1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Capítulo 1

Preliminares de Topología y Geometría

1.1 El Teorema de de Rham

La *cohomología singular* es un invariante fundamental de cualquier espacio topológico M . Se define como la homología del complejo de cadenas $\text{Hom}(\Delta_*(M), \mathbb{R})$, donde $\Delta_*(M)$ representa el \mathbb{R} -módulo de las cadenas singulares de M , y $\text{Hom}(A, B)$, los homomorfismos de A en B . Si M es además una variedad diferenciable, existe otro invariante asociado llamado *cohomología de de Rham*. El teorema de de Rham afirma que estos dos invariantes coinciden, es decir, que la cohomología de de Rham y la cohomología singular de una variedad diferenciable M son la misma.

Para demostrar el teorema de de Rham, se construye una aplicación entre los complejos que definen ambas cohomologías, que son el ya indicado y el complejo de las formas diferenciales. Para ver que esa aplicación induce un isomorfismo en los grupos de cohomología, se usan propiedades importantes que satisfacen ambas: el lema de Poincaré, que induce la invarianza por homotopía, y la sucesión exacta de Mayer-Vietoris.

Como en esta Memoria vamos a trabajar con complejos de formas diferenciales, nos interesa demostrar detalladamente estas propiedades para la cohomología de de Rham.

1.1.1 Cohomología de de Rham

El propósito de este párrafo es establecer la notación; no pretende ser una introducción detallada a la teoría de de Rham. Una exposición minuciosa se encuentra, por ejemplo, en [KaLe].

Dada una variedad diferenciable y paracompacta M y un entero $p \geq 0$, denotamos por $\Omega^p(M)$ al espacio vectorial real de las p -formas diferenciales sobre M . El conjunto

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M) \quad (1.1)$$

es conocido como *complejo de de Rham*. El producto exterior y la diferencial exterior denotados respectivamente por \wedge y d , dan a $\Omega^*(M)$ estructura de álgebra diferencial graduada. La sucesión

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

es de orden dos, así que tenemos un complejo de cocadenas donde d va subiendo de grado en vez de bajar. La homología de este complejo es la cohomología de de Rham.

Definición 1.1 El p -ésimo grupo de cohomología de de Rham de M es el espacio vectorial

$$H^p(M) = \frac{\ker(d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M))}{\operatorname{im}(d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M))} = \frac{p\text{-formas cerradas}}{p\text{-formas exactas}}$$

Si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, para denotar el pullback de f usaremos la notación $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$. Como f^* conmuta con la diferencial d , induce un homomorfismo en cohomología, que denotaremos de la misma manera, es decir: $f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$. Se tiene que f^* es distributivo con respecto del producto exterior: es decir, para todo par de formas $\omega, \eta \in \Omega^*(N)$, se cumple

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta. \quad (1.2)$$

Podemos considerar Ω^* como un funtor contravariante de la categoría de las variedades diferenciables (los morfismos son las aplicaciones diferenciables) en la categoría de las álgebras diferenciales graduadas. Sea U un abierto de la variedad diferenciable M , y sea $i: U \rightarrow M$ la inclusión. Dada una forma ω de M , llamaremos *restricción* de ω a U a la forma $i^*\omega$, que también denotaremos por $\omega|_U$.

1.1.2 Lema de Poincaré

El Lema de Poincaré nos dice que la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable M y la de $M \times \mathbb{R}$ son la misma, intuitivamente esto significa que podemos “contraer” \mathbb{R} . La consecuencia crucial es que dos espacios con el mismo tipo de homotopía tienen la misma cohomología de de Rham (axioma de homotopía).

Proposición 1.2 (Lema de Poincaré) *Sea M una variedad diferenciable y sea la proyección $p_M: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Entonces $H^*(M) \xrightarrow{p_M^*} H^*(M \times \mathbb{R})$ es un isomorfismo.*

Demostración: Sean las aplicaciones $M \times \mathbb{R} \xleftarrow[p_M^*]{p_M} M$, que definimos por $p_M(x, t) = x$ y $s(x) = (x, 0)$. Consideramos los pullbacks inducidos $\Omega^*(M \times \mathbb{R}) \xleftarrow[p_M^*]{s^*} \Omega^*(M)$. Veamos que inducen isomorfismos en cohomología. Como $p_M \circ s = 1$, tenemos trivialmente que $s^* \circ p_M^* = 1$. Sin embargo, $s \circ p_M \neq 1$, y a nivel de formas, $p_M^* \circ s^* \neq 1$. Por ejemplo, si tomamos $M = \mathbb{R}$ y como 0-forma la función diferenciable $f(x, t) = tx$, tenemos

$$(p_M^* \circ s^* f)(x, t) = (f \circ s \circ p_M)(x, t) = f(x, 0) = 0$$

Para ver que $p_M^* \circ s^*$ es la identidad en cohomología, vamos a definir un operador lineal K sobre $\Omega^*(M \times \mathbb{R})$ que verifique la relación

$$1 - p_M^* \circ s^* = \pm(Kd - dK). \quad (1.3)$$

Notemos que la parte derecha de la fórmula transforma formas cerradas en formas exactas, y que por tanto obtenemos $p_M^* \circ s^* = 1$ en cohomología. Un operador de este tipo se llama *operador homotopía*. Notemos que tiene que ser de grado -1 .

Si $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ es un atlas para M , entonces $\{U_\alpha \times \mathbb{R}, \phi_\alpha \times t\}$ lo es para $M \times \mathbb{R}$, donde t es la carta identidad de \mathbb{R} . Cada q -forma de $M \times \mathbb{R}$ se puede expresar de forma única como $\omega = \alpha_t + \beta_t \wedge dt$, donde $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ y $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ son familias diferenciables de formas diferenciales de M (es decir, formas diferenciales de $M \times \mathbb{R}$ sin dt en su expresión local (ver [GHV], pag.153 para una exposición detallada). Definimos entonces nuestro operador K mediante

$$K(\omega) = \int_{s=0}^{s=t} \beta_s \wedge ds$$

donde $\omega = \alpha_t + \beta_t \wedge dt$. Como la integración es lineal, K también lo es. Denotamos por d_X al operador diferencial parcial en M (ver [GHV], vol.I, pag. 148). Ahora calculamos los dos términos de (1.3) aplicados a una q -forma $\omega = \alpha_t + \beta_t \wedge dt$:

$$(1 - p_M^* \circ s^*)(\omega) = \omega - \alpha_0,$$

pues $p_M^*(s^*(dt)) = p_M^*(d(t \circ s)) = p_M^*(d(0)) = 0$.

$$d\omega = d_X \alpha_t + (-1)^q \alpha_t' \wedge dt + d_X \beta_t \wedge dt$$

$$K(d\omega) = (-1)^q \int_0^t \alpha_s' \wedge ds + \int_0^t \beta_t \wedge dt = (-1)^q (\alpha_t - \alpha_0) + \int_0^t \beta_t \wedge dt$$

$$d(K\omega) = \int_0^t d_X \beta_s \wedge ds + \int_0^t (-1)^{q-1} \beta'_s \wedge ds = \int_0^t d_X \beta_s \wedge ds + (-1)^{q-1} \beta_t \wedge dt.$$

Así que $(dK - Kd)(\omega) = (-1)^{q-1}(\omega - \alpha_0) = (-1)^{q-1}(1 - p_M^* \circ s^*)(\omega)$, y K es un operador homotopía. ■

Teorema 1.3 (Axioma de Homotopía) Sean $f, g: M \rightarrow N$ aplicaciones diferenciablemente homótopas. Entonces, $f^* = g^*$

Demostración: Que f y g sean diferenciablemente homótopas, significa que existe una aplicación diferenciable $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$ tal que

$$F(x, t) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t \geq 1 \\ g(x) & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Podíamos haber hecho la prueba del lema de Poincaré tomando $s(x) = (x, 1)$ en lugar de $s(x) = (x, 0)$. Llamamos s_0 a la del lema de Poincaré y s_1 a esta nueva sección. Se cumple pues, $f = F \circ s_1$ y $g = F \circ s_0$. Por lo tanto,

$$f^* = (s_0^* \circ \pi^*) \circ f^* = s_0^* \circ \pi^* \circ s_1^* \circ F^* = s_0^* \circ F^* = g^* \quad \blacksquare$$

Corolario 1.4 Si M y N son variedades diferenciables del mismo tipo de homotopía, entonces tienen la misma cohomología.

1.1.3 Sucesión de Mayer-Vietoris

La sucesión exacta de Mayer-Vietoris es una herramienta que nos permite conocer la cohomología de una variedad M , a partir de datos locales: la cohomología de dos abiertos que la cubran y de su intersección. La clave para deducir la sucesión de Mayer-Vietoris es la existencia de particiones de la unidad, tanto en cohomología de de Rham como en las demás cohomologías de formas diferenciales que usaremos.

Sea $M = U \cup V$, con U y V abiertos. La siguiente sucesión de complejos diferenciales es conocida como *sucesión de Mayer-Vietoris*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \xrightarrow{\iota} & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega^*(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\sigma, \tau) & \longmapsto & \tau|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} & & (1.4) \\ & & \omega & \longmapsto & (\omega|_U, \omega|_V) & & & & \end{array}$$

Proposición 1.5 La sucesión de Mayer-Vietoris es exacta.

Demostración: Todos los pasos de la exactitud son directos, salvo la sobreyectividad de ε . Sea $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$. Tomamos una partición de la unidad (recordamos que las variedades con las que trabajamos son paracompactas) $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$, es decir, $\text{sop } \rho_V \subseteq V$ y $\text{sop } \rho_U \subseteq U$. Notamos que $\rho_V \omega$ es una q -forma en U y $\rho_U \omega$ es una q -forma en V . Como además

$$(\rho_U \omega) - (-\rho_V \omega) = \omega,$$

tenemos que $(-\rho_V \omega, \rho_U \omega)$ es una antiimagen de ω para la aplicación ε . ■

La sucesión de complejos (1.4) induce canónicamente una sucesión exacta larga en cohomología, que también se llama *sucesión de Mayer-Vietoris*.

$$\dots \longrightarrow H^q(M) \longrightarrow H^q(U) \oplus H^q(V) \longrightarrow H^q(U \cap V) \longrightarrow H^{q+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Esta sucesión es una útil herramienta de cálculo. Por ejemplo, permite calcular la cohomología de las esferas: tomamos $\mathbb{S}^n = U \cup V$, con $U = \mathbb{S}^n - \{\text{polo norte}\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{\text{polo sur}\}$, ambos abiertos contráctiles. Claramente, $U \cap V$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Utilizando el lema de Poincaré, la sucesión exacta de Mayer-Vietoris e inducción, es fácil probar que la cohomología de la esfera es:

$$H^p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1.1.4 Teorema de de Rham

En esta sección demostramos que la cohomología singular y la de de Rham tienen grupos de cohomología isomorfos. Lo que nos va a interesar no es el resultado, sino la técnica mediante la cual probamos que dos complejos tienen la misma cohomología. Como para la sucesión de Gysin trabajaremos con complejos de formas diferenciales, no nos extenderemos en los detalles de la cohomología singular, que se pueden encontrar en cualquier tratado de Topología Algebraica (por ejemplo, en [Bre2]).

Para relacionar la cohomología de de Rham con la singular, tenemos que hacer una pequeña modificación en esta última (que al final, veremos que nos proporciona los mismos grupos de cohomología). En lugar de trabajar con todos los símlices singulares, nos quedaremos con los símlices singulares diferenciables, para poder integrar formas diferenciales sobre ellos.

Definición 1.6 Un p -símlice singular $\sigma: \Delta_p \longrightarrow M$ se dice que es *diferenciable*, si se puede extender de forma diferenciable a un entorno de Δ_p en el espacio ambiente \mathbb{R}^p . Si una p -cadena de símlices singulares está formada por símlices diferenciables, diremos que es una *p -cadena diferenciable*. Denotamos el conjunto de p -cadenas diferenciables en M por $\Delta_p(M)$.

Sea un $\sigma: \Delta_p \rightarrow M$ un p -símplice singular diferenciable. Si olvidamos su $(p-2)$ -esqueleto, lo podemos pensar como una variedad con borde. Tomamos una orientación positiva en el 0-símplice Δ_0 . Se puede definir de manera inductiva una orientación en Δ_p , coherente con la de su borde. Si ahora tenemos una p -forma ω de M , deducimos que $\sigma^*\omega$ es una p -forma de Δ_p . Podemos definir la integral de $\sigma^*\omega$ en Δ_p . Para ello, integramos fuera de entornos del $(p-2)$ -esqueleto, cada vez más pequeños. De esta manera, definimos

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega.$$

Extendemos linealmente esta definición a una p -cadena $c = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$ mediante

$$\int_c \omega = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\sigma} \omega.$$

Hemos definido así un homomorfismo $\Psi(\omega): \Delta_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\Psi(\omega)(c) = \int_c \omega$, que es lineal en ω . Por tanto, tenemos un homomorfismo

$$\Psi: \Omega^p(M) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_p(M), \mathbb{R}).$$

Consideramos la diferencial

$$\delta: \text{Hom}(\Delta_{p-1}(M), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_p(M), \mathbb{R})$$

definida por $(\delta f)(c) = f(\partial c)$, donde $\partial: \Delta_p \rightarrow \Delta_{p-1}$ es el operador borde. Mediante un cálculo directo, aplicando el teorema de Stokes, obtenemos que Ψ es una aplicación de cadenas (o aplicación diferencial), es decir, que $\Psi \circ d = \delta \circ \Psi$.

Denotamos por $H^p(M; \mathbb{R})$ el p -ésimo grupo de cohomología singular diferenciable de M , que es el p -ésimo grupo de homología de $\{(\text{Hom}(\Delta_p(M), \mathbb{R}))_{p \geq 0}, \delta\}$. La cohomología singular diferenciable, así como la singular, satisface el lema de Poincaré, el axioma de homotopía y la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris.

Como Ψ es una aplicación de cadenas, induce en cohomología el homomorfismo $\Psi^*: H^p(M) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})$. El Teorema de de Rham afirma que es un isomorfismo:

Teorema 1.7 (Teorema de de Rham) *El homomorfismo*

$$\Psi^*: H^p(M) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})$$

es un isomorfismo para todo $p \geq 0$.

La demostración va a depender de una serie de lemas. Primero, elegimos una métrica en M (M es paracompacta) y tomamos una base de convexos geodésicos \mathcal{U} . La intersección finita de convexos geodésicos es otro convexo geodésico, y por lo tanto, contráctil (de hecho, es difeomorfa a \mathbb{R}^n).

Lema 1.8 *El Teorema de de Rham es cierto para todo convexo geodésico U .*

Demostración: Como el lema de Poincaré se cumple para ambas cohomologías, U es acíclico para las dos, es decir, su cohomología es nula en los grados positivos y \mathbb{R} para el grado cero. Notamos que la aplicación de de Rham lleva funciones constantes de valor C en la 0-cocadena que asigna a cada 0-símplice el valor C . Por lo tanto, el teorema de de Rham es cierto para U . ■

Lema 1.9 *Si el teorema de de Rham es cierto para abiertos U, V y $U \cap V$, entonces también es cierto para $U \cup V$.*

Demostración: Como las dos cohomologías satisfacen Mayer-Vietoris, tenemos el diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) & \longrightarrow & H^{p-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^p(U \cup V) & \longrightarrow & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) \\
 \Psi_1 \downarrow & & \Psi_2 \downarrow & & \Psi_3 \downarrow & & \Psi_4 \downarrow & & \Psi_5 \downarrow \\
 H^{p-1}(U; \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{p-1}(U \cap V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p(U \cup V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p(U; \mathbb{R}) \oplus H^p(V; \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p(U \cap V; \mathbb{R}),
 \end{array}$$

donde las flechas verticales están inducidas por la aplicación de de Rham. Como por hipótesis Ψ_1, Ψ_2, Ψ_4 y Ψ_5 son isomorfismos, por el lema de los cinco, Ψ_3 también lo es. ■

Lema 1.10 *Si el teorema de de Rham es cierto para una colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ disjuntos, entonces es cierto para $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.*

Demostración: Se deduce de los isomorfismos

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha \in A} \Delta_*(U_\alpha), \mathbb{R}\right) &\cong \bigoplus_{\alpha \in A} \text{Hom}(\Delta_*(U_\alpha), \mathbb{R}) \\
 \Omega^*\left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) &\cong \bigoplus_{\alpha \in A} \Omega^*(U_\alpha)
 \end{aligned}$$

y del hecho de que la aplicación de de Rham sea natural. ■

Ahora completamos la prueba del teorema de de Rham ensamblando estos tres lemas con un método debido a G.E. Bredon (ver [Bre2]).

Lema 1.11 (Método de Bredon) *Sea M una variedad diferenciable y sea \mathcal{U} una base de abiertos saturada para intersecciones finitas. Sea P una afirmación formulada sobre abiertos de M , satisfaciendo:*

- 1) $P(U)$ es cierta para todo $U \in \mathcal{U}$;
 - 2) si $P(U), P(V), P(U \cap V)$ son ciertas, entonces también lo es $P(U \cup V)$, donde U y V son abiertos cualesquiera de M ;
 - 3) si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia de abiertos disjuntos cualesquiera de M y se cumple $P(U_\alpha)$ para todo α , entonces $P(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ también se verifica,
- entonces, $P(M)$ es cierta.

Demostración: Primero observamos que P se cumple para uniones finitas de abiertos de \mathcal{U} . En efecto, para uniones de dos abiertos, esto es la propiedad 2) del enunciado. Supongamos ahora que es cierto para uniones de n abiertos. Tenemos la identidad

$$(U_1 \cup \dots \cup U_n) \cap U_{n+1} = (U_1 \cap U_{n+1}) \cup \dots \cup (U_n \cap U_{n+1})$$

luego $P((U_1 \cup \dots \cup U_n) \cap U_{n+1})$ es cierto. Como también es cierto $P(U_{n+1})$, aplicando 2), se cumple $P(U_1 \cup \dots \cup U_{n+1})$, y se completa la inducción.

Vamos a construir ahora una función $f: M \rightarrow [0, \infty)$ continua y propia, es decir, tal que la imagen inversa de un compacto sea compacta. Como M satisface el segundo axioma de numerabilidad y es paracompacta, podemos tomar un cubrimiento numerable y localmente finito $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con los \bar{V}_n compactos, y una partición de la unidad $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subordinada a este cubrimiento. Entonces, la función definida por

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n f_n(x)$$

es una función propia. En efecto, sea $x \in M$ y sean V_{j_1}, \dots, V_{j_k} todos los abiertos de \mathcal{V} que contienen a x , ordenados por sus subíndices de menor a mayor. Entonces, $f(x)$ es una combinación convexa de j_1, \dots, j_k , y deducimos que $j_1 \leq f(x) \leq j_k$. Denotamos por \tilde{V}_i la clausura de la unión de todos los abiertos de \mathcal{V} que intersecan con V_i . Como es un número finito, todo \tilde{V}_i es compacto. Sea ahora $K \subseteq [0, \infty)$ compacto. Entonces, existe un $l \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq [0, l]$, y tenemos

$$f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}[0, l] \subseteq \bigcup_{j=1}^l \tilde{V}_j,$$

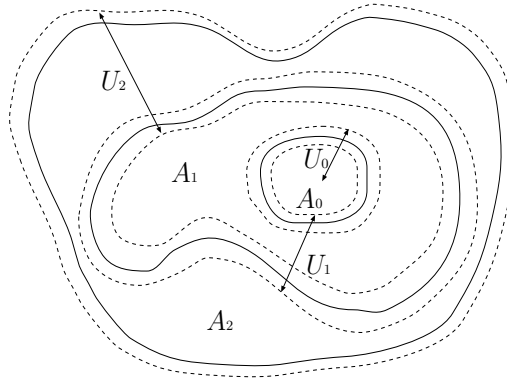
luego f es propia.

Definimos ahora los conjuntos $A_n = f^{-1}[n, n+1]$. Como f es propia, A_n es compacto, y lo cubrimos con una unión finita U_n de conjuntos de \mathcal{U} contenidos en

$f^{-1}(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2})$. Tenemos

$$A_n \subseteq U_n \subseteq f^{-1}\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2}\right).$$

De esta manera, conseguimos que los conjuntos U_n con n par sean disjuntos entre sí, y lo mismo pasa entre los U_m con m impar, tal como se ve en la siguiente figura:



Ahora, como cada U_n es una unión finita de abiertos de \mathcal{U} , tenemos que $P(U_n)$ es cierta para todo n . Consideramos los abiertos

$$U = \bigcup_{k \geq 0} U_{2k} \quad \text{y} \quad V = \bigcup_{k \geq 0} U_{2k+1}$$

Notamos que por 3), se cumplen $P(U)$ y $P(V)$. Además, $U \cap V = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} (U_{2i} \cap U_{2j+1})$, que es una unión disjunta. Como cada $U_{2i} \cap U_{2j+1}$ es una unión finita de elementos de \mathcal{U} , se sigue que $P(U \cap V)$ es cierta. Aplicando 2), obtenemos que se cumple $P(U \cup V) = P(M)$. ■

Este método de Bredon es muy útil para teoremas “tipo de Rham”. Para probar que dos complejos tienen la misma cohomología, basta ver que cumplen Mayer-Vietoris y elegir un cubrimiento adecuado sobre el cual se pueda probar la propiedad “a mano” (para lo cual es útil el lema de Poincaré). Usaremos esta técnica para poder trabajar con subcomplejos del complejo de de Rham (mejor adaptados a la naturaleza de las acciones que éste), sabiendo que obtenemos la misma cohomología.

Como ilustración de la comodidad del método de Bredon, vamos a sustituir en el teorema de de Rham la cohomología singular diferenciable por la singular ordinaria. Para esto, consideramos la inclusión de los símlices singulares en la totalidad de los símlices

$$\iota: \Delta_*^{C^\infty}(M) \longrightarrow \Delta_*(M).$$

Aplicando el funtor contravariante $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{R})$, tenemos la aplicación de cadenas:

$$\iota^* : \text{Hom}(\Delta_*(M), \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Hom}(\Delta_*^{C^\infty}(M), \mathbb{R}),$$

que induce un homomorfismo en cohomología

$$\iota^* : H^*(M; \mathbb{R}) \longrightarrow H_{C^\infty}^*(M; \mathbb{R}).$$

Como ambas teorías satisfacen el lema de Poincaré, la aplicación ι es un isomorfismo para convexos geodésicos. Como cumple Mayer-Vietoris, aplicando el lema 1.11 obtenemos que ι es un isomorfismo para toda variedad M .

1.2 Acciones de grupos

En este apartado introducimos brevemente algunas nociones básicas relativas a acciones de grupos sobre variedades. No pretende ser una introducción exhaustiva; una exposición detallada se puede encontrar en [Bre1]. En esta memoria estudiaremos tan sólo acciones de \mathbb{S}^1 . No obstante, en lo que queda de capítulo presentaremos las nociones para grupos de Lie compactos cualesquiera G , al no suponer mayor esfuerzo.

1.2.1 Definiciones

Un *grupo de Lie* es una variedad diferenciable G con una estructura de grupo tal que la multiplicación del grupo $G \times G \longrightarrow G$ y la aplicación $g \mapsto g^{-1}$ de $G \longrightarrow G$ son diferenciables. Denotamos el elemento neutro por e .

Definición 1.12 Una *acción* de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\Phi : G \times M \longrightarrow M$ que cumpla las siguientes condiciones:

- i) $\Phi(g_1, \Phi(g_2, m)) = \Phi(g_1 \cdot g_2, m)$, para $g_1, g_2 \in G$, y $m \in M$;
- ii) $\Phi(e, m) = m$, para $m \in M$.

Si Φ es una acción diferenciable de G sobre M , diremos que M es una *G -variedad*. Para todo $g \in G$, tenemos la aplicación diferenciable

$$\Phi_g : M \longrightarrow M$$

dada por $\Phi_g(m) = \Phi(g, m)$. Por la propiedad ii) de la definición 1.12, tenemos que $\Phi_{g^{-1}}$ es una inversa a derecha e izquierda de Φ_g , por lo que Φ_g es un automorfismo de

M , es decir, un difeomorfismo de la variedad M en sí misma. Usaremos la notación $g(m)$ o $g \cdot m$ para denotar $\Phi(g, m)$, y g para denotar Φ_g .

Sea $m \in M$. Se prueba fácilmente que el subconjunto de G definido mediante

$$G_m = \{g \in G : g(m) = m\}$$

es un subgrupo de G . Se llama *subgrupo de isotropía* de m . El subconjunto de M definido por

$$G(m) = \{g(m) : g \in G\}$$

se llama *órbita* de m .

Diremos que dos puntos de M están relacionados si están en la misma órbita. Esta relación se demuestra fácilmente que es de equivalencia. Denotamos por M/G al espacio cociente, y por $\pi: M \rightarrow M/G$ a la aplicación cociente. El espacio M/G se llama *espacio de órbitas* (de hecho, sus elementos son las órbitas). Es importante destacar que el espacio de órbitas no tiene por qué ser una variedad diferenciable.

Terminamos esta introducción definiendo las acciones efectivas, libres y semilibres, que son la que centrarán nuestra atención.

Definición 1.13 Diremos que una acción $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es *efectiva* si el neutro es el único elemento de G que fija todos los puntos de M , es decir, si $g(m) = m$ para todo $m \in M$ implica que $g = e$.

Definición 1.14 Diremos que una acción $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es *libre* si $G_m = \{e\}$ para todo $m \in M$.

Si Φ es libre y G es compacto, dado un punto $m \in M$, se puede demostrar (ver, por ejemplo, [Die], pag.34) que la aplicación

$$\Phi_m: G \rightarrow M$$

es un embebimiento. Como la imagen es exactamente $G(m)$, tenemos que las órbitas son subvariedades cerradas de M .

Definición 1.15 Diremos que una acción $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es *semilibre* si los únicos subgrupos de isotropía son $\{e\}$ y G .

Si $m \in M$ es tal que $G_m = \{e\}$, diremos que m es un *punto libre*. Si $G_m = G$, diremos que m es un *punto fijo* para la acción.

1.2.2 Integral de Haar

Dada una variedad diferenciable orientable de dimensión n , está definida la integración de n -formas de soporte compacto a lo largo de la variedad. Como los grupos de Lie son todos paralelizables (y, por lo tanto, orientables), podemos integrar n -formas de soporte compacto.

Sea G un grupo de Lie de dimensión n , y sea e su elemento neutro. Podemos tomar una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $T_e G$, que podemos extender a campos $\{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ invariantes a izquierda. Sean $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ sus 1-formas duales, es decir, tales que $i_{X_i} \omega_j = \delta_i^j$, donde δ_i^j es la delta de Kronecker. Como son 1-formas invariantes a izquierda, podemos considerar la n -forma invariante a izquierda

$$\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Elegimos en G la orientación dada por los campos $\{X_1, \dots, X_n\}$, y notamos que todas las traslaciones a izquierda son difeomorfismos que preservan esta orientación. Si ahora $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable de soporte compacto, definimos

$$\int_G f dg = \int_G f \omega.$$

Si G es compacto, podemos normalizar la integral de manera que $\int_G 1 dg = 1$. Si denotamos por $L_h: G \rightarrow G$ la traslación a izquierda por el elemento $h \in G$, tenemos

$$\int_G f \circ L_h dg = \int_G f \circ L_h \omega = \int_G (L_{h^{-1}})^* \omega = \int_G f \omega = \int_G f dg$$

Esta integral invariante por la izquierda definida sobre funciones de G se conoce como *integral de Haar*. Es sencillo ver que la invarianza por la izquierda de la integral de Haar implica su invarianza por la derecha (ver, por ejemplo, [Bre2], pag. 306). En la práctica, trabajaremos con $G = \mathbb{S}^1$, que es abeliano, usaremos directamente que la integral de Haar es invariante.

Métrica invariante

Para toda variedad diferenciable paracompacta (las nuestras lo son) se puede definir una métrica riemanniana. El proceso habitual consiste en definir una métrica sobre cada entorno coordinado de una base cualquiera, y “pegar” con una partición de la unidad. Si $\Phi: G \times M \rightarrow M$ es una acción diferenciable, nos interesa que la métrica μ sea invariante para la acción, es decir, que para todo par de vectores $v_1, v_2 \in T_m M$ y todo $g \in G$, se tenga $\mu(v_1, v_2) = \mu(g_* v_1, g_* v_2)$.

Lema 1.16 Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción diferenciable, con G compacto. Entonces, M admite una métrica invariante para la acción de G .

Demostración: Sea una métrica μ cualquiera en M . Definimos una nueva métrica $\tilde{\mu}$ mediante:

$$\tilde{\mu}(v_1, v_2) = \int_G \mu(g_*v_1, g_*v_2) dg, \quad \text{para } v_1, v_2 \in T_m M,$$

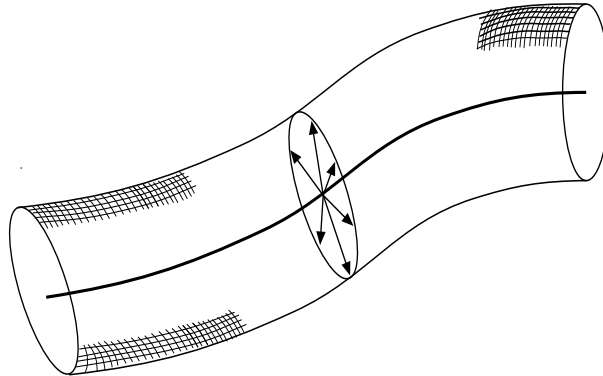
donde \int_G es la integral de Haar. Es definida positiva porque $\tilde{\mu}(v, v) = \int_G \mu(g_*v, g_*v) dg$, y el integrando es estrictamente positivo, salvo para $v = 0$. Finalmente, $\tilde{\mu}$ es invariante, pues

$$(h^*\tilde{\mu})(v_1, v_2) = \int_G \mu(g_*h_*v_1, g_*h_*v_2) dg = \int_G \mu(g_*v_1, g_*v_2) dg = \tilde{\mu}(v_1, v_2). \quad \blacksquare$$

Observación 1.17 Hemos utilizado de forma decisiva que el grupo G es compacto, pues en caso contrario, no hubieramos podido integrar.

1.2.3 Entornos tubulares

Sea M una variedad diferenciable y A una subvariedad cerrada. En esta sección veremos que A tiene un entorno W análogo a un “tubo macizo” alrededor de una curva en \mathbb{R}^3 .



Es más, si A es invariante con respecto a una acción diferenciable $\Phi: G \times M \rightarrow M$ con G compacto, podemos hacer que W sea invariante, y podremos representar tanto el entorno W como la acción en un fibrado vectorial de A .

Sea $\Phi: G \times M \rightarrow M$ una acción diferenciable, donde G es un grupo de Lie compacto. Sea A una subvariedad cerrada invariante de M . Fijaremos estas condiciones para el resto de este apartado.

Definición 1.18 Un G -fibrado vectorial diferenciable sobre la variedad diferenciable M es un fibrado vectorial diferenciable $(p, E, M, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$ junto con una acción diferenciable de G sobre el espacio total E que sea lineal en las fibras, y tal que la proyección $p: E \rightarrow M$ sea equivariante.

Ejemplo 1.19 El fibrado tangente $T(M)$ es un fibrado vectorial con espacio base M . Si consideramos en $T(M)$ la acción de G inducida por Φ , es decir, $g(v) = g_*v$ para todo $g \in G$ y $v \in T(M)$, es un G -fibrado vectorial diferenciable.

Podemos considerar $T(A)$ como un subfibrado de la restricción $T(M)|_A$. El fibrado cociente

$$N(A) = (T(M)|_A)/T(A)$$

es el *fibrado normal* de A en M , y tiene claramente estructura de G -fibrado sobre A . Si tomamos una métrica invariante en M , entonces $T(A)$ tiene un complementario ortogonal en $T(M)|_A$, que denotamos por $T(A)^\perp$, que es canónicamente isomorfo a $N(A)$.

Definición 1.20 Un *entorno tubular equivariante* de A en M es un G -fibrado vectorial diferenciable $(p, E, A, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$, junto con un embebimiento equivariante

$$\Psi: E \rightarrow M$$

tal que $\Psi(E)$ es un entorno invariante de A , y la restricción de Ψ a la 0-sección A de E es la inclusión de A en M .

Teorema 1.21 (Teorema del entorno tubular equivariante) *En las condiciones anteriores, A tiene un entorno tubular equivariante en M .*

Idea de la demostración: Tomamos una métrica invariante en M . La aplicación exponencial es equivariante, y existe un entorno invariante U de A en $N(A)$ tal que $\exp: U \rightarrow M$ es un embebimiento. Se construye a continuación una aplicación diferenciable equivariante $h: N(A) \rightarrow N(A)$, que lleva difeomórficamente $N(A)$ en U . La aplicación

$$\Psi = \exp \circ h: N(A) \rightarrow M$$

es un entorno tubular equivariante de A en M (ver [Bre1]) para los detalles. ■

Capítulo 2

Sucesión de Gysin. El caso libre

Sea $p: E \rightarrow B$ un fibrado vectorial. Mediante una reducción de grupo estructural, podemos considerar que la fibra es \mathbb{S}^k . Utilizando métodos de Topología Algebraica, se obtiene la *sucesión de Gysin*, que relaciona la cohomología singular de la base con la del espacio total. La sucesión se escribe:

$$\dots \rightarrow H^q(B) \xrightarrow{p^*} H^q(E) \xrightarrow{\varepsilon} H^{q-k}(B) \xrightarrow{\int} H^{q+1}(B) \rightarrow \dots, \quad (2.1)$$

donde \int es la integración a lo largo de las fibras, y e es, salvo signo, el producto por la clase de Euler (para una exposición detallada, ver [BoTu] o [Die]). Sea ahora una acción diferenciable libre de \mathbb{S}^1 sobre la variedad diferenciable M . Denotamos por $\pi: M \rightarrow B$ la proyección sobre el espacio de órbitas, que es un fibrado de fibra \mathbb{S}^1 , así que estamos en el caso anterior con $k = 1$. Nuestro objetivo en este capítulo es reconstruir la sucesión de Gysin en esta situación con métodos de Geometría Diferencial, es decir, usando formas diferenciales.

La estrategia será como sigue: en el apartado 2.1 describimos la estructura local de la acción. Hemos de relacionar las formas de B con las de M , y para este propósito el complejo de de Rham es “demasiado grande”. Tendremos que trabajar con otra cohomología que se adapte mejor al marco de una acción y que nos siga proporcionando la de de Rham: la cohomología invariante. Será desarrollada en el apartado 2.2. En el apartado 2.4 presentamos el campo fundamental, que nos va a permitir (apartado 2.5) descomponer las formas invariantes de M en función de las de B , y obtener la sucesión de Gysin. Como aplicación, en el apartado 2.6, calcularemos la cohomología del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

2.1 Estructura local de la acción

A lo largo de todo el capítulo trabajaremos con una acción

$$\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M,$$

que será libre y diferenciable, salvo que indiquemos explícitamente lo contrario.

Sea $m \in M$. Según vimos en el apartado 1.2.1, la órbita

$$\mathbb{S}^1(m) = \{g(m) : g \in \mathbb{S}^1\}$$

es una subvariedad cerrada invariante de M . Por el teorema del entorno tubular equi- variante (teorema 1.21), tenemos que

$$\Psi: N(\mathbb{S}^1(m)) \longrightarrow M$$

es un embebimiento equivariante. El carácter libre de la acción nos va a permitir dar a $N(\mathbb{S}^1(m))$ una forma más manejable. Denotamos la fibra de $N(\mathbb{S}^1(m))$ en m por

$$V_m = T_m(M)/T_m(\mathbb{S}^1(m)),$$

que es difeomorfa a \mathbb{R}^n ; en particular, V_m es contráctil. Tenemos que $\mathbb{S}^1 \times V_m$ es un \mathbb{S}^1 -fibrado vectorial diferenciable de $\mathbb{S}^1(m)$, donde la acción en $\mathbb{S}^1 \times V_m$ es

$$g \cdot (g_1, v) = (gg_1, v) \quad \text{para } g, g_1 \in \mathbb{S}^1, v \in V_m.$$

Afirmamos a continuación que la siguiente aplicación diferenciable es un isomorfismo equivariante de fibrados:

$$\begin{aligned} \Upsilon: \mathbb{S}^1 \times V_m &\longrightarrow N(\mathbb{S}^1(m)) \\ (g, v) &\longmapsto g_*v \end{aligned}$$

En efecto, sea $w \in N(\mathbb{S}^1(m))$, y sea $g(m)$ su punto base. Notamos que como la acción es libre, g está determinado de forma unívoca. Asignamos a w el elemento $(g, (g_*)^{-1}w) \in \mathbb{S}^1 \times V_m$. Es inmediato comprobar que esta asignación es una inversa equivariante para Υ . Hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 2.1 (Teorema de la loncha diferenciable) *En las condiciones anteriores, para todo punto $m \in M$ existe un entorno invariante W de m y un embebimiento equivariante sobre W*

$$\Xi: \mathbb{S}^1 \times V_m \longrightarrow M$$

Observación 2.2 El teorema 2.1 fue probado por primera vez por A.M. Gleason para una acción libre de un grupo compacto G , no necesariamente de Lie. La versión diferenciable en el caso de una acción cualquiera se debe a J. Koszul. En este caso, cada entorno de $m \in M$ es difeomorfo al producto cruzado $G \times_{G_x} V$, donde G_x es el subgrupo de isotropía de x (ver, por ejemplo, [Bre1]).

La existencia de estos entornos induce de manera natural una estructura diferenciable en el espacio de órbitas B (tomamos $\pi(\Xi(\mathbb{S}^1) \times V_m) \approx V_m$ como entorno coordinado de $\pi(m) \in B$). Notamos que la proyección sobre el espacio de órbitas π es un \mathbb{S}^1 -fibrado localmente trivial. Más aún, como en cada trivialización $\mathbb{S}^1 \times V$ la acción está dada por la multiplicación en el primer factor, π define un fibrado principal. Estos resultados se mantienen para una acción libre de un grupo de Lie compacto G cualquiera.

Corolario 2.3 *En las condiciones anteriores, el espacio de órbitas B es una variedad diferenciable, y la proyección $\pi: M \rightarrow B$ es un fibrado principal de fibra \mathbb{S}^1 .*

2.2 Cohomología invariante

En esta sección presentamos la cohomología invariante asociada a una acción de \mathbb{S}^1 , y probamos que es isomorfa a la de de Rham. Se puede definir igualmente para una acción diferenciable de un grupo de Lie G cualquiera, y en el caso de que sea compacto, también la cohomología es equivalente a la de de Rham (ver, por ejemplo, [Bre2], pag.307). Sin embargo, como vamos a trabajar con acciones de \mathbb{S}^1 , haremos el desarrollo para este caso particular.

2.2.1 Definiciones

Definición 2.4 Una forma $\omega \in \Omega(M)$ es Φ -invariante si para todo elemento $g \in \mathbb{S}^1$ se cumple $g^*\omega = \omega$. Cuando esté claro a qué acción nos referimos, diremos simplemente que ω es *invariante*.

Como la forma nula es invariante trivialmente y las aplicaciones g^* son lineales, el conjunto $I\Omega^p(M) = \{p\text{-formas invariantes}\}$ es un subespacio vectorial de $\Omega^p(M)$. Denotamos por $I\Omega^*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} I\Omega^p(M)$ al complejo de las formas invariantes.

Lema 2.5 $(I\Omega^*(M), \wedge, d)$ es un álgebra diferencial graduada.

Demostración: El producto exterior \wedge está bien definido, pues si ω y η son invariantes, entonces

$$g^*(\omega \wedge \eta) = g^*\omega \wedge g^*\eta = \omega \wedge \eta.$$

La diferencial exterior también está bien definida, pues si $\omega \in I\Omega^*(M)$, entonces $g^*d\omega = dg^*\omega = d\omega$. ■

Como la diferencial exterior es de orden 2, podemos definir los grupos de cohomología invariante.

Definición 2.6 El p -ésimo grupo de cohomología invariante de M es el espacio vectorial

$$IH^p(M) = \frac{\ker(d : I\Omega^p(M) \rightarrow I\Omega^{p+1}(M))}{\text{im}(d : I\Omega^{p-1}(M) \rightarrow I\Omega^p(M))}$$

Ejemplo 2.7 Ilustremos esta definición con un cálculo concreto. Sea la acción de \mathbb{S}^1 sobre sí mismo mediante la multiplicación ordinaria de números complejos. Notamos que la órbita de un punto cualquiera es todo \mathbb{S}^1 . Por un argumento de dimensión, sólo tenemos formas no nulas en los grados 0 y 1.

Si $f \in I\Omega^0(\mathbb{S}^1)$, f tiene que ser constante a lo largo de las órbitas, es decir, que toda función invariante es una función constante, y tenemos $I\Omega^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Sea ahora ω una 1-forma invariante. Vamos a expresarla en coordenadas locales. Tomamos la carta

$$y: \mathbb{S}^1 - \{1\} = \{e^{it} : 0 < t < 2\pi\} \longrightarrow (0, 2\pi)$$

dada por $y(e^{it}) = t$. Tenemos que $\omega|_{\mathbb{S}^1 - \{1\}} = f(y)dy$. Sea $g = e^{is}$. Multiplicar por g se escribe en coordenadas de la carta y , como $t \mapsto s + t$, así que

$$g^*(dt) = d(t \circ g) = d\{t \mapsto s + t\} = dt.$$

Con lo cual, si ahora tomamos $z \in \mathbb{S}^1$, como ω es invariante, tenemos

$$f(z)dy = g^*(f dy)|_{g \cdot z} = f(g \cdot z)g^*dt = f(g \cdot z)dy$$

y f ha de tomar valor constante C en \mathbb{S}^1 .

Hemos construido pues una aplicación $\Gamma: I\Omega^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde asociamos a la forma ω la constante C obtenida según el procedimiento anterior (que, obviamente, depende de la carta y que hemos elegido). Notamos que Γ es inyectiva, pues si tenemos dos formas globales que coinciden en un denso, son iguales. Para ver que es sobreyectiva, basta comprobar que dada una constante $C \in \mathbb{R}$, la 1-forma Cdy se puede definir globalmente. Para ello, definimos ω en una carta que cubra a 1. Por ejemplo,

$$x: \mathbb{S}^1 - \{-1\} = \{e^{it} : -\pi < t < \pi\} \longrightarrow (-\pi, \pi)$$

dada por $x(e^{it}) = t$. Como el cambio de cartas es $x = y$ ó $y + \pi$, entonces Cdx y Cdy coinciden en $\mathbb{S}^1 - \{1, -1\}$ y definen una forma globalmente.

En definitiva, $I\Omega^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$, y el complejo invariante queda:

$$I\Omega^p(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

Observamos que todas las formas son cerradas, y por tanto, ninguna es exacta. De esta manera, la cohomología invariante de \mathbb{S}^1 es la misma que la de de Rham.

$$IH^p(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, 1 \\ 0 & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

Observación 2.8 Ya hemos comentado al principio de la sección que se puede definir la cohomología invariante para una acción diferenciable de un grupo de Lie cualquiera. En el ejemplo anterior, hemos visto que la cohomología es la de de Rham. Sin embargo, si el grupo no es compacto, no tiene por qué pasar eso. Por ejemplo, si tomamos la acción de \mathbb{R} sobre sí mismo dada por la suma ordinaria, se prueba de modo similar al anterior que los grupos de cohomología invariante son isomorfos a \mathbb{R} en los grados 0 y 1, luego \mathbb{R} no es acíclico con esta cohomología.

2.2.2 Carácter funtorial

Podemos considerar $I\Omega^*$ como un funtor donde la categoría de llegada es la de las álgebras graduadas. Estará definido en la categoría donde los objetos son \mathbb{S}^1 -variedades, es decir, variedades diferenciables sobre las que \mathbb{S}^1 actúa diferenciablemente, y los morfismos, las aplicaciones equivariantes, que pasamos a definir:

Definición 2.9 Una aplicación $f: M \rightarrow N$ diferenciable entre \mathbb{S}^1 -variedades se dice que es *equivariante* si para todo $g \in \mathbb{S}^1$ se tiene $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$.

Notamos que si $f: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable equivariante, el pull-back f^* transforma formas invariantes de N en formas invariantes de M . En efecto, si $\omega \in I\Omega^*(N)$ y $g \in \mathbb{S}^1$, tenemos $g^*f^*\omega = f^*g^*\omega = f^*\omega$. Por lo tanto, $f^*: I\Omega^*(N) \rightarrow I\Omega^*(M)$ está bien definida.

2.2.3 Lema de Poincaré en cohomología invariante

El lema de Poincaré en cohomología invariante viene a decirnos que si tenemos una “parte” contráctil, en la cual \mathbb{S}^1 actúa trivialmente, entonces podemos prescindir de ella para calcular la cohomología invariante. Lo único que hay que hacer es adaptar la proposición 1.2. Si Φ es una acción de \mathbb{S}^1 sobre M , llamamos *acción inducida* a la acción $\bar{\Phi}: \mathbb{S}^1 \times (M \times \mathbb{R}) \rightarrow M \times \mathbb{R}$ dada por $\bar{\Phi}(m, t) = (\Phi(m), t)$.

Proposición 2.10 (Lema de Poincaré para cohomología invariante) *En las condiciones anteriores, sea $p_M: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la proyección sobre M y tomamos la acción inducida en $M \times \mathbb{R}$. Entonces, tenemos el isomorfismo $IH^*(M) \xrightarrow{p_M^*} IH^*(M \times \mathbb{R})$.*

Demostración: Vale la misma prueba que para la proposición 1.2, sin más que notar:

- i) las aplicaciones p_M y s son ambas trivialmente equivariantes,
- ii) el operador homotopía K , transforma formas invariantes en formas invariantes.

Para ver ii), usaremos (ver [GHV]) que si $g: M \rightarrow M$ es una aplicación diferenciable y $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una familia diferenciable de formas diferenciables de M , entonces

$$g^* \int_a^b \beta_t dt = \int_a^b g^* \beta_t dt \quad \text{dados } a, b \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, g^* y K conmutan para todo $g \in \mathbb{S}^1$. Más aún, si $\omega \in \Omega^p(M)$, tenemos

$$g^*(K\omega) = K(g^*\omega) = K\omega,$$

y se cumple la fórmula $1 - p_M^* \circ s^* = \pm(Kd - dK)$, cuyo segundo miembro lleva ciclos invariantes en bordes invariantes, y por lo tanto, induce el homomorfismo nulo en cohomología. ■

Corolario 2.11 (Axioma de homotopía para la cohomología invariante)

Sean las \mathbb{S}^1 -variedades M y N , y sean $f, g: M \rightarrow N$ aplicaciones diferenciables equivariantes. Si existe una homotopía diferenciable equivariante $F: M \times \mathbb{R} \rightarrow N$, entonces, $f^ = g^*$ en cohomología.*

Corolario 2.12 *Si M es una \mathbb{S}^1 -variedad, V una variedad contráctil y consideramos en $M \times V$ la acción inducida en el mismo sentido que en la proposición 2.10, tenemos el isomorfismo $IH^*(M) \xrightarrow{p_M^*} IH^*(M \times V)$.*

2.2.4 Sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología invariante

Sea M una \mathbb{S}^1 -variedad y U y V abiertos invariantes que cubren M . Entonces, $U \cap V$ es también un abierto invariante, y tiene sentido hablar de su cohomología invariante. Como las inclusiones son claramente equivariantes, tenemos la sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología invariante:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I\Omega^*(M) & \longrightarrow & I\Omega^*(U) \oplus I\Omega^*(V) & \longrightarrow & I\Omega^*(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\sigma, \tau) & \longmapsto & \tau|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} & & (2.2) \\ & & \omega & \longmapsto & (\omega|_U, \omega|_V) & & & & \end{array}$$

Proposición 2.13 *La sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología invariante (2.2) es exacta.*

Demostración: Si observamos la demostración del caso no invariante (proposición 1.5), para que sea válida en este caso, tan sólo necesitamos que la partición de la unidad $\{\rho_U, \rho_V\}$ sea invariante, para asegurar que las formas $\rho_V\omega$ y $\rho_U\omega$ lo sean. La prueba, pues, se reduce a construir una partición de la unidad invariante subordinada a $\{U, V\}$.

Sea $\{\rho_U, \rho_V\}$ una partición de la unidad cualquiera subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$. Definimos

$$\tilde{\rho}_U(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_U(g(x))dg \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_V(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_V(g(x))dg,$$

donde $\int_{\mathbb{S}^1}$ denota la integral de Haar (ver el apartado 1.2.2). Veamos que $\{\tilde{\rho}_U, \tilde{\rho}_V\}$ es una partición de la unidad subordinada a U y V .

En efecto, si $h \in \mathbb{S}^1$, aplicando la invarianza de la integral de Haar, tenemos

$$\tilde{\rho}_U(h(x)) = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_U(g \cdot h(x))dg = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_U(g(x))dg = \tilde{\rho}_U(x),$$

luego $\tilde{\rho}_U$ es invariante, y lo mismo para $\tilde{\rho}_V$. Además, para todo $x \in M$, se cumple

$$\tilde{\rho}_U(x) + \tilde{\rho}_V(x) = \int_{\mathbb{S}^1} (\rho_U(g(x)) + \rho_V(g(x)))dg = \int_{\mathbb{S}^1} dg = 1.$$

Para terminar, como U y V son invariantes, tenemos

$$\text{sop } \tilde{\rho}_U \subseteq \mathbb{S}^1(\text{sop } \rho_U) \subseteq U \quad \text{y} \quad \text{sop } \tilde{\rho}_V \subseteq \mathbb{S}^1(\text{sop } \rho_V) \subseteq V.$$

Así que existen particiones de la unidad invariantes, y se cumple Mayer-Vietoris para la cohomología invariante. ■

2.2.5 Cuasiisomorfismo

Hemos visto que en el ejemplo 2.7 la cohomología de de Rham y la invariante coinciden. En esta sección probaremos que el complejo invariante y el de de Rham tienen grupos de cohomología isomorfos.

Definición 2.14 Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} complejos diferenciales, y sea $\iota: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ una aplicación de cadenas. Se dice que ι es un *cuasiisomorfismo* si induce isomorfismos en los grupos de cohomología.

En la demostración del teorema de de Rham (teorema 1.7), lo que hacíamos era definir un cuasiisomorfismo, que era la integración de simplices. También usábamos el lema de Poincaré, Mayer-Vietoris, y el método de Bredon. Aquí seguiremos un camino paralelo, utilizando dichas propiedades y la estructura local de la acción.

Tenemos la inclusión natural de las formas invariantes en las de de Rham,

$$\iota: I\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

Observación 2.15 En el caso del ejemplo 2.7, la inclusión $\iota: I\Omega^*(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \Omega^*(\mathbb{S}^1)$ es claramente un cuasiisomorfismo, pues a nivel de cohomología, las generadoras de $H^0(\mathbb{S}^1)$ son las funciones constantes; y las 1-formas cerradas invariantes que construimos en el ejemplo 2.7 también generan $H^1(\mathbb{S}^1)$, pues tampoco son exactas en el sentido de de Rham (esta observación es importante, pues las únicas funciones invariantes eran las constantes): en efecto, si tenemos una 1-forma que en la carta y se escribe Cdy y f es una función sobre \mathbb{S}^1 tal que $df = Cdy$, se deduce que en $\mathbb{S}^1 - \{1\}$, la función es de la forma $Cy + A$, donde A y C son constantes, lo cual es imposible por continuidad.

Teorema 2.16 (Teorema de de Rham para cohomología invariante)

Sea M una \mathbb{S}^1 -variedad. Entonces, la inclusión $\iota: I\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$ es un cuasiisomorfismo.

Demostración: Vamos a aplicar el método de Bredon (lema 1.11). Comenzamos construyendo un cubrimiento adecuado.

Recordamos que la proyección sobre el espacio de órbitas $\pi: M \longrightarrow B$ es abierta. Tomamos, para cada $m \in M$, un entorno tubular equivariante \tilde{U}_m , y consideramos su proyección $\pi(\tilde{U}_m) = U_m \subseteq B$, que es un entorno de $\pi(m)$. Como B es una variedad diferenciable paracompacta, podemos tomar una métrica y una base de entornos convexos geodésicos subordinada al cubrimiento $\{U_m\}_{m \in M}$. Como la intersección finita de convexos geodésicos es otro convexo geodésico, el cubrimiento \mathcal{U} formado por las intersecciones finitas de los $\{U_m\}_{m \in M}$ es un cubrimiento de abiertos contráctiles que cumple las hipótesis del lema 1.11. Por comodidad, denotaremos $\pi^{-1}(U)$ por \tilde{U} .

Definimos ahora, para cada abierto $U \subseteq B$, la propiedad

$$P(U) = \text{“}\iota: IH^*(\tilde{U}) \longrightarrow H^*(\tilde{U}) \text{ es un isomorfismo”}$$

Veamos que se cumplen las hipótesis del lema 1.11 (método de Bredon):

i) Si $U \in \mathcal{U}$, entonces se cumple $P(U)$.

En efecto: los abiertos \tilde{U} son difeomorfos a $\mathbb{S}^1 \times U$, con U contráctil. Por la estructura local (ver apartado 2.1), la acción en $\mathbb{S}^1 \times U$ consiste en multiplicar en la componente \mathbb{S}^1 , así que tenemos las aplicaciones equivariantes:

$$\tilde{U} \xleftarrow{\Psi} \mathbb{S}^1 \times V \xleftarrow{s} \mathbb{S}^1$$

donde s es una sección cualquiera. Aplicando los funtores contravariantes H^* e IH^* , tenemos el siguiente diagrama de grupos:

$$\begin{array}{ccccc} H^*(\tilde{U}) & \xrightarrow{\psi^*} & H^*(\mathbb{S}^1 \times V) & \xrightarrow{s^*} & H^*(\mathbb{S}^1) \\ \uparrow \iota & & & & \uparrow \iota \\ IH^*(\tilde{U}) & \xrightarrow{\psi^*} & IH^*(\mathbb{S}^1 \times V) & \xrightarrow{s^*} & IH^*(\mathbb{S}^1) \end{array}$$

que es conmutativo porque a nivel de complejos lo es trivialmente. Aplicando que Ψ es difeomorfismo y el corolario 2.12, tenemos que las flechas horizontales son isomorfismos. Por la observación 2.15, se deduce que la flecha vertical de la derecha es un isomorfismo. Por lo tanto, también la de la izquierda lo es, es decir, se cumple $P(U)$.

ii) Si se cumplen $P(U)$, $P(V)$ y $P(U \cap V)$, entonces se cumple $P(U \cup V)$.

En efecto: aplicando la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris en ambas cohomologías a $\tilde{U} \cup \tilde{V}$, tenemos para cada $p \geq 0$ el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{p-1}(\tilde{U}) \oplus H^{p-1}(\tilde{V}) & \longrightarrow & H^{p-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U} \cup \tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U}) \oplus H^p(\tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U} \cap \tilde{V}) \\ \uparrow \iota_1 & & \uparrow \iota_2 & & \uparrow \iota_3 & & \uparrow \iota_4 & & \uparrow \iota_5 \\ H^{p-1}(\tilde{U}) \oplus H^{p-1}(\tilde{V}) & \longrightarrow & H^{p-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U} \cup \tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U}) \oplus H^p(\tilde{V}) & \longrightarrow & H^p(\tilde{U} \cap \tilde{V}), \end{array}$$

donde las flechas verticales están inducidas por la inclusión ι . Como ι conmuta con los pullbacks de las inclusiones, el diagrama anterior es conmutativo. Por hipótesis, $\iota_1, \iota_2, \iota_4$ y ι_5 son isomorfismos. Como las filas son exactas, aplicando el lema de los cinco, tenemos que ι_3 también lo es.

iii) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una familia disjunta, y $P(U_\alpha)$ es cierta para todo $\alpha \in A$, entonces también $P(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ es cierta.

Es obvio, pues la inclusión $\iota: I\Omega^*(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \longrightarrow \Omega^*(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ la podemos escribir como $\iota = (\iota_\alpha)_{\alpha \in A}$, donde $\iota_\alpha: I\Omega^*(U_\alpha) \longrightarrow \Omega^*(U_\alpha)$. Como por hipótesis cada ι_α es un cuasiisomorfismo, se sigue que ι también lo es.

Así, estamos en las hipótesis del lema 1.11, por lo que se cumple $P(B)$, que es el enunciado del teorema. ■

Observación 2.17 Este resultado es cierto si en vez de \mathbb{S}^1 actúa un grupo de Lie compacto G cualquiera (ver, por ejemplo, [GHV] vol. II, pag. 151). En la demostración, se construye una flecha $\nu: \Omega^*(M) \longrightarrow I\Omega^*(M)$ definida por $\nu(\omega) = \int_{\mathbb{S}^1} g^* \omega dg$ y un operador homotopía para ver que $\nu \circ \iota$ induce la identidad en cohomología. La prueba que hemos desarrollado aquí es más larga, pero refleja mejor la estructura local.

2.3 Formas básicas

Sea M una \mathbb{S}^1 -variedad y $\pi: M \rightarrow B$ la proyección sobre el espacio de órbitas. La sucesión de Gysin relaciona la cohomología de M con la de B . En este apartado, estudiamos las formas de B , que se pueden interpretar como formas de M . Usaremos que, como hemos visto en el apartado 2.1, al ser la acción libre, $(\pi, M, B, \mathbb{S}^1)$ es un fibrado localmente trivial.

Definición 2.18 Una forma $\omega \in \Omega^*(M)$ se dice que es *básica*, si existe una forma $\omega_B \in \Omega^*(B)$ tal que $\omega = \pi^*\omega_B$, es decir, el conjunto de las formas básicas es $\text{Im } \pi^*$.

Lema 2.19 La aplicación $\pi^*: \Omega^*(B) \rightarrow \Omega^*(M)$ es inyectiva, e $\text{Im } \pi^* \subseteq I\Omega^*(M)$.

Demostración: Sea $m \in M$ y $\omega \in \Omega^q(B)$ tal que $\pi^*\omega = 0$ y sean v_1, \dots, v_q vectores de $T_m(M)$. Entonces,

$$0 = \pi^*\omega_m(v_1, \dots, v_q) = \omega_{\pi(m)}(\pi_*v_1, \dots, \pi_*v_q).$$

Como π_* es sobreyectiva, tenemos que $\omega = 0$, luego hemos probado que π^* es inyectiva. Como además $\pi \circ g = \pi$ para todo $g \in \mathbb{S}^1$, si ω es una forma de B , tenemos:

$$g^*\pi^*\omega = \pi^*\omega \quad \text{para } g \in \mathbb{S}^1.$$

Así que $\Omega^*(B) \cong \text{Im } \pi^* \subseteq I\Omega^*(M)$. ■

Caracterizamos a continuación las formas básicas.

Proposición 2.20 En las condiciones del lema precedente, tenemos la caracterización

$$\begin{aligned} \text{Im } \pi^* = \bigoplus_{p=0}^n \{ \eta \in \Omega^p(M) : \eta(v, v_2, \dots, v_p) = d\eta(v, v_2, \dots, v_{p+1}) = 0, \\ \forall v \in \ker \pi_*, \forall v_i \in T(M) \} \end{aligned}$$

Demostración: \subseteq) es inmediata, pues si $\omega \in \Omega^q(M)$ y $v \in \ker \pi_*$,

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(v, v_2, \dots, v_q) &= \omega(0, \pi_*v_2, \dots, v_q) = 0 \\ (d(\pi^*\omega))(v, v_2, \dots, v_{q+1}) &= (\pi^*d\omega)(v, v_2, \dots, v_{q+1}) = d\omega(0, \pi_*v_2, \dots, v_{q+1}) = 0 \end{aligned}$$

\supseteq) Sea $\eta \in \Omega^p(M)$, con las dos propiedades del enunciado. Hemos de encontrar una forma $\gamma \in \Omega^p(B)$ tal que $\pi^*\gamma = \eta$. Sea V_m un entorno conexo trivializante de $\pi(M) \in B$, y (V_m, Ψ_m) una trivialización (ver apartado 2.1). Tenemos entonces un difeomorfismo $\Psi_m: V_m \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \pi^{-1}(V_m)$, y $\Psi_m^*\eta$ es una p -forma de $V_m \times \mathbb{S}^1$. Además,

expresada en coordenadas locales, $\Psi_m^* \eta$ es combinación lineal de monomios de la forma $f(x, g) dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, donde $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ son coordenadas de V , y g de \mathbb{S}^1 .

En efecto: tomamos las coordenadas locales (x_1, \dots, x_n, g) de $V_m \times \mathbb{S}^1$, y sea un monomio $f(x, g) dx_{i_1} \dots dx_{i_{p-1}} dg$ de la expresión de $\Psi_m^* \eta$ en la carta (el único con $dx_{i_1} \dots dx_{i_{p-1}} dg$). Supongamos que hay un punto $m_0 = (x_0, g_0)$ tal que $f(m_0) \neq 0$. Ahora evaluamos $\Psi^* \eta$ en los vectores

$$(v_1, \dots, v_p) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial g} \right) \Big|_{m_0}, \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right) \Big|_{m_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{p-1}}} \right) \Big|_{m_0} \right).$$

El único monomio que no se anula es el anterior, y en él, el único término que no se cancela es $\pm f(x_0, g_0) \neq 0$. Por otro lado, tenemos $\pi_* \Psi_* v_1 = p_{V_*} v_1 = 0$, donde $p_V: V_m \times \mathbb{S}^1 \rightarrow V_m$ es la proyección, y por lo tanto,

$$\Psi^* \eta(v_1, \dots, v_p) = \eta(\Psi_* v_1, \dots, \Psi_* v_p) = 0,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, la afirmación de arriba es cierta, y η es localmente combinación lineal de monomios de la forma $f(x, g) dx_{i_1}, \dots, dx_{i_p}$. Más aún, esas funciones f son constantes en la coordenada g , pues si diferenciamos y evaluamos en $\left(\frac{\partial}{\partial g} \right)$, obtenemos $\frac{\partial f(x, g)}{\partial g} = 0$, y la conexión de V_m completa el argumento.

Podemos definir entonces $\gamma|_{V_m}$ como $f(x) dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, y es posible hacer lo mismo con un cubrimiento de abiertos trivializantes de B , describiendo γ localmente. Notamos que en las intersecciones, γ está bien definida por estarlo η , y que se cumple $\pi^* \gamma = \eta$, pues no depende de las coordenadas de \mathbb{S}^1 . ■

Observación 2.21 La proposición anterior es cierta para un fibrado localmente trivial cualquiera, de fibra F . Para adaptar la prueba, hay que evaluar en todos los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial f_i} \right) \Big|_m$.

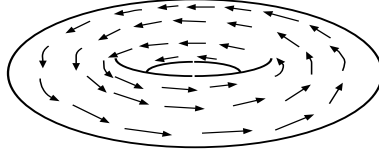
Las formas básicas son formas “puramente horizontales”, levantadas de la base B . Los vectores de $\ker \pi_*$ son vectores “verticales” de M . La primera condición de la caracterización nos dice que las formas básicas sólo “detectan” vectores horizontales, y la segunda condición, que no hay peso alguno por parte de la fibra a la hora de localizar los vectores horizontales.

2.4 Actores que intervienen en la sucesión de Gysin

En esta sección, presentamos los actores que nos permitirán descomponer las formas invariantes de M para obtener la sucesión de Gysin, a saber, el campo fundamental de la acción, la forma fundamental y la forma de Euler.

2.4.1 El campo fundamental

Podemos imaginarnos una acción diferenciable Φ de \mathbb{S}^1 sobre M como un modo de “rellenar” M con circunferencias de una “buena” manera.



El campo fundamental es la velocidad de esas órbitas. Si la acción es libre, todos los puntos se “mueven”. Eso significa que el campo fundamental no se anula. Más explícitamente, dado $m \in M$, tenemos la aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Phi_m : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g(m) \end{aligned}$$

Si la acción es libre, Φ_m es el embebimiento que identifica \mathbb{S}^1 con la órbita de m . Sea ahora la carta $t : \mathbb{S}^1 - \{-1\} = \{e^{it} : -\pi < t < \pi\} \longrightarrow (-\pi, \pi)$ dada por $e^{it} \mapsto t$. Tenemos el vector $(\frac{d}{dt})|_1 \in T_1\mathbb{S}^1$. Definimos el *campo fundamental* $X \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$X_m = (\Phi_m)_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_1 \in T_m M \quad (2.3)$$

La acción de X sobre funciones diferenciables $f \in C^\infty(M)$ es como sigue:

$$X_m(f) = (\Phi_m)_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_1 f = \frac{d}{dt} \Big|_1 (g \mapsto f(g(m)))$$

Lema 2.22 *El campo fundamental es invariante.*

Demostración: Sea $g \in \mathbb{S}^1$ y $m \in M$. Hay que probar que $g_* X_m = X_{g(m)}$. Aplicando el cálculo anterior,

$$\begin{aligned} X_{g(m)} f &= \frac{d}{dt} \Big|_1 (g_1 \mapsto f(g_1 g(m))) \\ g_*(X_m) f &= X_m(f \circ g) = \frac{d}{dt} \Big|_1 (g_1 \mapsto f(g g_1(m))) \end{aligned}$$

Como \mathbb{S}^1 es abeliano, tenemos el lema. ■

Lema 2.23 *Sea $m \in M$. Entonces, X_m es base de $\ker \pi_{*m}$.*

Demostración: Primero vemos que $X_m \in \ker \pi_{*m}$. Sea $f \in C^\infty(B)$. Entonces,

$$\pi_{*m}(X_m)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_1 (g \mapsto f(\pi(g(m)))) = 0,$$

pues $f(\pi(g(m))) = f(\pi(m))$, que es constante. Como $\dim B = \dim M - 1$, y π_* es suprayectiva, $\dim(\ker \pi_*) = 1$, y el núcleo está generado por X_m . ■

Si Y es un campo vectorial sobre M , denotamos por $i_Y: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$ el operador contracción usual. De la proposición 2.20 y el lema 2.23, deducimos una nueva caracterización de las formas básicas:

Proposición 2.24 *En las condiciones anteriores,*

$$\text{Im } \pi^* = \{\omega \in \Omega^*(M) \mid i_X \omega = 0, i_X d\omega = 0\}$$

2.4.2 Forma fundamental y forma de Euler

Sea X el campo fundamental de una acción libre, y μ una métrica invariante (ver el apartado 1.16). El carácter libre implica que X no se anula en ningún punto y que, por lo tanto, podemos normalizar la métrica μ . Así, podemos suponer que $\mu(X, X) = 1$. Definimos la *forma fundamental* $\chi \in \Omega^1(M)$ como la 1-forma dual de X , es decir,

$$\chi_m(v) = \mu(X_m, v) \quad v \in T_m M$$

La forma fundamental χ es invariante, pues si $v \in T_m M$, tenemos

$$(g^* \chi)_m(v) = \mu(X_{gm}, g_* v) = \mu(g_* X_m, g_* v) = \mu(X_m, v) = \chi_m(v).$$

Denotamos ahora por $L_Y: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ la derivada de Lie en la dirección del campo Y . Recordamos que la derivada de Lie es un operador de grado cero, y que cumple la relación $L_Y \omega = i_Y d\omega + di_Y \omega$. Es también un hecho conocido de Geometría Diferencial que si M es una \mathbb{S}^1 -variedad y X es el campo fundamental, entonces se tiene la siguiente caracterización de las formas invariantes (para una demostración, ver [GHV], vol.II, página 126):

$$I\Omega^*(M) = \{\omega \in \Omega^*(M) : L_X \omega = 0\}$$

De hecho, a veces es ésta la definición de formas invariantes. Gracias a esta caracterización y al importante hecho de que $\chi(X) = 1$, deducimos que la diferencial de la forma fundamental χ es una forma básica. En efecto, basta comprobar que cumple las dos condiciones de la proposición 2.24. Como $i_X \chi = 1$, tenemos $0 = d(i_X \chi) = L_X \chi - i_X d\chi$, de donde $i_X d\chi = 0$. Como la otra condición se cumple trivialmente, deducimos que $d\chi$ es básica.

Definición 2.25 Sea M una \mathbb{S}^1 -acción, y χ la forma fundamental asociada a la métrica invariante μ . Llamamos *forma de Euler* (asociada a μ) a la forma $\epsilon \in \Omega^2(B)$ que cumple $\pi^*\epsilon = d\chi$.

Tanto la forma fundamental como la forma de Euler dependen en un principio de la métrica invariante μ que hayamos escogido. A la luz de la sucesión de Gysin, veremos que la clase de la forma de Euler es independiente de la métrica.

2.5 Sucesión de Gysin

En esta sección presentamos los resultados centrales de este capítulo. En las condiciones del apartado 2.1, sea X el campo fundamental, tomamos una métrica invariante μ , y denotamos por χ la forma fundamental asociada. La sucesión de Gysin se deduce de la siguiente proposición, que nos permite descomponer las formas invariantes de M en función de las de B .

Teorema 2.26 *En las condiciones anteriores, toda forma invariante de M se puede escribir de manera única como $\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma$, de donde tenemos el isomorfismo diferencial*

$$(I\Omega^*(M), d) \cong (\Omega^*(B) \oplus \Omega^{*-1}(B), D),$$

donde $D(\alpha, \gamma) = (d\alpha + \gamma \wedge \epsilon, -d\gamma)$.

Demostración: Sea $\omega \in I\Omega^*(M)$. Entonces, sumando y restando $\chi \wedge i_X\omega$, tenemos

$$\omega = \chi \wedge (i_X\omega) + (\omega - \chi \wedge i_X\omega).$$

Veamos que ambos paréntesis son formas básicas:

i) $i_X\omega$ es básica.

En efecto, como $0 = L_X\omega = i_Xd\omega + di_X\omega$, tenemos

$$\begin{aligned} i_X(i_X\omega) &= \omega(X, X, \dots) = 0 \\ i_X(di_X\omega) &= i_X(-i_X\omega) = 0 \end{aligned}$$

2) $\omega - \chi \wedge i_X\omega$ es básica.

Como $\omega - \chi \wedge i_X\omega$ es claramente invariante, nuevamente se cumple la segunda condición de 2.24. Por otro lado,

$$i_X(\omega - \chi \wedge i_X\omega) = i_X\omega - (1 \wedge i_X\omega + 0) = 0$$

Por lo tanto, existen α y γ formas de B tales que $\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma$. Notamos que esa descomposición es única. En efecto, si $\omega \in I\Omega^p(M)$, y

$$\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma = \pi^*\alpha_1 + \chi \wedge \pi^*\gamma_1,$$

aplicando i_X a ambos lados, obtenemos $\gamma = \gamma_1$ y, por lo tanto, también $\alpha = \alpha_1$.

Para terminar, podemos representar cada forma invariante $\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma$ mediante (α, γ) . Con esta notación, la diferencial queda $d(\alpha, \gamma) = (d\alpha + \gamma \wedge \mathbf{e}, -d\gamma)$. ■

Construimos ahora la siguiente sucesión de complejos diferenciales, llamada *sucesión de Gysin*:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(B) & \xrightarrow{\pi^*} & I\Omega^*(M) & \xrightarrow{\oint} & \Omega^{*-1}(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\alpha, \gamma) & \longmapsto & S(\gamma) & & \\ & & \alpha & \longmapsto & (\alpha, 0) & & & & \end{array} \quad (2.4)$$

donde el operador S es un “ajuste” de signo para que la aplicación \oint sea una aplicación de cadenas, es decir, para que conmute con d . Pasamos a definirla: dada una variedad diferenciable N , definimos el operador $S: \Omega^*(N) \longrightarrow \Omega^*(N)$ que asigna a cada forma $\omega = \sum_{q \geq 0} \omega_q$ la forma $S(\omega) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \omega_q$, donde $\omega_q \in \Omega^q(M)$.

Notamos que S es un automorfismo, es más, es una involución, pues claramente $S \circ S$ es la identidad. Su comportamiento con respecto al producto es distributivo; un cálculo directo nos revela que $S(\gamma \wedge \beta) = S(\gamma) \wedge S(\beta)$. Es igualmente inmediato comprobar que su comportamiento con respecto a la diferencial está dado por la fórmula $S(d\omega) = -dS(\omega)$. Llamamos a la aplicación \oint *integración a lo largo de la fibra*.

Teorema 2.27 *La sucesión de Gysin es exacta.*

Demostración: La aplicación \oint es una aplicación de cadenas, pues

$$\oint d(\alpha, \gamma) = \oint (d\alpha + \gamma \wedge \mathbf{e}, -d\gamma) = S(-d\gamma) = dS(\gamma) = d \oint (\alpha, \gamma).$$

El resto de las comprobaciones son inmediatas. ■

La sucesión exacta corta de complejos (2.4) induce una sucesión exacta larga en cohomología, también llamada sucesión de Gysin:

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\pi^*} IH^p(M) \xrightarrow{\oint} H^{p-1}(B) \xrightarrow{\varepsilon} H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots \quad (2.5)$$

Como la cohomología invariante es la misma que la de de Rham, esta sucesión es un caso particular de la sucesión (2.1) con $k = 1$. Calculamos a continuación, por el procedimiento habitual, el homomorfismo conexión que hemos denotado por ε : sea γ un p -ciclo de B . Una antimagen por \oint es $(-1)^p(0, \gamma) \in I\Omega^{p+1}(M)$. Su diferencial

es $(-1)^p(e \wedge \gamma, 0)$, pues $d\gamma = 0$. Por lo tanto, el homomorfismo conexión ε , salvo el signo, es multiplicar por la clase de la forma de Euler ϵ . Con más precisión, si $[\gamma] \in H^*(B)$, entonces se tiene

$$\varepsilon([\gamma]) = [S(\gamma) \wedge \epsilon].$$

2.5.1 Invarianza con respecto de la métrica

En un principio, la sucesión de Gysin que hemos construido depende de la métrica utilizada, así como la forma fundamental, y, por lo tanto, la forma de Euler. No obstante, la integración a lo largo de las fibras \mathcal{f} de (2.4) es independiente de la métrica que hayamos elegido.

En efecto, supongamos que elegimos dos métricas μ_1 y μ_2 normalizadas y sean sus formas fundamentales χ_1 y χ_2 respectivamente. Sea ω una forma invariante de M . Siguiendo el proceso de la proposición 2.26, tendríamos las descomposiciones:

$$\omega = \pi^*\alpha_1 + \chi_1 \wedge \pi^*\gamma_1 = \pi^*\alpha_2 + \chi_2 \wedge \pi^*\gamma_2, \quad (2.6)$$

donde α_i, γ_i son formas de B para $i = 1, 2$. Como $\chi_1(X) = \chi_2(X) = 1$, aplicando i_X a (2.6), obtenemos que $\gamma_1 = \gamma_2$, y por ende, $\alpha_1 = \alpha_2$. Por lo tanto, la definición de la sucesión exacta corta de complejos (2.4) es independiente de la métrica invariante normalizada que hayamos tomado. Así, la sucesión inducida en cohomología también lo es, y por ende, también el homomorfismo conexión. De este modo, la forma de Euler ϵ puede depender de la métrica elegida, pero su clase de cohomología, no, ya que $[\epsilon] = \varepsilon([1])$.

Definición 2.28 Llamamos *clase de Euler* a la clase de cohomología $[\epsilon] \in H^2(B)$ de una forma de Euler ϵ cualquiera.

2.5.2 Estructura multiplicativa

La sucesión exacta corta de Gysin es una sucesión de \mathbb{R} -módulos, es decir, de espacios vectoriales reales. Ahora bien, podemos dotar a los complejos que intervienen de estructura de $\Omega^*(B)$ -módulo. Para ello, consideramos en $\Omega^*(B)$ el producto exterior usual por la derecha, y en $I\Omega^*(M)$, el producto dado por

$$(\alpha, \gamma) \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta, \gamma \wedge S(\beta)) \quad \text{para } (\alpha, \gamma) \in I\Omega^*(M), \beta \in \Omega^*(B)$$

Notamos que, con esta estructura, como S es distributivo con respecto a \wedge , las aplicaciones π^* y \mathcal{f} son homomorfismos de $\Omega^*(B)$ -módulos. De este modo, la sucesión de Gysin corta es una sucesión exacta de $\Omega^*(B)$ -módulos, y la sucesión de Gysin larga, lo es de $H^*(B)$ -módulos. Estas consideraciones nos serán de gran utilidad para calcular la cohomología de ciertos espacios de órbitas en el capítulo 4.

2.6 Aplicación: Cohomología de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

A modo de ilustración, vamos a utilizar la sucesión de Gysin para calcular la cohomología del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Consideramos en $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ la relación de equivalencia dada por $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\lambda(z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$. El cociente por esa relación de equivalencia es el *espacio proyectivo complejo de dimensión n* :

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim .$$

Los elementos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, los denotamos por $[z_0, \dots, z_n]$. Por definición de topología cociente, recordamos que un subconjunto $U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ será abierto si y sólo si $p^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ es abierto, donde p es la aplicación cociente.

Vamos a dar a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ estructura de variedad diferenciable. Consideramos los abiertos

$$U_j = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : z_j \neq 0\},$$

y los homeomorfismos $\Psi_j: U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$, dados por

$$\Psi_j([z_0, \dots, z_n]) = (z_0/z_j, \dots, \widehat{z_j/z_j}, \dots, z_n/z_j)$$

con inversas

$$\Psi_j^{-1}(w_1, \dots, w_n) = [w_0, \dots, 1, \dots, w_n].$$

Tomamos la colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_j, \Psi_j)\}_j$. Los cambios de cartas tienen coordenadas del tipo w_i/w_j ó $1/w_j$. El atlas \mathcal{A} da a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ estructura de variedad compleja (los cambios de cartas son funciones holomorfas). Consideraremos la estructura de variedad diferenciable inducida al interpretar \mathbb{C}^n como \mathbb{R}^{2n} .

Sea ahora la acción de $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ sobre la esfera \mathbb{S}^{2n+1} (que representamos mediante $\{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$) definida mediante

$$z \cdot (z_0, \dots, z_n) = (z \cdot z_0, \dots, z \cdot z_n).$$

Es claramente libre y diferenciable. Se le llama la *acción de Hopf*, y la proyección sobre el espacio de órbitas, es la *aplicación de Hopf*.

Proposición 2.29 *El espacio de órbitas de la acción de Hopf es difeomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.*

Demostración: Es fácil comprobar que la aplicación que asigna a la clase de (z_0, \dots, z_n) en $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ la clase de (z_0, \dots, z_n) en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, es una biyección. Como es una biyección continua de un compacto en un espacio Hausdorff, es un homeomorfismo. Notamos que la estructura diferenciable que hemos dado a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es la misma que se define mediante el teorema de la loncha diferenciable (teorema 2.1), y por lo tanto, la biyección anterior es, de hecho, un difeomorfismo. ■

Escribimos la sucesión de Gysin correspondiente a la acción de Hopf

$$\dots \longrightarrow H^i(\mathbb{S}^{2n+1}) \longrightarrow H^{i-1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \longrightarrow \dots \quad (2.7)$$

Recordamos que la cohomología de \mathbb{S}^{2n+1} es \mathbb{R} en los grados $0, 2n + 1$ y nula en el resto. Por lo tanto, obtenemos de (2.7)

$$H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong H^{p+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \quad \text{si } 0 \leq p \leq 2n - 1$$

Como el cociente de un espacio conexo es conexo, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ también lo es, y tenemos que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$, y por lo tanto, en todos los grados pares. Si escribimos la sucesión (2.7) con $i = 0$, obtenemos $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$, y por lo tanto, todos los grados impares también se anulan. Hemos obtenido:

$$H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, 2, \dots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos ahora la estructura producto. Un generador de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$ es la función constante 1. Como el homomorfismo conexión (que, salvo signo, era multiplicar por la clase de Euler) es un isomorfismo, tenemos que $[\epsilon]$ es un generador de $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$. Por el mismo argumento, $[\epsilon \wedge \epsilon]$ es un generador de $H^4(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$, y así sucesivamente. Hemos probado el isomorfismo de álgebras:

$$H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{R}[\epsilon]/\epsilon^{n+1}$$

Observación 2.30 En realidad, hemos probado algo más fuerte, pues tan sólo hemos usado la sucesión de Gysin y la cohomología de la esfera. Hemos probado que la cohomología del espacio de órbitas de una acción libre y diferenciable de \mathbb{S}^1 sobre una variedad con la cohomología de \mathbb{S}^{2n+1} (es decir, una *esfera cohomológica*) tiene que ser la misma que hemos calculado para $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Un tal espacio se dice que es un *espacio proyectivo complejo cohomológico*.

Capítulo 3

Sucesión de Gysin. El caso semilibre

La sucesión de Gysin se encuentra típicamente en el marco de la Topología Algebraica. En el capítulo anterior, la hemos construido en el caso particular de una acción libre diferenciable de \mathbb{S}^1 sobre una variedad M . En este capítulo, extendemos la sucesión de Gysin a las acciones semilibres, es decir, acciones donde permitimos que haya puntos fijos (que denotaremos por F), siendo la acción libre en $M - F$. Podemos considerar F como un subespacio del espacio de órbitas B . La sucesión de Gysin que vamos a obtener, recoge información sobre F en forma de cohomología relativa:

$$\dots \longrightarrow H^p(B) \longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^{p-1}(B, F) \longrightarrow H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots \quad (3.1)$$

Si queremos seguir en este caso el mismo método que para las acciones libres, nos encontramos con dos particularidades:

- 1) el espacio de órbitas B no tiene por qué ser una variedad,
- 2) el campo fundamental se anula en F (recordar en la descomposición del caso libre era esencial que no se anulase).

Solventaremos técnicamente esta nueva situación con la *explosión de Jänich* y las *formas de Verona*. Una forma de Verona de M consiste en tomar una forma en $M - F$ y otra en F , compatibles en un cierto sentido. Para expresar esa compatibilidad, utilizamos la explosión de Jänich. El complejo con el que trabajaremos en M será el complejo de las formas de Verona invariantes $I\Omega_v^*(M)$, que probaremos que proporciona la misma cohomología que la de de Rham. Nuevamente, usando el campo fundamental de la acción y una métrica invariante, podremos descomponer el complejo $I\Omega_v^*(M)$ y obtener la sucesión de Gysin.

Como dijimos en la introducción, la sucesión de Gysin (3.1) es válida para una acción diferenciable cualquiera de \mathbb{S}^1 sobre M . Abordar el caso general, en el que

aparecen puntos con subgrupos de isotropía finitos, supone la complicación técnica de tener que considerar un estrato (es decir, un conjunto de subvariedades) para cada subgrupo de isotropía en lugar de dos (como en el caso semilibre: los puntos fijos y los “móviles”). Tendríamos que trabajar con una forma en cada estrato para hacer lo mismo que hacemos en este capítulo, lo cual es un esfuerzo que no aporta nada realmente nuevo. Además, el objetivo de este trabajo es poder generalizarlo a ciertas acciones de \mathbb{R} . En ese caso se trabaja con formas de M , y no con formas del espacio de órbitas, pues éste puede llegar a ser muy patológico.

Durante todo el capítulo, Φ será una acción semilibre y diferenciable de \mathbb{S}^1 sobre una variedad conexa M , y $\pi: M \rightarrow B$ la proyección sobre el espacio de órbitas. Para evitar trivialidades, eliminamos el caso en que todos los puntos sean fijos.

3.1 Particularidades del caso semilibre

En una acción libre todos los subgrupos de isotropía eran triviales. Esto hacía que la estructura local de la acción fuera la misma para todos los puntos de la variedad, y podíamos dar una estructura de variedad al espacio de órbitas B .

Cuando la acción es semilibre, el subgrupo de isotropía de un punto $m \in M$ puede ser o el trivial (punto libre) o todo \mathbb{S}^1 (punto fijo). Este hecho implica que la estructura local de cada punto es distinta, y de hecho, el espacio de órbitas no va a ser una variedad. Ilustremos esta primera particularidad con un par de ejemplos:

Ejemplo 3.1 Sea la acción de \mathbb{S}^1 sobre \mathbb{R}^2 dada por $\Phi(e^{it}, (r, \theta)) = (r, t + \theta)$, donde hemos representado los elementos de \mathbb{R}^2 en coordenadas polares. La acción es semilibre, y el origen es el único punto fijo. El espacio de órbitas es homeomorfo a $[0, \infty)$, que es una variedad con borde. Este caso no parece problemático, pues también podemos hablar de formas diferenciales en variedades con borde.

Ejemplo 3.2 Sea la acción Φ de \mathbb{S}^1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) dada por

$$\Phi(z, [z_0, z_1, \dots, z_n]) = [z \cdot z_0, z_1, \dots, z_n].$$

Un sencillo cálculo directo nos revela que los puntos fijos son el punto $[1, 0, \dots, 0]$ y los puntos de la forma $[0, z_1, z_2, \dots, z_n]$, así que el conjunto de los puntos fijos es homeomorfo a la unión disjunta

$$F = \{*\} \cup \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}.$$

Los demás puntos son libres. Se puede probar que el espacio de órbitas es homeomorfo al cono $C(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1})$, que no es una variedad diferenciable. En efecto, si lo fuera, podríamos tomar un entorno U del vértice difeomorfo a \mathbb{R}^{2n-1} . Consideramos

también el abierto $V = C(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) - \{\text{vértice}\}$. Notamos que $U \cap V$ y V resultan difeomorfos a \mathbb{S}^{2n} y $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \times (0, 1)$ respectivamente. Como $C(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = U \cup V$ y es contráctil, la sucesión de Mayer-Vietoris nos revela:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^{2n}) \oplus H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) \longrightarrow H^2(\mathbb{S}^{2n}) \longrightarrow \dots$$

Como $n \geq 2$, tenemos que $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = 0$, pero sabemos que $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{R}$. Este ejemplo es más patológico que el anterior, pues el espacio de órbitas no es ni siquiera una variedad topológica.

La otra diferencia fundamental con el caso de las acciones libres es el hecho de que el campo fundamental se anule en los puntos fijos. En efecto, sea m un punto fijo. Como la aplicación

$$\Phi_m: \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$$

dada por $\Phi_m(g) = g(m)$ es constante, el valor del campo fundamental en m es

$$X_m = (\Phi_m)_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_1 = 0.$$

Recordemos que en el caso libre era crucial que el campo fundamental no se anulase para probar el teorema 2.26 y para que la diferencial de la forma fundamental fuese básica.

3.1.1 Puntos fijos

Probamos a continuación que el conjunto de puntos fijos es una subvariedad (que puede tener componentes de distinta dimensión, como en el ejemplo 3.2).

Proposición 3.3 *El conjunto F de los puntos fijos de una acción semilibre es unión disjunta de subvariedades cerradas invariantes de M .*

Demostración: Para ver que F es cerrado, tomamos un punto $x \in \overline{F}$ y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ que tenga como límite x . Para todo $g \in \mathbb{S}^1$ se tiene que

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

luego $x \in F$, y F es cerrado.

Vamos a probar que F es una subvariedad, viendo que todo punto $x \in F$ tiene un entorno $U \subseteq M$ tal que $U \cap F$ es subvariedad de M (sin precisar la dimensión, que puede variar de punto a punto). Podemos considerar $\{x\}$ como una subvariedad cerrada invariante de M de dimensión cero. Por el teorema del entorno

tubular equivariante (teorema 1.21), podemos tomar un difeomorfismo equivariante $\Psi: N(x) \rightarrow U \subseteq M$, donde $N(x)$ es el fibrado normal de M en x y U es un abierto invariante de M . Ahora bien, como $\{x\}$ consta de un solo punto, $N(x) = T_x M$. Recordamos que la acción de \mathbb{S}^1 en $T_x M$ es ortogonal. Consideramos el conjunto

$$\Psi^{-1}(U \cap F) = \{v \in T_x M : g^*v = v \ \forall g \in \mathbb{S}^1\},$$

que es un subespacio vectorial (y, por lo tanto, una subvariedad) de $T_x M$. Como Ψ es difeomorfismo, $U \cap F$ es una subvariedad de M y como podemos hacer esto con todos los puntos de F , tenemos que F es una subvariedad. ■

Como hemos evitado el caso $M = F$, el hecho de que en un espacio vectorial todo subespacio propio tiene complementario denso, nos permite asegurar que los puntos cuyo grupo de isotropía es trivial (puntos “móviles”) constituyen una subvariedad abierta densa en M , a saber, $M - F$. Tenemos una partición $(M - F, F)$ de M en dos subvariedades: la *parte regular* $M - F$ y la *parte singular* F . Notamos que si $x \in F$, entonces la clase $\pi(x) \subseteq B$ consta de un solo punto. A la vista de esto y por comodidad, identificaremos F con $\pi(F)$, considerando F como un subespacio del espacio de órbitas B . Más aún, como la acción es libre en $M - F$, el espacio cociente $M - F/\mathbb{S}^1 = \pi(M - F) = B - F$ es una variedad diferenciable. Como π es continua y sobreyectiva, $B - F$ es denso en B . Aunque B no sea una variedad, se tiene una partición $(B - F, F)$ de B en dos variedades, similar a la que tenemos en M . Abstraemos a continuación este fenómeno.

Definición 3.4 Sea un espacio topológico X y un cerrado $F \subseteq X$. Entonces, se dice que $(X - F, F)$ es una estructura de *pseudovariedad* para X si se cumple:

- i) $X - F$ es un abierto denso en X ;
- ii) tanto $X - F$ como F tienen estructura de variedad diferenciable compatible con la topología de X .

Observación 3.5 Las particiones $(M - F, F)$ y $(B - F, F)$ dan a M y B sendas estructuras de pseudovariedad.

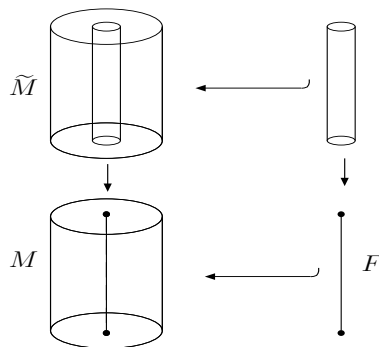
3.2 Explosión de Jänich

En este apartado introducimos la explosión, una herramienta técnica que nos permitirá trabajar con acciones semilibres. Como primer paso, vamos a dar una idea intuitiva de qué es la explosión. Según lo visto en el apartado anterior, las dos particularidades que diferencian el caso libre del semilibre se deben a la aparición de un conjunto de puntos fijos F . Intuitivamente hablando, la diferencia no parece

crítica, pues el complementario de la zona “distinta” (es decir, de F), es denso en M , y fuera de él la situación es conocida.

La explosión es una técnica que consiste en sustituir en M la subvariedad F por un fibrado de F , obteniendo una variedad con borde \widetilde{M} , a la cual podemos extender la acción de manera libre. Ilustramos esta idea con un ejemplo sencillo:

Ejemplo 3.6 Sea el cilindro macizo $M = \mathbb{D}^2 \times (0, 1)$. Tenemos la acción de \mathbb{S}^1 sobre M mediante las rotaciones alrededor del ánima. La acción es semilibre, y la subvariedad de los puntos fijos F es el ánima. Al sustituir F por el tubo T , obtenemos la variedad con borde \widetilde{M} , en la cual podemos definir la acción de manera libre.



3.2.1 Construcción de la explosión

Durante este párrafo nos olvidaremos momentáneamente de la acción sobre M , y definiremos la explosión para una subvariedad cerrada cualquiera de M . Describiremos el proceso siguiendo [Jan] y [Dav].

Sea E un fibrado vectorial sobre la variedad F . Sea E_0 el complemento de la sección cero. Denotamos $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, que actúa sobre E_0 libremente, por multiplicación en las fibras. Asociamos a E el fibrado *cilindro no negativo* C_+E , definido por:

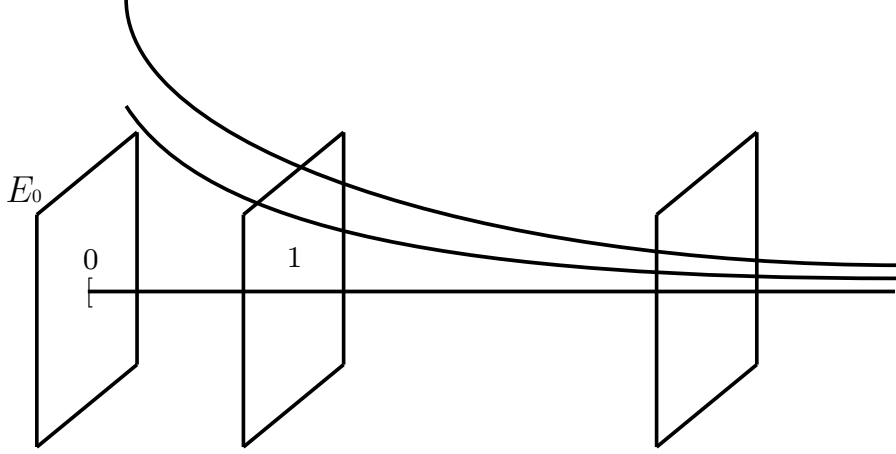
$$C_+E = (E_0 \times [0, \infty)) / \mathbb{R}_+,$$

donde $s \in \mathbb{R}_+$ actúa sobre $(x, t) \in E_0 \times [0, \infty)$ mediante $s \cdot (x, t) = (xs^{-1}, st)$. Como $E_0 \times [0, \infty)$ es una variedad con borde, su cociente por una acción libre, C_+E , también lo es. El borde de C_+E es un nuevo fibrado, y lo denotaremos ΣE , es decir,

$$\Sigma E = (E_0 \times \{0\}) / \mathbb{R}_+ \cong E_0 / \mathbb{R}_+.$$

Geométricamente, C_+E resulta de pegar E_0 con ΣE “adecuadamente”. En la siguiente figura, hemos representado cada E_0 con un plano en el producto $E_0 \times [0, \infty)$.

En la acción de \mathbb{R}_+ sobre $E_0 \times [0, \infty)$, la órbita de un punto (x, t) con $t > 0$ es el conjunto $\{(xs^{-1}, s) : s \in \mathbb{R}_+\}$, que hemos representado en la figura como una hipérbola. $E_0 \times \{1\}$ contiene un representante de cada órbita de este tipo. En el nivel $t = 0$, tenemos, al pasar al espacio de órbitas, ΣE .



La aplicación $c: C_+E \rightarrow E$ definida por $c([x, t]) = tx$, lleva $C_+E - \Sigma E$ en E_0 difeomórficamente, y proyecta ΣE sobre F .

Ejemplo 3.7 Si E es un fibrado vectorial trivial ($E = F \times \mathbb{R}^{n+1}$), el cilindro no negativo de E resulta

$$C_+E = F \times \mathbb{S}^{n-1} \times [0, \infty),$$

y la aplicación c se define por:

$$\begin{aligned} c: F \times \mathbb{S}^n \times [0, \infty) &\longrightarrow F \times C(\mathbb{S}^n) \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, [y, t]) \end{aligned}$$

donde hemos identificado \mathbb{R}^{n+1} con $C(\mathbb{S}^n)$.

En nuestro caso, sea $N(F)$ el fibrado normal de F en M . Por el teorema del entorno tubular, tenemos un embebimiento $\Psi: N(F) \rightarrow M$. Definimos ahora una variedad con borde \widetilde{M} . Como conjunto va a ser la unión disjunta de $(M - F)$ y $\Sigma N(F)$, que denotaremos por $(M - F) \sqcup \Sigma N(F)$. Definimos la aplicación:

$$\tau: C_+N(F) \longrightarrow (M - F) \sqcup \Sigma N(F), \quad (3.2)$$

dada por

$$\tau([x, t]) = \begin{cases} \Psi(tx) & \text{si } t \neq 0; \\ [x, 0] & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que τ es inyectiva. De esta manera, $\tau(C_+N(F))$ adquiere, vía τ , una estructura de variedad con borde. Notamos que como Ψ es un difeomorfismo, la estructura diferenciable de $(M - F) \cap \tau(C_+N(F))$ como subvariedad de M es la misma que como subvariedad de \widetilde{M} . Esto nos da una estructura diferenciable en \widetilde{M} , para la cual podemos considerar τ como aplicación collar. Para referirnos al borde de \widetilde{M} , usaremos la notación $\partial\widetilde{M}$. La aplicación c induce una aplicación

$$\mathcal{L}_M: \widetilde{M} \longrightarrow M$$

definida mediante la identidad en $M - F$ y la proyección de $\Sigma N(F)$ sobre F .

Hay que probar que la estructura diferenciable de \widetilde{M} no depende de la aplicación tubular Ψ que hayamos elegido. Para ello, la clave será el siguiente resultado:

Proposición 3.8 *Sean E_1 y E_2 dos fibrados vectoriales sobre F . Sea $\varphi: E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación diferenciable tal que $\varphi^{-1}(F) = F$ y tal que la restricción de la aplicación $\varphi_*: E_1 \longrightarrow E_2$ a cada fibra es un isomorfismo lineal. Entonces, existe una única aplicación diferenciable $\tilde{\varphi}: C_+E_1 \longrightarrow C_+E_2$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo,*

$$\begin{array}{ccc} C_+E_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C_+E_2 \\ c \downarrow & & \downarrow c \\ E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \end{array}$$

donde $c([x, t]) = tx$. De hecho, $\tilde{\varphi}$ viene dada por la fórmula

$$\tilde{\varphi}([x, t]) = \begin{cases} [t^{-1}\varphi(tx), t] & \text{si } t \neq 0 \\ [\varphi_*(x), 0] & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Demostración: Como $c|_{C_+E_1 - \Sigma E_1}$ es un difeomorfismo, si existe $\tilde{\varphi}_0: C_+E_1 \longrightarrow C_+E_2$ que hace que el diagrama conmute, entonces ha de cumplirse:

$$\tilde{\varphi}_0([x, t]) = [\varphi(tx), 1] = [t^{-1}\varphi(tx), t] \quad \text{para } [x, t] \in C_+E_1 - \Sigma E_1.$$

Por lo tanto, basta probar que la fórmula (3.3) define una aplicación diferenciable; la unicidad se deduce de que $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}_0$ coinciden en un abierto denso.

Para ver que $\tilde{\varphi}$ definida por la fórmula (3.3) es diferenciable, construimos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} (E_1)_0 \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (E_2)_0 \times [0, \infty) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ C_+E_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C_+E_2 \end{array}$$

donde $p_1(x, t) = [x, t]$ es la proyección sobre el espacio de órbitas de la acción que definía el cilindro no negativo, y lo mismo para p_2 (por lo tanto, p_1 y p_2 son submersiones sobreyectivas), y la aplicación $\bar{\varphi}$ está dada por

$$\bar{\varphi}(x, t) = \begin{cases} (t^{-1}\varphi(tx), t) & \text{si } t \neq 0; \\ (\varphi_*(x), 0) & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

que es una aplicación diferenciable (la prueba es un ejercicio de cálculo; ver [Hir], pag.112). Entonces, $\bar{\varphi} \circ p_1$ es diferenciable, y como p_1 es una submersión sobreyectiva, obtenemos que $\bar{\varphi}$ es continua y diferenciable (ver [BrCl], pag. 86). ■

Sean ahora dos entornos tubulares

$$\Psi_i: N(F) \longrightarrow M \quad \text{para } i = 1, 2$$

que inducen aplicaciones collares

$$\tau_i: C_+N(F) \longrightarrow \widetilde{M} \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Tenemos, pues, dos estructuras de variedad diferenciable con borde en \widetilde{M} , a priori, distintas. Afirmar que ambas coinciden es equivalente a que la aplicación $\tau_1^{-1} \circ \tau_2: C_+N(F) \longrightarrow C_+N(F)$, que está definida en un entorno de $\Sigma N(F)$, sea un difeomorfismo. Ahora bien, $\tau_1^{-1} \circ \tau_2 = \bar{\varphi}$, donde $\varphi = \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$, que es un difeomorfismo definido sobre un abierto de $\Sigma N(F)$, así que por la proposición anterior, $\tau_1^{-1} \circ \tau_2$ es un difeomorfismo. Hemos probado el siguiente corolario:

Corolario 3.9 *La estructura de variedad diferenciable con borde inducida en \widetilde{M} mediante el collar definido por 3.2, no depende del entorno tubular elegido.*

3.2.2 Estructura local de la acción

Vamos a describir unos entornos de M que nos facilitan una expresión local adecuada para trabajar con la explosión. Sea un punto fijo $x \in F$, y sea $k + 1$ la codimensión de la componente conexa de F que contiene a x . Tomamos un entorno tubular $\Psi: N(F) \longrightarrow M$, y una carta trivializante $\phi: U \times C(\mathbb{S}^k) \longrightarrow N(F)$ de x , donde U es un abierto de F . Así considerada, ψ resulta un embebimiento. Usando la expresión de la explosión de Jänich de $U \times C(\mathbb{S}^k)$ (ver el ejemplo 3.7) y la proposición 3.8, podemos levantar ψ a las explosiones, obteniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} U \times \mathbb{S}^k \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & C_+N(F) & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{M} \\ p \downarrow & & c \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_M \\ U \times C(\mathbb{S}^k) & \xrightarrow{\psi} & N(F) & \xrightarrow{\Psi} & M \end{array} \quad (3.4)$$

donde $p(u, x, t) = (u, [x, t])$, y $\tilde{\psi}$, un embebimiento. Diremos que el entorno $W = \Psi(\psi(U \times C(\mathbb{S}^k)))$ es un *entorno distinguido* asociado a la aplicación tubular Ψ . El diagrama precedente muestra que \mathcal{L}_M es una aplicación diferenciable.

Vamos a definir a partir de la acción semilibre $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \longrightarrow M$ una nueva acción libre $\tilde{\Phi}: \mathbb{S}^1 \times \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$, de modo que la explosión \mathcal{L}_M sea equivariante. Notamos que entonces, $\tilde{\Phi}$ queda determinada en $\tilde{M} - \partial\tilde{M}$ (recordemos que $\mathcal{L}_M|_{\tilde{M} - \partial\tilde{M}}$ es la identidad de $M - F$), y nos basta extenderla a un entorno de $\partial\tilde{M}$.

Tomamos un entorno distinguido W de $x \in F$. Tenemos pues, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{S}^k \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \tilde{M} \\ p \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_M \\ U \times C(\mathbb{S}^k) & \xrightarrow{\phi} & M \end{array} \quad (3.5)$$

donde ϕ y $\tilde{\phi}$ son embebimientos, y $W = \phi(U \times C(\mathbb{S}^k))$.

Por el corolario 3.9, podemos suponer que el entorno tubular $\Psi: N(F) \longrightarrow M$ con el que hacemos la explosión es equivariante. Esto implica que la acción inducida en $U \times C(\mathbb{S}^k)$ “vive” en cada \mathbb{S}^k en el sentido siguiente: sea $v \in N$ no nulo, y sea $g \in \mathbb{S}^1$. Como la acción es lineal y preserva la métrica, tenemos que

$$\|g \cdot v\| = \|g_*v\| = \|v\| \quad \text{y} \quad g_*v = \|v\|g_*(v/\|v\|),$$

es decir, la acción está definida sobre cada esfera $\mathbb{S}^k \times \{t\} \subseteq C(\mathbb{S}^k)$, para todo $t \neq 0$, y en particular la acción sobre $\mathbb{S}^k \times \{1\}$ determina la acción sobre las demás. En otras palabras, existe una acción $\Phi_S: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k$ tal que la acción Φ_D sobre $U \times C(\mathbb{S}^k)$ dada por

$$\Phi_D(g, (u, [x, t])) = (u, [\Phi_S(g, x), t]) \quad \text{para } g \in \mathbb{S}^1,$$

hace que ϕ sea equivariante. Como la acción en $M - F$ es libre, la acción Φ_S también lo es. Definimos en $U \times \mathbb{S}^k \times [0, \infty)$ la acción $\tilde{\Phi}_D$ dada por

$$\tilde{\Phi}_D(g, (u, x, t)) = (u, \Phi_S(g, x), t) \quad \text{para } g \in \mathbb{S}^1,$$

que es, claramente, libre. Tenemos inducida, por lo tanto una acción $\tilde{\Phi}$ definida en un entorno $\tilde{W} = \mathcal{L}_M^{-1}(W)$ de $\mathcal{L}_M^{-1}(x)$ en \tilde{M} . Notamos que esta acción coincide con la que teníamos establecida en $\tilde{M} - \partial\tilde{M}$, de modo que por un argumento de densidad, es la única que hace que $\mathcal{L}_M|_{\tilde{W}}$ sea equivariante. Esta unicidad origina que si repetimos este proceso, obteniendo una nueva acción para un entorno \tilde{W}_1 , tal que $\tilde{W} \cap \tilde{W}_1 \neq \emptyset$, ambas acciones coinciden sobre $\tilde{W} \cap \tilde{W}_1$. Procediendo de igual manera para cada punto $x \in F$, extendemos la acción a todo \tilde{M} . Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3.10 *Existe una única acción libre*

$$\tilde{\Phi}: \mathbb{S}^1 \times \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}$$

de modo que la explosión $\mathcal{L}_M: \tilde{M} \longrightarrow M$ es equivariente.

Observación 3.11 Como la acción sobre \mathbb{S}^k es libre, el Teorema de la Esfera Peluda (ver, por ejemplo, [Rot], pag. 123) fuerza que k tiene que ser impar. De aquí deducimos que la codimensión de cada componente conexa de F en una acción semilibre ha de ser par.

3.2.3 Explosión para el espacio de órbitas

Construimos ahora una explosión para el espacio de órbitas B . Como la acción que hemos definido sobre \tilde{M} es libre, el espacio de órbitas \tilde{M}/\mathbb{S}^1 es una variedad diferenciable (con borde, al igual que \tilde{M}), que denotaremos por \tilde{B} . Indicaremos con $\tilde{\pi}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{B}$ la aplicación cociente de la acción. Recordamos que la explosión $\mathcal{L}_M: \tilde{M} \longrightarrow M$ es equivariente; por lo tanto, induce una aplicación continua $\mathcal{L}_B: \tilde{B} \longrightarrow B$ mediante

$$\mathcal{L}_B(\tilde{\pi}(\tilde{m})) = \pi \mathcal{L}_M(\tilde{m}) \quad \text{para } \tilde{m} \in \tilde{M}.$$

Tenemos, por lo tanto, un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{B} \\ \mathcal{L}_M \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_B \\ M & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

Aplicando π al diagrama conmutativo equivariente (3.4), deducimos que cada punto $y \in F \subseteq B$ tiene un entorno W (que también llamaremos *distinguido*) homeomorfo a $U \times C(CP^n)$, donde $U \subseteq F$ y $CP^n = \mathbb{S}^k/\mathbb{S}^1$ es un espacio proyectivo complejo cohomológico, es decir, una variedad que tiene la cohomología de $\mathbb{C}P^n$, donde $k = 2n + 1$. La estructura local en y queda descrita por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \times CP^n \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{B} \\ p \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_B \\ U \times C(CP^n) & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad (3.6)$$

donde $p(u, x, t) = (u, [x, t])$, φ es un homeomorfismo y $\tilde{\varphi}$ un embebimiento. Notamos que la proyección $\mathcal{L}_B: \partial \tilde{B} \longrightarrow F$ es un fibrado localmente trivial de fibra CP^n en cada componente conexa.

Esta construcción que hemos desarrollado para los casos concretos de M y B , se puede abstraer al concepto de explosión para una pseudovariedad.

Definición 3.12 Sea $(X - F, F)$ una pseudovariiedad, y \tilde{X} una variedad con borde. Decimos que una aplicación continua $\mathcal{L}_X: \tilde{X} \longrightarrow X$ es una *explosión* de la pseudovariiedad $(X - F, F)$ si se cumple:

- i) la restricción $\mathcal{L}_X|_{\tilde{X}-\partial\tilde{X}}: \tilde{X}-\partial\tilde{X} \longrightarrow X - F$ es un difeomorfismo;
- ii) la restricción $\mathcal{L}_X|_{\partial\tilde{X}}: \partial\tilde{X} \longrightarrow F$ es un fibrado diferenciable localmente trivial en cada componente conexa de F .

Según esta definición, la explosión de Jänich para M y la inducida en B son ambas explosiones.

3.3 Cohomología de Verona

En este apartado, nos olvidamos momentáneamente de la acción Φ para presentar la *cohomología de Verona*. Para definir las *formas de Verona* tan sólo necesitamos una pseudovariiedad (X, F) con una explosión. Una forma de Verona consiste en considerar una forma en $X - F$ y otra en F , compatibles en cierto sentido. Para expresar esta compatibilidad, utilizamos la explosión. Las formas de Verona (que A. Verona llama *formas controladas* cuando las presenta en [Ver]) forman un complejo de cadenas, cuya cohomología es isomorfa a la cohomología singular.

3.3.1 Definiciones

Sea (X, F) una pseudovariiedad, y permitimos que F tenga componentes conexas de distinta dimensión. Fijamos una explosión para (X, F) , que denotamos por $\mathcal{L}_X: \tilde{X} \longrightarrow X$.

Definición 3.13 En las condiciones anteriores, una *forma de Verona* de X es una forma $\omega \in \Omega^*(X - F)$ tal que:

- 1) ω es levantable a \tilde{X} , es decir, existe una forma $\tilde{\omega} \in \Omega^*(\tilde{X})$ (que, por densidad, es única), tal que

$$\tilde{\omega}|_{\tilde{X}-\partial\tilde{X}} = \mathcal{L}_X^*\omega,$$

- 2) La restricción $\tilde{\omega}|_{\partial\tilde{X}}$ es una forma básica para el fibrado $\mathcal{L}_X: \partial\tilde{X} \longrightarrow F$, es decir, existe una forma $\omega_F \in \Omega^*(F)$ tal que

$$\tilde{\omega}|_{\partial\tilde{X}} = \mathcal{L}_X^*\omega_F \in \Omega^*(\partial\tilde{X}).$$

Si α es una forma de $X - F$ que cumple la primera propiedad de la definición 3.13, diremos que es *levantable*, y mantendremos la notación $\tilde{\alpha}$ para expresar su levantada. Si α es de Verona, mantendremos también la notación α_F para referirnos

a la forma que induce en F . Notamos que como $\mathcal{L}_X: \partial\tilde{X} \rightarrow F$ es un fibrado, \mathcal{L}_X^* es inyectiva, y α_F es única.

Denotamos por $\Omega_v^*(X)$ el conjunto de las formas de Verona de X , que a continuación veremos que tiene estructura de álgebra diferencial graduada. Lo llamaremos *complejo de Verona*.

Lema 3.14 $(\Omega_v^*(X), \wedge, d)$ es un álgebra diferencial graduada.

Demostración: La graduación es, obviamente,

$$\Omega_v^*(X) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_v^p(X) = \bigoplus_{p \geq 0} (\Omega^p(X - F) \cap \Omega_v^*(X)).$$

Falta por ver que el producto y la diferencial exteriores son cerradas en $\Omega_v^*(X)$. Sea $\omega \in \Omega_v^*(X)$. Definimos $\widetilde{d\omega} = d\widetilde{\omega}$ y $(d\omega)_F = d\omega_F$, y comprobamos que cumplen las dos condiciones de la definición 3.13:

$$\widetilde{d\omega}|_{\tilde{X}-\partial\tilde{X}} = d(\widetilde{\omega}|_{\tilde{X}-\partial\tilde{X}}) = d\mathcal{L}_X^*\omega = \mathcal{L}_X^*d\omega$$

$$\widetilde{d\omega}|_{\partial\tilde{X}} = d\widetilde{\omega}|_{\partial\tilde{X}} = d\mathcal{L}_M^*\omega_F = \mathcal{L}_X^*d\omega_F = \mathcal{L}_X^*(d\omega)|_F,$$

luego $d\omega$ es de Verona. Sean ahora ω y η formas de Verona. Utilizando la identidad (1.2), se comprueba de forma inmediata que $\widetilde{\omega \wedge \eta} = \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta}$ y $(\omega \wedge \eta)|_F = \omega|_F \wedge \eta|_F$ satisfacen las dos condiciones, es decir, $\omega \wedge \eta$ es de Verona. ■

Ejemplo 3.15 Si M es una variedad diferenciable y tomamos $F = \emptyset$, el par (M, \emptyset) es trivialmente una pseudovariedad, y la identidad de M , una explosión. El complejo de Verona de (M, \emptyset) es exactamente el complejo de de Rham.

Como la diferencial es de orden dos, podemos hablar de la cohomología del complejo de Verona.

Definición 3.16 El p -ésimo grupo de cohomología de Verona de X es el espacio vectorial

$$H_v^p(X) = \frac{\ker(d: \Omega_v^p(X) \rightarrow \Omega_v^{p+1}(X))}{\text{im}(d: \Omega_v^{p-1}(X) \rightarrow \Omega_v^p(X))} = \frac{p\text{-ciclos de Verona}}{p\text{-bordes de Verona}}$$

Ejemplo 3.17 Sea $k \geq 1$. Vamos a calcular la cohomología de Verona de la pseudovariedad $(C(\mathbb{S}^k) - \{*\}, \{*\})$, donde $*$ denota el vértice) y la explosión es

$$\mathcal{L}: \mathbb{S}^k \times [0, \infty) \rightarrow C(\mathbb{S}^k),$$

dada por $\mathcal{L}(x, t) = [x, t]$.

Podemos considerar que $\Omega_v^0(C(\mathbb{S}^k))$ consta de las funciones sobre $\mathbb{S}^k \times [0, \infty)$ cuya restricción a $\mathbb{S}^k \times \{0\}$ es básica para el fibrado

$$\mathcal{L}: \mathbb{S}^k \times \{0\} \longrightarrow *, \quad (3.7)$$

es decir, constante. Por lo tanto, $H_V(\mathbb{S}^k) = \mathbb{R}$.

Si ahora $\omega \in \Omega_v^p(C(\mathbb{S}^k))$ con $p \geq 1$, como las únicas formas básicas para el fibrado (3.7) son las constantes, deducimos que $\omega|_{\mathbb{S}^k \times \{0\}} = 0$, es decir,

$$\Omega_v^p(C(\mathbb{S}^k)) = \Omega^p(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}).$$

Escribimos la sucesión exacta larga de cohomología del par $(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\})$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^p(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}) &\rightarrow H^p(\mathbb{S}^k \times [0, \infty)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^p(\mathbb{S}^k) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Por el lema de Poincaré, $H^*(\mathbb{S}^k \times [0, \infty)) \cong H^*(\mathbb{S}^k)$. De este hecho y de la sucesión del par, obtenemos que $H^p(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}) = 0$. Hemos probado entonces que la cohomología de Verona de $C(\mathbb{S}^k)$ es:

$$H_v^p(C(\mathbb{S}^k)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.3.2 Carácter funtorial

Podemos considerar Ω_v^* como un funtor de la categoría de las pseudovariedades explotadas en la de las álgebras graduadas. Los morfismos en la categoría de las pseudovariedades explotadas son las aplicaciones diferenciables *levantables*, en el sentido de las siguientes definiciones:

Definición 3.18 Sean las pseudovariedades $(X_1 - F_1, F_1)$ y $(X_2 - F_2, F_2)$. Decimos que una aplicación continua $f: X_1 \longrightarrow X_2$ es un *morfismo de pseudovariedades* si preserva diferenciablemente los estratos, es decir, si f aplica diferenciablemente $X_1 - F_1$ y F_1 en $X_2 - F_2$ y F_2 , respectivamente.

Definición 3.19 Sean $(X_1 - F_1, F_1)$ y $(X_2 - F_2, F_2)$ pseudovariedades con explosiones

$$\mathcal{L}_{X_i}: \tilde{X}_i \longrightarrow X_i \quad \text{para } i = 1, 2.$$

y sea $f: X_1 \longrightarrow X_2$ un morfismo de pseudovariedades. Decimos que f es *levantable* si existe una aplicación diferenciable $\tilde{f}: \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{X}_1 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{X_1}} & X_1 \\
\tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\
\tilde{X}_2 & \xrightarrow{\mathcal{L}_{X_2}} & X_2
\end{array} \tag{3.8}$$

Es fácil comprobar que la conmutatividad del diagrama (3.8) implica que \tilde{f} aplica $\tilde{X}_1 - \partial\tilde{X}_1$ en $\tilde{X}_2 - \partial\tilde{X}_2$ y $\partial\tilde{X}_1$ en $\partial\tilde{X}_2$. Podemos plasmar esta situación en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{X}_1 - \partial\tilde{X}_1 & \hookrightarrow & \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\quad} & \partial\tilde{X}_1 \\
\downarrow \wr & \searrow \tilde{f} & \downarrow & \searrow \tilde{f} & \downarrow & \searrow \tilde{f} \\
\tilde{X}_2 - \partial\tilde{X}_2 & \hookrightarrow & \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\quad} & \partial\tilde{X}_2 \\
\downarrow \wr & \searrow \mathcal{L}_{X_1} & \downarrow & \searrow \mathcal{L}_{X_2} & \downarrow & \searrow f \\
X_1 - F_1 & \hookrightarrow & X_1 & \xrightarrow{\quad} & F_1 \\
\downarrow \wr & \searrow f & \downarrow & \searrow f & \downarrow & \searrow f \\
X_2 - F_2 & \hookrightarrow & X_2 & \xrightarrow{\quad} & F_2
\end{array} \tag{3.9}$$

donde las flechas horizontales son aplicaciones inclusión, y las verticales son las explosiones y sus restricciones. En estas situaciones, por comodidad, usaremos la misma letra para referirnos a una aplicación y a sus restricciones.

Lema 3.20 *Si $f: X_1 \rightarrow X_2$ es un morfismo de pseudovariedades levantable, entonces $f^*: \Omega^*(X_2 - F_2) \rightarrow \Omega^*(X_1 - F_1)$ transforma formas de Verona en formas de Verona.*

Demostración: Si f es levantable, tenemos un diagrama conmutativo como (3.9). Notamos que si aplicamos el funtor contravariante Ω^* , las flechas cambian de sentido (por supuesto, sólo las que involucren variedades). Sea $\omega_2 \in \Omega_v^*(X_2)$. Tenemos que probar que $\omega_1 = f^*\omega_2 \in \Omega^*(X_1 - F_1)$ es una forma de Verona de X_1 . Definimos las formas:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{f}^*\tilde{\omega}_2 \in \Omega^*(\tilde{X}_1) \quad \text{y} \quad (\omega_1)_{F_1} = \tilde{f}^*(\omega_2)_{F_2} \in \Omega^*(F_1),$$

que cumplen las condiciones de la definición 3.13. En efecto, usando la conmutatividad del diagrama (3.9) y que ω_2 es de Verona, tenemos:

$$\tilde{\omega}_1|_{\tilde{X}_1 - \partial\tilde{X}_1} = (\tilde{f}^*\tilde{\omega}_2)|_{\tilde{X}_1 - \partial\tilde{X}_1} = \tilde{f}^*(\tilde{\omega}_2|_{\tilde{X}_2 - \partial\tilde{X}_2}) = \tilde{f}^*\mathcal{L}_{X_2}^*\omega_2 = \mathcal{L}_{X_1}^*f^*\omega_2 = \mathcal{L}_{X_1}^*\omega_1;$$

$$\mathcal{L}_{X_1}^*(\omega_1)_{F_1} = \mathcal{L}_{X_1}^* f^*(\omega_2)_{F_2} = \tilde{f}^* \mathcal{L}_{X_2}(\omega_2)_{F_2} = \tilde{f}^*(\tilde{\omega}_2|_{\partial\tilde{X}_2}) = (\tilde{f}^*\tilde{\omega}_2)|_{\partial\tilde{X}_1} = \tilde{\omega}_1|_{\partial\tilde{X}_1} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.21 Sea (X, F) una pseudovariiedad con explosión $\mathcal{L}_X: \tilde{X} \rightarrow X$, y U un abierto de X . El abierto U hereda una estructura de pseudovariiedad definida mediante $(U - F, F \cap U)$, y también una explosión $\mathcal{L}_U: \tilde{U} \rightarrow U$, donde $\tilde{U} = \mathcal{L}_X^{-1}U$, y \mathcal{L}_U es la restricción de \mathcal{L}_X a \tilde{U} . La inclusión $i_U: U \hookrightarrow X$ es un morfismo de pseudovariiedades claramente levantable. Por lo tanto, la restricción de una forma de Verona a un abierto, es de Verona.

Ejemplo 3.22 En el caso de la acción diferenciable y semilibre de S^1 sobre la variedad M que tratamos en este capítulo, la proyección sobre el espacio de órbitas $\pi: M \rightarrow B$ es una aplicación levantable, y el diagrama (3.9) en esta situación queda:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{M} - \partial\tilde{M} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{M} & \xleftarrow{\quad} & \partial\tilde{M} \\
 \downarrow \wr & \searrow \tilde{\pi} & \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \tilde{\pi} \\
 \tilde{B} - \partial\tilde{B} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{B} & \xleftarrow{\quad} & \partial\tilde{B} \\
 \downarrow \mathcal{L}_M & & \downarrow \mathcal{L}_B & & \downarrow \\
 M - F_1 & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{\quad} & F \\
 \downarrow \pi & \searrow \pi & \downarrow \pi & & \downarrow 1_F \\
 B - F & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & F
 \end{array} \tag{3.10}$$

3.3.3 Teorema de de Rham para la cohomología de Verona

Sea M una variedad diferenciable conexa y $F \neq M$ una subvariedad cerrada. Entonces, $(M - F, F)$ es una pseudovariiedad. Consideramos la explosión de Jänich $\mathcal{L}_M: \tilde{M} \rightarrow M$. Fijamos estas condiciones para todo el apartado.

Tenemos la inclusión

$$i: M - F \rightarrow M,$$

que induce en cohomología la aplicación de restricción de formas:

$$i^*: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M - F)$$

Lema 3.23 En las condiciones anteriores, $i^*(\Omega^*(M)) \subseteq \Omega_v^*(M)$.

Demostración: Sea ω una forma de M . Notamos que como M es una variedad diferenciable (lo cual no siempre es cierto en una pseudovariedad abstracta), podemos considerar el pullback:

$$\mathcal{L}_M^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(\widetilde{M}).$$

Si definimos

$$\widetilde{(i^*\omega)} = \mathcal{L}_M^*\omega \in \Omega^*(\widetilde{M}) \quad \text{y} \quad (i^*\omega)_F = \omega|_F \in \Omega^*(\partial\widetilde{M}),$$

se comprueba fácilmente que satisfacen las dos condiciones para que $i^*\omega$ sea de Verona. En efecto, usando la conmutatividad de (3.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{(i^*\omega)}|_{\widetilde{M}-\partial\widetilde{M}} &= (\mathcal{L}_M^*\omega)|_{\widetilde{M}-\partial\widetilde{M}} = \mathcal{L}_M^*(i^*\omega) \text{ y} \\ \mathcal{L}_M^*(i^*\omega)|_F &= \mathcal{L}_M^*(\omega|_F) = (\mathcal{L}_M^*\omega)|_{\partial\widetilde{M}} = \widetilde{(i^*\omega)}|_{\partial\widetilde{M}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observación 3.24 Este resultado no es sorprendente, pues una forma de Verona ω de M es una forma de $M - F$ que podemos “controlar” en cierto sentido. Una manera es que esa forma se pueda extender a M .

Gracias al lema 3.23, tenemos el homomorfismo de álgebras graduadas:

$$i^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega_v^*(M), \quad (3.11)$$

que es, obviamente, un morfismo de cadenas. Vamos a probar que es un cuasi-isomorfismo. Para ello, procederemos igual que como hicimos con la cohomología invariante (ver apartado 2.2), es decir, primero probaremos el lema de Poincaré y la propiedad de Mayer-Vietoris para la cohomología de Verona. Luego, construiremos un cubrimiento adecuado y aplicaremos el método de Bredon.

Lema de Poincaré

La estructura de pseudovariedad $(M - F, F)$ induce de forma natural una estructura de pseudovariedad en $M \times \mathbb{R}$, a saber, $((M - F) \times \mathbb{R}, F \times \mathbb{R})$. De la misma forma, la explosión de Jänich $\mathcal{L}_M: \widetilde{M} \longrightarrow M$ induce la explosión:

$$\mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}}: \widetilde{M} \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R},$$

donde

$$\mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}} = \mathcal{L}_M \times 1_{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} \times \mathbb{R} = \widetilde{M} \times \mathbb{R}.$$

El borde de esta explosión es $\partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}$, y su parte regular, $(\widetilde{M} - \partial\widetilde{M}) \times \mathbb{R}$. Notamos que si hacemos la explosión de Jänich de la subvariedad cerrada $F \times \mathbb{R}$ de $M \times \mathbb{R}$, obtenemos exactamente la explosión que hemos descrito.

Proposición 3.25 (Lema de Poincaré para la cohomología de Verona) *En las condiciones anteriores, la cohomología de Verona de M y la de $M \times \mathbb{R}$ son isomorfas.*

Al igual que en la proposición 2.10, bastará adaptar la prueba de 1.2. Para ello, es suficiente notar que:

- i) las aplicaciones π y s que definíamos en 1.2 son ambas trivialmente morfismos levantables de las pseudovariedades que estamos considerando;
- ii) la restricción del operador homotopía K

$$K: \Omega^*((M - F) \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{*-1}((M - F) \times \mathbb{R})$$

transforma formas de Verona en formas de Verona.

Veamos que se cumple ii). Sea $\omega = \alpha_t + \beta_t \wedge dt$ una forma de Verona de $M \times \mathbb{R}$. Esto implica que

$$\alpha_t|_{(\widetilde{M} - \partial\widetilde{M}) \times \mathbb{R}} + \beta_t|_{(\widetilde{M} - \partial\widetilde{M}) \times \mathbb{R}} \wedge dt = \mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}}^* \alpha_t + \mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}}^* \beta_t \wedge dt.$$

Por la unicidad de la descomposición, se deduce que $\mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}}^* \beta_t = \beta_t|_{\widetilde{M} - \partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}}$. Tenemos la expresión $\omega_F = (\alpha_t)_F + (\beta_t)_F \wedge dt$. Usando nuevamente que ω es de Verona, obtenemos $\beta_t|_{\partial\widetilde{M} \times \mathbb{R}} = \mathcal{L}_{M \times \mathbb{R}}(\beta_t)_F$. Hemos probado que β_t es de Verona.

Usando que los pullbacks de aplicaciones diferenciables conmutan con las integrales de familias de formas diferenciables, y que β_t es de Verona, es inmediato comprobar que

$$\widetilde{K}\omega = \int_0^t \widetilde{\beta}_s \wedge ds \quad \text{y} \quad (K\omega)_F = \int_0^t (\beta_s)_F \wedge ds$$

satisfacen las condiciones de la definición 3.13. ■

Teorema 3.26 (Axioma de homotopía para la cohomología de Verona) *Sean M, N variedades diferenciables y $\mathcal{L}_M, \mathcal{L}_N$ explosiones. Sean $f, g: M \longrightarrow N$ aplicaciones levantables. Si existe una homotopía diferenciable levantable $F: M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$, entonces $f^* = g^*$ en cohomología.*

Corolario 3.27 *Sea M es una variedad y \mathcal{L}_M una explosión. Si V es una variedad contráctil y consideramos en $M \times V$ la explosión $\mathcal{L}_M \times 1_V$, entonces $H_v^*(M \times V) \cong H_v^*(M)$.*

Sucesión de Mayer-Vietoris

Como apuntamos en el ejemplo 3.21, todo abierto U de M hereda de forma natural una explosión respecto a la cual, la inclusión es levantable. Por lo tanto, podemos construir la sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología de Verona:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_v^*(M) & \xrightarrow{\iota} & \Omega_v^*(U) \oplus \Omega_v^*(V) & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega_v^*(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\sigma, \tau) & \longmapsto & \tau|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} & & (3.12) \\ & & \Omega & \longmapsto & (\Omega|_U, \Omega|_V) & & & & \end{array}$$

Proposición 3.28 *La sucesión de Mayer-Vietoris para cohomología de Verona (3.12) es exacta.*

Para que la prueba de la proposición 1.5 sea válida aquí, necesitamos una partición de la unidad con funciones de Verona. Basta tomar una partición de la unidad cualquiera $\{\rho_U, \rho_V\}$ y notar que, por el lema 3.23, $\{\rho_U|_U, \rho_V|_V\}$ es de Verona. ■

Cuasiisomorfismo

Terminamos este apartado probando el siguiente teorema:

Teorema 3.29 (Teorema de de Rham para cohomología de Verona) *Para la inclusión $i: M - F \longrightarrow M$, el homomorfismo de cadenas*

$$i^*: \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega_v^*(M)$$

es un cuasiisomorfismo

Demostración: Vamos a aplicar nuevamente el método de Bredon (lema 1.11). Hemos de elegir una base \mathcal{U} cerrada para intersecciones finitas. Tomamos una métrica en M , y un entorno tubular $\Psi: N(F) \longrightarrow F$ de F . Consideramos los abiertos

$$T_\varepsilon = \Psi(\{v \in N(F) : \|v\| < \varepsilon\}), \quad \varepsilon > 0$$

Sea ahora el abierto

$$\Psi^1(U) \cap T_\varepsilon, \quad (3.13)$$

donde U es un convexo geodésico de F y $\varepsilon > 0$. Este abierto es difeomorfo a $U \times C(\mathbb{S}^k)$, donde $k + 1$ es la codimensión de la componente conexa de F que contiene a U . Tomamos como base \mathcal{U} a todos los abiertos de la forma (3.13), junto con todos los abiertos de $M - F$.

Definimos ahora para cada abierto $W \subseteq M$ la propiedad

$$P(W) = \text{“}i^*: H^*(W) \longrightarrow H_v^*(W) \text{ es un isomorfismo”}$$

Las condiciones 2) y 3) del lema 1.11 se verifican fácilmente de la misma manera que lo hacíamos en el teorema 2.16. Nos queda probar que P se cumple para todo elemento de \mathcal{U} . Para los abiertos de $M - F$, es trivial por el ejemplo 3.15. Para los de la forma (3.13), notamos que usando el corolario 3.27, podemos reducirnos a probar el cuasiisomorfismo para el caso $M = C(\mathbb{S}^k)$, $F = \{\text{vértice}\}$, lo cual hemos hecho ya en el ejemplo 3.17. ■

Espacio de órbitas

Hemos probado que la cohomología de Verona de M calcula la de de Rham y, por tanto, la singular. En el caso del espacio de órbitas B , no tenemos estructura de variedad, por lo tanto, habremos de trabajar con cohomología singular. El resultado que se obtiene es:

Teorema 3.30 *La cohomología singular del espacio de órbitas B es isomorfa a la cohomología de Verona de B .*

A continuación damos una idea de cómo se demuestra este teorema. En [Sar] se puede encontrar una exposición detallada de la técnica que usaremos, para probar un teorema “tipo de Rham” en un caso más general que el nuestro, al trabajar con más de dos estratos. El proceso es “dual” del que hemos seguido para M .

Para calcular la cohomología singular no usaremos el complejo de todas las cadenas de simplices singulares diferenciables de B ; usaremos un subcomplejo adecuado.

Sea Δ es un símlice y Δ_1 y Δ_2 dos subsímlices. El *espacio de adjunción* de Δ_1 y Δ_2 es el subsímlice de Δ definido por

$$\Delta_1 * \Delta_2 = \{ty - (1 - t)x : t \in [0, 1], x \in \Delta_1, y \in \Delta_2\}.$$

Si $\Delta = \Delta_1 * \Delta_2$, diremos que Δ_1 y Δ_2 son caras opuestas, y en este caso, llamaremos *explosión de Δ* al espacio $\tilde{\Delta} = \Delta_1 \times C(\Delta_2)$. La *aplicación de explosión* es:

$$\mathcal{L}_\Delta: \Delta_1 \times C(\Delta_2) \longrightarrow \Delta_1 * \Delta_2$$

dada por $\mathcal{L}_\Delta(x, [y, t]) = ty - (1 - t)x$. Notamos que \mathcal{L}_Δ aplica difeomórficamente $\Delta_1 \times \Delta_2 \times (0, 1)$ en $\Delta - \Delta_2$.

Definición 3.31 Sea $(B - F, F)$ una pseudovariedad explotada, y $\varphi: \Delta \longrightarrow B$ un símlice singular. Decimos que φ es un *símlice singular levantable* si se cumple:

1) $\varphi^{-1}(F) = \Delta_S$ es una cara propia de Δ que llamaremos *cara singular*, y además, $\Delta = \Delta_R * \Delta_S$. Llamaremos a Δ_R *cara regular*.

2) Existe un símplice singular diferenciable $\tilde{\varphi}: \tilde{\Delta} \rightarrow \tilde{B}$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{B} \\ \mathcal{L}_B \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_\Delta \\ \Delta & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Denotamos el conjunto de cadenas de símplices levantables de B por $\Delta_*^L(B)$. Definimos la integral de una p -forma de Verona ω sobre el p -símplice singular levantable $\varphi: \Delta \rightarrow B$ mediante:

$$\int_\Delta \omega = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^* \tilde{\omega}$$

y extendemos por linealidad esta integración a $\Delta_*^L(B)$. Construimos la aplicación:

$$\Psi: \Omega_v^p(B) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_p^L(B), \mathbb{R})$$

definida por la fórmula

$$\Psi(\omega)(c) = \int_c \omega.$$

Se puede probar que Ψ induce un isomorfismo en cohomología. Finalmente, se demuestra que la inclusión ι de $\Delta_*^L(B)$ en el complejo de los símplices singulares $\Delta^*(B)$ induce una aplicación de cadenas

$$\iota^*: \text{Hom}(\Delta_*(B), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_*^L(B), \mathbb{R}),$$

que es un isomorfismo en cohomología. Hemos construido el siguiente diagrama de cuasiisomorfismos que demuestra el teorema 3.30:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(\Delta_*(B), \mathbb{R}) & \\ & \downarrow \iota^* & \\ \Omega_v^*(B) & \xrightarrow{\Psi} & \text{Hom}(\Delta_*^L(B), \mathbb{R}) \end{array} \quad (3.14)$$

3.4 Cohomología de Verona invariante

Retomamos en el hilo conductor del capítulo, la acción semilibre $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$. Intuitivamente, el complejo de Verona “se adapta” bien a la estratificación $(M - F, F)$ inducida por la acción. El complejo de las formas invariantes es adecuado para trabajar con \mathbb{S}^1 -variedades, como hemos visto en el capítulo anterior. Para obtener la sucesión de Gysin, la cohomología con la que trabajaremos en M será un híbrido de estas dos últimas: la *cohomología de Verona invariante*, que presentamos

en este apartado. Como las pruebas de los resultados para esta nueva cohomología se deducen directamente de los análogos en las cohomologías anteriores, ya detalladas, la exposición será breve.

Sea el espacio vectorial real de las p -formas de Verona invariantes de M , que denotamos por

$$I\Omega_v^p(M) = I\Omega^p(M - F) \cap \Omega_v^p(M).$$

Tenemos el *complejo de Verona invariante* de M , definido por

$$I\Omega_v^*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} I\Omega_v^p(M).$$

Como la diferencial y el producto exterior usuales son operaciones cerradas para los complejos $\Omega_v^*(M)$ e $I\Omega^*(M_F)$, también lo son para $I\Omega_v^*(M)$, que adquiere una estructura de álgebra diferencial graduada. Podemos considerar $I\Omega v^*$ como un funtor que va de la categoría de las \mathbb{S}^1 -variedades con explosión a la de las álgebras graduadas. Por lo tanto (y esto es lo que nos interesa), podemos hablar de la cohomología de Verona invariante de abiertos invariantes $U \subseteq M$. Los morfismos en la categoría de salida serán, obviamente, las aplicaciones diferenciables invariantes. Notamos que por estar definidas en todo M , estas aplicaciones son levantables (ver lema 3.23).

Como la diferencial es de orden dos, podemos hablar de la cohomología del complejo de Verona invariante.

Definición 3.32 El p -ésimo grupo de cohomología de Verona invariante de M es el espacio vectorial

$$IH_v^p(M) = \frac{\ker(d : I\Omega_v^p(M) \rightarrow I\Omega_v^{p+1}(M))}{\text{im}(d : I\Omega_v^{p-1}(M) \rightarrow I\Omega_v^p(M))}$$

En el siguiente ejemplo, calculamos la cohomología de Verona invariante del cono de una esfera.

Ejemplo 3.33 Sea la acción semilibre de \mathbb{S}^1 sobre $C(\mathbb{S}^k)$, con $k \geq 1$ dada por $z \cdot [x, t] = [z \cdot x, t]$. Es una acción semilibre con un punto fijo, que es el vértice del cono. Sea la explosión

$$\mathcal{L} : \mathbb{S}^k \times [0, \infty) \longrightarrow C(\mathbb{S}^k)$$

dada por $\mathcal{L}(x, t) = [x, t]$. Obtenemos, usando el argumento que hicimos en el ejemplo 3.17, la caracterización

$$I\Omega_v^p(C(\mathbb{S}^k)) = I\Omega^p(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}).$$

Notamos que la sucesión de complejos

$$0 \rightarrow I\Omega^*(\mathbb{S}^k \times [0, \infty), \mathbb{S}^k \times \{0\}) \rightarrow I\Omega^*(\mathbb{S}^k \times [0, \infty)) \rightarrow I\Omega^*(\mathbb{S}^k \times \{0\}) \rightarrow 0, \quad (3.15)$$

donde la primera aplicación es la inclusión y la segunda, la restricción, es exacta. En efecto, el único paso no trivial es la sobreyectividad de la restricción. Para probar dicha sobreyectividad, consideramos la proyección

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{S}^k \times [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{S}^k \times \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

que es invariante. Si ahora $\omega \in I\Omega^*(\mathbb{S}^k \times \{0\})$, entonces $\rho^*\omega$ es una extensión invariante a $\mathbb{S}^k \times [0, \infty)$, y la sucesión (3.15) es exacta.

Tomando la sucesión exacta larga que induce (3.15) en cohomología y razonando como en el ejemplo 3.17, deducimos que la cohomología de Verona invariante de $C(\mathbb{S}^k)$ es:

$$IH_v^p(C(\mathbb{S}^k)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos a continuación que el complejo de Verona invariante calcula la cohomología de de Rham.

Teorema 3.34 (Teorema de de Rham para cohomología de Verona invariante) *Sea $i: M - F \longrightarrow M$ la inclusión. El homomorfismo de cadenas*

$$i^*: I\Omega^*(M) \longrightarrow I\Omega_v^*(M)$$

es un cuasiisomorfismo.

Demostración: Vale la misma prueba que para el teorema 3.29, sin más que notar que todo el proceso es invariante. Para adaptar la prueba, hay que tener en cuenta las siguientes observaciones:

1) la cohomología de Verona invariante satisface el lema de Poincaré, pues según las pruebas de las proposiciones 3.25 y 2.10, las aplicaciones p_M y s son levantables e invariantes, y el operador homotopía K lleva formas de Verona invariantes en formas de Verona invariantes. También se satisface el axioma de homotopía para homotopías invariantes levantables;

2) la cohomología de Verona invariante también satisface la propiedad de Mayer-Vietoris, pues tenemos particiones de la unidad levantables e invariantes;

3) en la prueba del teorema 3.29, podemos suponer que el entorno tubular elegido $\Psi: N(F) \longrightarrow F$ es equivariante, de modo que los abiertos de la forma (3.13) también lo son. Así, el cubrimiento \mathcal{U} de M formado por todos los abiertos invariantes de $M - F$ y los abiertos invariantes antes referidos, forman un cubrimiento adecuado para aplicar el método de Bredon (lema 1.11);

4) para los abiertos invariantes de $M - F$, el teorema es válido, pues el complejo de Verona invariante de $M - F$ es exactamente $I\Omega^*(M - F)$, que por el teorema

2.16, tiene la misma cohomología que la de de Rham. Tan sólo nos falta probar el teorema para los entornos de la forma (3.13), que son del tipo $U \times C(\mathbb{S}^k)$, siendo U un abierto contráctil de F . Por homotopía, podemos reducirnos a probar el teorema en el caso $M = C(\mathbb{S}^k)$, lo cual hemos hecho ya en el ejemplo 3.33. ■

Reunimos los cuatro complejos de formas diferenciales de M que hemos manejado en el siguiente diagrama conmutativo de cuasiisomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} I\Omega_v^*(M) & \xrightarrow{\iota_1} & \Omega_v^*(M) \\ \downarrow \iota_3 & & \downarrow \iota_4 \\ I\Omega^*(M) & \xrightarrow{\iota_2} & \Omega^*(M) \end{array}$$

donde ι_1 y ι_2 son las inclusiones obvias, y ι_3 y ι_4 están inducidas por la inclusión $i: M - F \rightarrow M$.

3.5 Actores que intervienen en la sucesión de Gysin

A continuación, presentamos los actores que nos permitirán descomponer las formas invariantes de Verona de M para obtener la sucesión de Gysin.

3.5.1 Campo fundamental y métricas invariantes

Recordamos que el campo fundamental de la acción Φ , dado por

$$X_m = (\Phi_m)_* \left(\frac{d}{dt} \right) \Big|_1 \quad \text{para } m \in M,$$

es invariante y tangente a las órbitas; en particular, se anula en F . Como la explosión $\mathcal{L}_M: \widetilde{M} \rightarrow M$ es equivariante, entonces el campo fundamental $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ de la acción $\widetilde{\Phi}$ y X están \mathcal{L}_M -relacionados, es decir, $(\mathcal{L}_M)_* \widetilde{X} = X \circ \mathcal{L}_M$. Notamos que \widetilde{X} no se anula en \widetilde{M} , pues $\widetilde{\Phi}$ es libre.

Vamos a definir ahora dos métricas invariantes μ y $\widetilde{\mu}$ en $M - F$ y \widetilde{M} respectivamente. lo haremos con cuidado, de manera que se cumpla $\mathcal{L}^* \mu = \widetilde{\mu}$.

Primero vamos a definir las en cada entorno distinguido, y luego las pegamos con una partición de la unidad. Sea W un entorno distinguido de $m \in M$. Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{S}^k \times [0, \infty) & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \widetilde{W} \\ p \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_M \\ U \times C(\mathbb{S}^k) & \xrightarrow{\phi} & W \end{array}$$

Recordamos que la acción en W y \widetilde{W} quedaba determinada por una acción libre Φ_S en \mathbb{S}^k . Tomamos una métrica ν en \mathbb{S}^k invariante y normalizada (es decir, tal que la norma con ν del campo fundamental de Φ_S sea 1), y una métrica cualquiera μ_U en U . Definimos ahora sobre $\phi^{-1}(W - F)$ la métrica

$$\mu'_W = \mu_U + \nu + dr^2,$$

donde r es la segunda coordenada en el cono. Notamos que es invariante, y que la misma fórmula define una métrica $\widetilde{\mu}'_{\widetilde{W}}$ en $\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{W})$, tomando r como la coordenada de $[0, \infty)$. Los difeomorfismos equivariantes $\phi|_{\phi^{-1}(W-F)}$ y $\widetilde{\phi}$ inducen sendas métricas invariantes μ_W y $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}}$ en $W - F$ y \widetilde{W} , respectivamente. Es claro que $p^*\mu'_W = \widetilde{\mu}'_{\widetilde{W}}$, y por lo tanto, $\mathcal{L}^*\mu_W = \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}}$.

Sea ahora un cubrimiento $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j \in J}$ de M formado por entornos distinguidos y por $M - F$. Elegimos una métrica invariante normalizada μ_{M-F} en $M - F$ y su inducida $\mathcal{L}_M^*\mu_{M-F}$ en $\widetilde{M} - \partial\widetilde{M}$. Tomamos métricas μ_{W_j} y $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}_j}$ para todo $j \in J$, siguiendo el proceso anterior. Sea ahora una partición de la unidad invariante $\{f_j\}_{j \in J}$ subordinada al cubrimiento \mathcal{W} . Como la explosión es invariante, notamos que la familia $\{f_j \circ \mathcal{L}_M\}_{j \in J}$ es una partición de la unidad invariante subordinada al cubrimiento $\widetilde{\mathcal{W}} = \{\widetilde{W}_j\}_{j \in J}$ de \widetilde{M} . Definimos ahora

$$\mu = \sum_{j \in J} f_j \mu_{W_j} \quad \text{y} \quad \widetilde{\mu} = \sum_{j \in J} f_j \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}_j}.$$

Es inmediato comprobar que son invariantes, cumpliendo $\mathcal{L}_M^*\mu = \widetilde{\mu}$. Notamos, por último, que están normalizadas, es decir, que

$$\mu(X, X) = 1 \quad \text{y} \quad \widetilde{\mu}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = 1,$$

pues cada métrica localmente definida lo estaba.

3.5.2 Formas fundamentales y forma de Euler

Tenemos las formas fundamentales $\chi \in \Omega^1(M - F)$ y $\widetilde{\chi} \in \Omega^1(\widetilde{M})$ definidas por

$$\chi(Y) = \mu(X, Y) \quad \text{para } Y \in \mathfrak{X}(M - F)$$

$$\widetilde{\chi}(Z) = \widetilde{\mu}(\widetilde{X}, Z) \quad \text{para } Z \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}).$$

Claramente, ambas son invariantes, y cumplen $\mathcal{L}_M^*\chi = \widetilde{\chi}$, pues

$$\mathcal{L}_M^*\chi = \mathcal{L}_M^*i_X\mu = i_{\widetilde{X}}(\mathcal{L}_M)_*\mu = i_{\widetilde{X}}\widetilde{\mu} = \widetilde{\chi}.$$

Cabe preguntarse si χ es una forma de Verona.

Lema 3.35 *La forma fundamental χ no es de Verona.*

Demostración: Si χ fuera de Verona, induciría en F una forma χ_F tal que $\tilde{\chi}|_{\partial\tilde{M}} = \mathcal{L}_M^* \chi_F$. Aplicando ahora la contracción i_X a ambos lados, tendríamos que $1 = 0$, y por lo tanto, χ no es de Verona, a pesar de ser levantable a $\tilde{\chi}$. ■

Como la acción en $M - F$ es libre, la 2-forma $d\chi$ es una forma básica, es decir, $\pi^* \mathbf{e} = d\chi$, donde $\mathbf{e} \in \Omega^2(B - F)$ es la forma de Euler. Como la acción en \tilde{M} es libre, también se tiene una forma de Euler $\tilde{\mathbf{e}} \in \Omega^2(\tilde{B})$. Por la conmutatividad del diagrama (3.10), tenemos

$$\tilde{\pi}^*(\tilde{\mathbf{e}}|_{\partial\tilde{B}}) = (\tilde{\pi}^* \tilde{\mathbf{e}})|_{\partial\tilde{M}} = d\tilde{\chi}|_{\partial\tilde{M}} = d\mathcal{L}_M^* \chi = \mathcal{L}_M^* d\chi = \mathcal{L}_M^* \pi^* \mathbf{e} = \tilde{\pi}^* \mathcal{L}_B^* \mathbf{e}.$$

Como $\tilde{\pi}^*$ es inyectiva, se cumple $\tilde{\mathbf{e}}|_{\partial\tilde{B}} = \mathcal{L}_B^* \mathbf{e}$, con lo que \mathbf{e} es levantable.

Lema 3.36 *Si la codimensión de alguna componente conexa de F es mayor que dos, la forma de Euler \mathbf{e} no es de Verona.*

Demostración: Sea F_1 una componente de codimensión $2n + 2$, con $n \geq 1$, y sea $x \in F_1$. Tomamos un entorno distinguido de $y = \pi(x)$ en B . Al restringir el diagrama (3.6) a la fibra de y en $\partial\tilde{B}$, obtenemos

$$\begin{array}{ccc} \{y\} \times CP^n \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \partial\tilde{B} \\ p \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_B \\ y & \xrightarrow{\varphi} & F \end{array}$$

Si \mathbf{e} fuese de Verona, tendríamos una forma \mathbf{e}_F de F tal que $\tilde{\mathbf{e}}|_{\partial\tilde{B}} = \mathcal{L}_B^* \mathbf{e}_F$. Entonces, como obviamente p^* es la aplicación nula, tenemos que

$$\tilde{\varphi}^* \tilde{\mathbf{e}}|_{\partial\tilde{B}} = \tilde{\varphi}^* \mathcal{L}_B^* \mathbf{e}_F = p^* \varphi^* \mathbf{e}_F = 0.$$

Por otro lado, tomando un entorno distinguido de x en M , y restringiéndonos a $\partial\tilde{M}$, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{2n+1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \partial\tilde{M} \\ \pi_S \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ CP^n & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \partial\tilde{B} \end{array}$$

Tenemos una acción libre Φ_S en \mathbb{S}^{2n+1} . Recordando la construcción de la métrica en M , elegimos una métrica invariante normalizada ν en \mathbb{S}^{2n+1} . Tenemos definidos

para Φ_S , el campo fundamental X_S , la forma fundamental χ_S y la forma de Euler correspondiente \mathbf{e}_S . Por la equivarianza de $\tilde{\psi}$, obtenemos que \tilde{X} y X_S están $\tilde{\psi}$ -relacionados. De la construcción de μ se sigue que $\psi^*\tilde{\mu} = \nu$, y por lo tanto, $\tilde{\psi}^*\tilde{\chi} = \chi_S$. Por último, deducimos que

$$\pi_S^*\mathbf{e}_S = d\tilde{\psi}^*\tilde{\chi} = \tilde{\psi}^*\tilde{\pi}^*\tilde{\mathbf{e}} = \pi_S^*\tilde{\varphi}^*\tilde{\mathbf{e}} = 0$$

de donde concluimos que $\mathbf{e}_S = 0$, lo cual es una contradicción. En efecto, según el apartado 2.5.1, la clase de Euler $[\mathbf{e}_S]$ no depende de la métrica normalizada elegida, y como $n \geq 1$, según calculamos en el apartado 2.6, tenemos que $[\mathbf{e}_S]$ es un generador de $H^2(CP^n) \neq 0$, y en consecuencia, \mathbf{e}_S no puede ser nula. ■

3.6 Sucesión de Gysin

En este apartado llegamos a los resultados centrales de esta memoria. La sucesión de Gysin se construye a partir de la descomposición de las formas de Verona invariantes de M en términos de las formas de Verona de B . Necesitaremos usar la cohomología relativa de Verona de B , que pasamos a definir.

Definición 3.37 Llamamos *complejo de Verona del par* (B, F) al álgebra diferencial graduada

$$\Omega_v^*(B, F) = \{\omega \in \Omega_v^*(B) : \omega_F = 0\}$$

La estructura de álgebra diferencial graduada viene dada por la diferencial y el producto exteriores. Notamos que este complejo es isomorfo a $\Omega^*(\tilde{B}, \partial\tilde{B})$. Como la diferencial es de orden dos, tenemos definidos los grupos de cohomología de Verona del par B, F .

Definición 3.38 El *p-ésimo grupo de cohomología de Verona del par* (B, F) es el espacio vectorial

$$H_v^p(B, F) = \frac{\ker(d : \Omega_v^p(B, F) \rightarrow \Omega_v^{p+1}(B, F))}{\text{im}(d : \Omega_v^{p-1}(B, F) \rightarrow \Omega_v^p(B, F))}$$

Se puede probar que la cohomología de Verona del par (B, F) es isomorfa a la cohomología de de Rham del par (B, F) . La demostración es análoga a la del teorema 3.30. También se puede describir la cohomología de un par (también llamada *relativa*) para la cohomología singular y la singular diferenciable, escribir la sucesión exacta del par y utilizar el lema de los cinco dos veces; una para cada cuasiisomorfismo del diagrama (3.14). Detallaremos más este método en el apartado 4.1.

La sucesión de Gysin se deduce del siguiente resultado de descomposición:

Teorema 3.39 *Toda forma de Verona invariante de M se puede escribir de manera única como $\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma$, donde $\alpha \in \Omega_v^*(B)$ y $\gamma \in \Omega_v^*(B, F)$. Tenemos, por lo tanto, el isomorfismo diferencial:*

$$(I\Omega_v^*(M), d) \cong (\Omega_v^*(B) \oplus \Omega_v^{*-1}(B, F), D),$$

donde $D(\alpha, \gamma) = (d\alpha + \gamma \wedge e, -d\gamma)$.

Demostración: Como la acción en $M - F$ es libre, por el teorema 2.26, tenemos

$$I\Omega_v^*(M) \subseteq I\Omega^*(M - F) \cong \Omega^*(B - F) \oplus \Omega^{*-1}(B - F),$$

Sea ω una forma de Verona invariante. Entonces, existe una descomposición única

$$\omega = \pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma,$$

donde α y γ son formas de $B - F$. Veamos que son levantables. En efecto, como ω es de Verona, es levantable, y como la acción en \widetilde{M} es libre,

$$\widetilde{\omega} = \widetilde{\pi}^*A + \widetilde{\chi} \wedge \widetilde{\pi}^*C,$$

donde $A, C \in \Omega^*(\widetilde{B})$. De la conmutatividad del diagrama (3.10), se sigue que

$$\widetilde{\pi}^*(\mathcal{L}_B^*\alpha) + \widetilde{\chi} \wedge \widetilde{\pi}^*(\mathcal{L}_B^*\gamma) = \mathcal{L}_M^*\omega = \widetilde{\omega}|_{\widetilde{M}-\partial\widetilde{M}} = \widetilde{\pi}^*(A|_{\widetilde{B}-\partial\widetilde{B}}) + \widetilde{\chi} \wedge \widetilde{\pi}^*(C|_{\widetilde{B}-\partial\widetilde{B}}),$$

y de la unicidad de la descomposición, obtenemos que

$$A|_{\widetilde{B}-\partial\widetilde{B}} = \mathcal{L}_B^*\alpha \quad \text{y} \quad C|_{\widetilde{B}-\partial\widetilde{B}} = \mathcal{L}_B^*\gamma,$$

luego α y γ son levantables, y denotamos $A = \widetilde{\alpha}$ y $C = \widetilde{\gamma}$.

Afirmamos ahora que $\widetilde{\gamma}|_{\partial\widetilde{B}} = 0$. En efecto, recordamos que la restricción del campo fundamental \widetilde{X} a $\partial\widetilde{M}$ es tangente a las órbitas y que está \mathcal{L}_M -relacionado con X , el cual se anula en F . Esto implica que $\widetilde{X}|_{\partial\widetilde{M}} \in \ker(\mathcal{L}_M)_* \cap \ker \widetilde{\pi}_*$. Aplicando la contracción $i_{\widetilde{X}}$ a la identidad

$$\widetilde{\omega}|_{\partial\widetilde{M}} = \widetilde{\pi}^*\widetilde{\alpha}|_{\partial\widetilde{B}} + \widetilde{\chi} \wedge \widetilde{\pi}^*\widetilde{\gamma}|_{\partial\widetilde{B}},$$

la cual es cierta por la conmutatividad de (3.10), es inmediato que $\widetilde{\pi}^*\widetilde{\gamma}|_{\partial\widetilde{B}} = 0$. Como $\widetilde{\pi}^*$ es inyectiva, concluimos que $\gamma \in \Omega_v^*(B, F)$.

Para ver que α es de Verona, por el diagrama (3.10) tenemos

$$\widetilde{\pi}^*\mathcal{L}_B^*\omega_F = \mathcal{L}_M^*\omega_F = \widetilde{\omega}|_{\partial\widetilde{M}} = \widetilde{\pi}^*\widetilde{\alpha}|_{\partial\widetilde{B}},$$

de donde deducimos que $\alpha \in \Omega_v^*(B)$, con $\alpha_F = \omega_F$.

Para terminar, notamos que la descomposición del enunciado es única, pues si se da $\pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma = 0$, aplicando i_X , obtenemos que $\gamma = 0$, y por ende, también $\alpha = 0$. ■

Construimos a continuación la *sucesión de Gysin* para el caso semilibre.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(B) & \xrightarrow{\pi^*} & I\Omega^*(M) & \xrightarrow{\mathfrak{f}} & \Omega^{*-1}(B) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\alpha, \gamma) & \longmapsto & S(\gamma) & & \\ & & \alpha & \longmapsto & (\alpha, 0) & & & & \end{array} \quad (3.16)$$

donde S es el operador de signo que usábamos en el caso libre para que \mathfrak{f} sea una aplicación de cadenas. La demostración del siguiente teorema se sigue directamente de la del teorema 2.27.

Teorema 3.40 *La sucesión de Gysin (3.16) es exacta.*

La sucesión exacta corta de complejos (3.16) induce una sucesión exacta larga en cohomología también llamada sucesión de Gysin.

$$\dots \longrightarrow H_v^p(B) \xrightarrow{\pi^*} IH_v^p(M) \xrightarrow{\mathfrak{f}} H_v^{p-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H_v^{p+1}(B) \longrightarrow \dots \quad (3.17)$$

Notamos que tanto la cohomología de Verona como la de Verona invariante son isomorfas a la cohomología singular, y que esta sucesión generaliza la que obteníamos en el caso libre, pues el carácter libre implica $F = \emptyset$, y la sucesión exacta corta (3.16) degenera en la sucesión (2.5). Antes de calcular el homomorfismo de conexión, es importante hacer algunos comentarios sobre la estructura multiplicativa de la sucesión de Gysin.

Al igual que ocurría en el caso libre (ver apartado 2.5.2), la sucesión de Gysin (3.16) es una sucesión de espacios vectoriales y, también de $\Omega_v^*(B)$ -módulos. Para ello, consideramos en $\Omega_v^*(B)$ y $\Omega_v^*(B - F)$ el producto exterior por la derecha (notamos que al multiplicar $\alpha \in \Omega_v^*(B)$ y $\beta \in \Omega_v^*(B - F)$, no nos salimos de $\Omega_v^*(B - F)$), y en $I\Omega_v^*(M)$, el producto dado por

$$(\alpha, \gamma) \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta, \gamma \wedge S(\beta)),$$

donde $(\alpha, \gamma) \in I\Omega_v^*(M)$ y $\beta \in \Omega_v^*(B)$. Es inmediato comprobar que las aplicaciones π^* y \mathfrak{f} son homomorfismos de $\Omega_v^*(B)$ -módulos. De este modo, la sucesión (3.16) es una sucesión exacta de $\Omega_v^*(B)$ -módulos, y la sucesión (3.17), de $H_v^*(B)$ -módulos.

Más aún, podemos considerar el complejo de las formas diferenciables levantables, que denotaremos por

$$\Omega_L^*(B) = \{\omega \in \Omega^*(B - F) : \omega \text{ es levantable a } \tilde{B}\}.$$

Notamos que $\Omega_v^*(B, F)$ y $\Omega_v^*(B)$ son subcomplejos de $\Omega_L^*(B)$; es más, $\Omega_v^*(B, F)$ es un ideal de $\Omega_L^*(B)$. En otras palabras, $\Omega_v^*(B, F)$ es un $\Omega_L^*(B)$ -módulo. En efecto, si $\alpha \in \Omega_v^*(B, F)$ y $\beta \in \Omega_L^*(B)$, tenemos que $\widetilde{\alpha \wedge \beta} = \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}$, y por lo tanto,

$$(\widetilde{\alpha \wedge \beta})|_{\partial \bar{B}} = 0 \wedge \widetilde{\beta}|_{\partial \bar{B}} = 0.$$

La consecuencia crucial es que podemos multiplicar las formas de $\Omega_v^*(B, F)$ por la forma de Euler ϵ (que es levantable) sin salirnos de $\Omega_v^*(B, F)$ y, en particular, de $\Omega_v^*(B)$. Teniendo esto en cuenta, podemos proceder como en el apartado 2.5 y deducir que el homomorfismo de conexión es, salvo el signo, la multiplicación por la clase de Euler $[\epsilon]$ dada por

$$\varepsilon([\gamma]) = [S(\gamma) \wedge \epsilon].$$

Capítulo 4

Algunas aplicaciones

4.1 Otras sucesiones “tipo Gysin”

Sea una acción diferenciable semilibre Φ de \mathbb{S}^1 sobre M , y sea $\pi: M \rightarrow B$ la proyección sobre el espacio de órbitas. La sucesión de Gysin (3.17) relaciona la cohomología de M con la de B y la del par (B, F) . En este apartado deduciremos nuevas sucesiones exactas ligadas a la sucesión de Gysin, donde juega un papel importante la subvariedad de los puntos fijos F . Antes, describiremos la sucesión exacta de los pares (M, F) y (B, F) .

4.1.1 Cohomología relativa de Verona

En el apartado 3.6 ya presentamos la cohomología de Verona del par (B, F) , que era isomorfa a la cohomología singular. A continuación definimos lo análogo para M .

Definición 4.1 Llamamos *complejo de Verona invariante* del par (M, F) al álgebra diferencial graduada

$$I\Omega_v^*(M, F) = \{\omega \in I\Omega_v^*(M) : \omega_F = 0\}$$

La estructura de álgebra diferencial graduada viene dada por la diferencial y el producto exteriores. Notamos que este complejo es isomorfo a $I\Omega^*(\widetilde{M}, \partial\widetilde{M})$. Como la diferencial es de orden dos, podemos definir los grupos de cohomología de Verona invariante del par (M, F) .

Definición 4.2 El p -ésimo grupo de cohomología de Verona invariante del par (M, F) es el espacio vectorial

$$IH_v^p(M, F) = \frac{\ker(d : I\Omega_v^p(M, F) \rightarrow I\Omega_v^{p+1}(M, F))}{\text{im}(d : I\Omega_v^{p-1}(M, F) \rightarrow I\Omega_v^p(M, F))}$$

Para ver que la cohomología de Verona invariante del par (M, F) es isomorfa a la cohomología de de Rham de (M, F) , se puede hacer una prueba similar a la del teorema 3.39 utilizando la estructura local, o bien utilizar la sucesión exacta del par (M, F) , que es lo que haremos a continuación.

Definimos las aplicaciones:

$$\rho_M: I\Omega_v^*(M) \longrightarrow \Omega^*(F) \quad \text{y} \quad \rho_B: \Omega_v^*(B) \longrightarrow \Omega^*(F)$$

dadas por $\rho_M(\omega) = \omega_F$ y $\rho_B(\beta) = \beta_F$. Si expresamos $\pi^*\alpha + \chi \wedge \pi^*\gamma = (\alpha, \gamma) \in I\Omega_v^*(M)$, entonces tenemos $\rho_M(\alpha, \beta) = \alpha_F$. Es inmediato que ρ_M y ρ_B son aplicaciones de cadenas, y que $\rho_M \circ \pi^* = \rho_B$.

Proposición 4.3 *Las sucesiones de complejos de cadenas*

$$0 \longrightarrow I\Omega_v^*(M, F) \xrightarrow{\iota_M} I\Omega_v^*(M) \xrightarrow{\rho_M} \Omega^*(F) \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

y

$$0 \longrightarrow \Omega_v^*(B, F) \xrightarrow{\iota_B} \Omega_v^*(B) \xrightarrow{\rho_B} \Omega^*(F) \longrightarrow 0, \quad (4.2)$$

donde ι_M y ι_B son las inclusiones, son exactas.

Demostración: Todos los pasos de la exactitud son directos, salvo la sobreyectividad de ρ_M y ρ_B . Sea γ una forma de F . Tomamos un entorno tubular equivariante $\Psi: N(F) \longrightarrow M$, y un entorno distinguido W en M , asociado a Ψ (ver el apartado 3.2.2). Entonces, $\pi(W)$ es un entorno distinguido de B , y tenemos los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{p_U} & U \times C(\mathbb{S}^{2n+1}) & \xrightarrow{\phi} & W \\ \downarrow 1_U & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ U & \xleftarrow{p'_U} & U \times C(CP^n) & \xrightarrow{\psi} & \pi(W) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\tilde{p}_U} & U \times \mathbb{S}^{2n+1} \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \widetilde{W} \\ \downarrow 1_U & & \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ U & \xleftarrow{\tilde{p}'_U} & U \times CP^n \times [0, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \widetilde{\pi(W)} \end{array}$$

donde $U \subseteq F$, las aplicaciones p_U, p', \tilde{p}_U y \tilde{p}'_U son las proyecciones sobre U , y $\phi, \psi, \tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ son difeomorfismos. La forma $\gamma \in \Omega^*(F)$ induce por restricción una forma $\gamma_U \in \Omega^*(U)$. Tenemos definidas entonces las formas:

$$\begin{aligned} ((\phi^{-1})^* \circ p_U^*)\gamma_U &\in I\Omega_v^*(W) \\ ((\psi^{-1})^* \circ (p'_U)^*)\gamma_U &\in \Omega_v^*(\pi(W)) \\ ((\tilde{\phi}^{-1})^* \circ \tilde{p}_U^*)\gamma_U &\in \Omega^*(\widetilde{W}) \\ ((\tilde{\psi}^{-1})^* \circ (\tilde{p}'_U)^*)\gamma_U &\in \Omega^*(\widetilde{\pi(W)}) \end{aligned}$$

Podemos hacer este proceso en una familia de entornos distinguidos (asociados a Ψ) que cubra $\widetilde{\partial M}$. Como todos están asociados a la misma aplicación tubular, es claro que mediante la anterior construcción quedan definidas en un entorno de cada entorno tubular. Mediante un proceso de pegado con una partición de la unidad invariante y levantable como la que ya usamos en el apartado 3.5.1, quedan definidas las formas:

$$\begin{aligned}\omega &\in I\Omega_v^*(M) \\ \beta &\in \Omega_v^*(B) \\ \widetilde{\omega} &\in \Omega^*(\widetilde{M}) \\ \widetilde{\beta} &\in \Omega^*(\widetilde{\pi(W)})\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que ω y β son levantables a $\widetilde{\omega}$ y $\widetilde{\beta}$, respectivamente, así como ver que $\omega_F = \beta_F = \gamma$. Por lo tanto, ω y γ son de Verona, y

$$\rho_M(\omega) = \rho_B(\beta) = F.$$

■

Las sucesiones (4.1) y (4.2) inducen en cohomología las siguientes sucesiones exactas largas:

$$\begin{aligned}\dots &\longrightarrow IH_v^p(M, F) \xrightarrow{\iota_M} IH_v^p(M) \xrightarrow{\rho_M} H^p(F) \xrightarrow{\delta_M} IH_v^{p+1}(M, F) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H_v^p(B, F) \xrightarrow{\iota_B} H_v^p(B) \xrightarrow{\rho_B} H^p(F) \xrightarrow{\delta_M} H_v^{p+1}(B, F) \longrightarrow \dots\end{aligned}$$

que llamamos *sucesiones exactas largas de los pares* (M, F) y (B, F) , respectivamente.

Observación 4.4 La cohomología del complejo $I\Omega_v^*(M, F)$ es isomorfa a la del complejo de de Rham $\Omega^*(M, F)$. En efecto, el procedimiento que hemos usado sirve para construir la sucesión exacta de un par en cohomología invariante (para extender una forma de F invariante a M basta tomar un entorno tubular equivariante de F). Consideramos el diagrama conmutativo de filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I\Omega_v^*(M, F) & \xrightarrow{\iota_M} & I\Omega_v^*(M) & \xrightarrow{\rho_M} & \Omega^*(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow i_1^* & & \uparrow i_2^* & & \uparrow 1_F^* & & \\ 0 & \longrightarrow & I\Omega^*(M, F) & \xrightarrow{\iota_M} & I\Omega^*(M) & \xrightarrow{\rho_M} & \Omega^*(F) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde i_1^* e i_2^* están inducidas por la inclusión $i: M - F \longrightarrow M$. Como i_2 y 1_F^* son cuasiisomorfismos, aplicando el lema de los cinco en cohomología, deducimos que i_1^* también lo es.

4.1.2 Sucesión de Smith-Gysin

En lo que sigue, por comodidad, designaremos los grupos de cohomología de Verona y de Verona invariante con la misma notación que usamos para los grupos de cohomología de de Rham, sabiendo que todos ellos son isomorfos a los correspondientes en cohomología singular.

En las condiciones del apartado anterior, escribimos las sucesiones exactas largas de Gysin, del par (M, F) y del par (B, F) :

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{\pi^*} H^p(M) \xrightarrow{\mathcal{J}} H^{p-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{p+1}(B) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H^p(M, F) \xrightarrow{\iota_M} H^p(M) \xrightarrow{\rho_M} H^p(F) \xrightarrow{\delta_M} H^{p+1}(M, F) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H^p(B, F) \xrightarrow{\iota_B} H^p(B) \xrightarrow{\rho_B} H^p(F) \xrightarrow{\delta_B} H^{p+1}(B, F) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Podemos organizar estas tres sucesiones en el siguiente *diagrama trenzado*:

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_M & & \mathcal{J} & & \varepsilon & & \\ & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ H^{p-1}(F) & & & H^p(M, F) & & H^{p-1}(B, F) & & & H^{p+1}(B) \\ & \delta_B \searrow & & \nearrow \iota_M & & \searrow \mathcal{J} & & \nearrow \iota_B & \\ & H^p(B, F) & & H^p(M) & & H^{p+1}(B, F) & & & \\ & \nearrow \varepsilon & \nearrow \iota_B & \nearrow \rho_M & \nearrow \delta_B & \nearrow \pi^* & & & \\ H^{p-2}(B, F) & & & H^p(B) & & H^p(F) & & & H^{p+1}(M, F) \\ & \searrow \varepsilon & & \searrow \pi^* & & \searrow \rho_B & & \searrow \delta_M & \\ & & & & & & & & \end{array}$$

En el diagrama hay cuatro sucesiones trenzadas entre sí, que llamaremos *hebras*. La hebra que empieza por la flecha δ_M es la sucesión de Gysin, la que comienza por δ_B es la sucesión del par (M, F) y la que empieza por $\varepsilon: H^{p-2}(B, F) \longrightarrow H^p(B)$ es la del par (B, F) . Hemos completado la trenza con las aplicaciones de la hebra restante, de manera que el diagrama resultante sea conmutativo. Para ello, la aplicación ε denotará la multiplicación por el opuesto de la clase de Euler, es decir,

$$\varepsilon(\gamma) = -[S(\gamma) \wedge \mathfrak{e}] \quad \text{para } \gamma \in H^*(B, F)$$

En efecto, todas las comprobaciones son inmediatas salvo la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{array}{ccc} H^p(M) & \xrightarrow{\mathcal{J}} & H^{p-1}(B, F) \\ \rho_M \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ H^p(F) & \xrightarrow{\rho_B} & H^{p+1}(B, F) \end{array}$$

Sea (α, γ) un ciclo de Verona invariante de M . Entonces, se cumple

$$d\alpha = -\gamma \wedge \mathfrak{e}. \quad (4.3)$$

Tenemos, por un lado,

$$\varepsilon \circ \oint [(\alpha, \gamma)] = \varepsilon([S(\gamma)]) = -[\gamma \wedge \mathbf{e}].$$

Por otro lado,

$$\delta_B \rho_M([(\alpha, \gamma)]) = \delta_B([\alpha_F]).$$

Para calcular el homomorfismo de conexión δ_B , se toma una antiimagen de α_F para la aplicación ρ_B , y tomamos la diferencial. Notamos que una antiimagen válida es α , y por la condición (4.3), obtenemos

$$\delta_B([\alpha_F]) = [-\gamma \wedge \mathbf{e}]$$

Notamos que la hebra (4) es de orden dos, lo cual se deduce directamente de la conmutatividad del diagrama, y de la identidad

$$\pi^* \varepsilon(\gamma) = -[(\gamma \wedge \mathbf{e}, 0)] = -[d(0, \gamma)] = 0 \in H^*(M) \quad \text{para } \gamma \in H^*(B, F).$$

Una sencilla caza de diagrama (ver [Bre2], pag. 189) demuestra el siguiente hecho puramente algebraico: si en una trenza conmutativa de grupos tres hebras son exactas y la cuarta es de orden dos, entonces la cuarta hebra es exacta. Por lo tanto, hemos deducido la siguiente sucesión exacta larga que llamaremos *sucesión de Gysin relativa*:

$$\dots \longrightarrow H^p(B, F) \xrightarrow{\pi^*} H^p(M, F) \xrightarrow{\oint} H^{p-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{p+1}(B, F) \longrightarrow \dots$$

Notamos que la sucesión de Gysin relativa se puede deducir también de la siguiente sucesión exacta corta de complejos de formas diferenciales:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_v^*(B, F) & \xrightarrow{\pi^*} & I\Omega_v^*(M, F) & \xrightarrow{\oint} & \Omega_v^{*-1}(B, F) & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha & \longmapsto & (\alpha, \gamma) & \longmapsto & S(\gamma) & & \\ & & & & (\alpha, 0) & & & & \end{array} \quad (4.4)$$

La trenza contiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(M) & \xrightarrow{\oint} & H^{p+1}(B, F) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^{p+1}(B) \\ 1_B^* \downarrow & & \rho_M \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \downarrow 1_B^* \\ H^p(B) & \xrightarrow{\rho_B} & H^p(F) & \xrightarrow{\delta_B} & H^{p+1}(B, F) & \xrightarrow{\iota_B} & H^{p+1}(B) \end{array}$$

Como 1_B^* es un isomorfismo, aplicando el lema de Barratt-Whitehead (ver [Rot], pag. 107), deducimos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\dots \longrightarrow H^p(M) \xrightarrow{(\mathcal{f}, \rho_M)} H^{p-1}(B, F) \oplus H^p(F) \xrightarrow{\varepsilon - \delta_B} H^{p+1}(B, F) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+1}(M) \longrightarrow \dots \quad (4.5)$$

conocida como *sucesión de Smith-Gysin*, la cual también se puede deducir de la siguiente sucesión exacta de complejos de formas diferenciales:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_v^*(B, F) & \xrightarrow{\pi^*} & I\Omega_v^*(M) & \xrightarrow{(\mathcal{f}, \rho_M)} & \Omega_v^{*-1}(B, F) \oplus \Omega^*(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\alpha, \gamma) & \longmapsto & (S(\gamma), \alpha_F) & & \\ & & \alpha & \longmapsto & (\alpha, 0) & & & & \end{array} \quad (4.6)$$

Podemos proceder de igual manera con el siguiente diagrama conmutativo, también contenido en la trenza:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{p-2}(B, F) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^p(B, F) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(M, F) & \xrightarrow{\mathcal{f}} & H^{p-1}(B, F) \\ \downarrow 1_B^* & & \downarrow \iota_B & & \downarrow \iota_M & & \downarrow 1_B^* \\ H^{p-2}(B, F) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^p(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^p(M) & \xrightarrow{\mathcal{f}} & H^{p-1}(B, F) \end{array}$$

Aplicando el lema de Barratt-Whitehead, obtenemos una nueva sucesión exacta larga:

$$\dots \longrightarrow H^p(B, F) \xrightarrow{(\pi^*, \iota_B)} H^p(M, F) \oplus H^p(B) \xrightarrow{\iota_M - \pi^*} H^p(M) \xrightarrow{\varepsilon \circ \mathcal{f}} H^{p+1}(B, F) \longrightarrow \dots$$

que, a su vez, también puede deducirse de la sucesión exacta corta de complejos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_v^*(B, F) & \xrightarrow{(\pi^*, \iota_B)} & I\Omega_v^*(M, F) \oplus \Omega_v^*(B) & \xrightarrow{\iota_M - \pi^*} & \Omega_v^*(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\omega, \beta) & \longmapsto & (\omega - \pi^* \beta) & & \\ & & \gamma & \longmapsto & (\pi^* \gamma, \gamma) & & & & \end{array} \quad (4.7)$$

4.2 Números de Betti

El *p-ésimo número de Betti* de un espacio topológico M es la dimensión del espacio vectorial real $H^p(M)$, que denotaremos por b_M^p . Análogamente, definimos los números de Betti un par (M, F) mediante $b_{(B, F)}^p = \dim H^p(B, F)$. La *característica de Euler-Poincaré* de un espacio M es un invariante clásico que se define como la suma

$$\chi_M = \sum_{p \geq 0} (-1)^p b_M^p.$$

Se puede probar con técnicas de teoría de Morse y un argumento de Mayer-Vietoris que en el caso de una acción diferenciable de \mathbb{S}^1 sobre M , la característica de Euler-Poincaré de M es la misma que la de la subvariedad de los puntos fijos F . En este apartado, probaremos la siguiente desigualdad referente a los números de Betti de M y de F , usando la sucesión de Gysin del caso semilibre.

Proposición 4.5 *Si $\Phi: \mathbb{S}^1 \times M \rightarrow M$ es una acción diferenciable semilibre y F es la subvariedad de los puntos fijos, entonces*

$$\sum_{i \geq 0} b_F^{p+2i} \leq \sum_{i \geq 0} b_M^{p+2i} \quad \forall p \in \mathbb{Z}$$

Para la prueba, vamos a manejar las sucesiones exactas mediante los *polinomios de Poincaré*, una manera sintética de expresar la cohomología. En lugar de trabajar con sucesiones exactas, trabajaremos con relaciones entre los polinomios de Poincaré.

Recordamos las sucesiones de Gysin y del par (B, F) :

$$\dots \rightarrow H^i(B) \xrightarrow{\pi^*} H^i(M) \xrightarrow{\mathcal{f}} H^{i-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(B) \rightarrow \dots \quad (4.8)$$

$$\dots \rightarrow H_v^i(B, F) \xrightarrow{\iota_B} H^i(B) \xrightarrow{\rho_B} H^i(F) \xrightarrow{\delta_B} H_v^{i+1}(B, F) \rightarrow \dots \quad (4.9)$$

Definimos a continuación los polinomios de Poincaré como los polinomios formales:

$$\begin{aligned} P_M &= \sum_{i \geq 0} b_M^i t^i; \\ P_B &= \sum_{i \geq 0} b_B^i t^i; \\ P_{(B,F)} &= \sum_{i \geq 0} b_{(B,F)}^i t^i; \\ P_\pi &= \sum_{i \geq 0} b_\pi^i t^i; \\ P_{\rho_B} &= \sum_{i \geq 0} b_{\rho_B}^i t^i, \end{aligned}$$

donde $b_\pi^i = \dim \text{im}(\pi^{*i} : H^i(B) \rightarrow H^i(M))$ y $b_{\rho_B}^i = \dim \text{im}(\rho_B^i : H^i(B) \rightarrow H^i(F))$. Con esta notación, la cohomología de una variedad se expresa directamente mediante un polinomio. Por ejemplo,

$$P_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n} = 1 + t^2 + \dots + t^{2n} \quad \text{y} \quad P_{\mathbb{S}^n} = 1 + t^n.$$

La sucesión (4.8) se escinde en sucesiones exactas:

$$0 \rightarrow \text{im } \pi^{*i} \xrightarrow{\pi^{*i}} H^i(M) \xrightarrow{\mathcal{f}} H^{i-1}(B, F) \xrightarrow{\varepsilon} H^{i+1}(B) \xrightarrow{\pi^{*i+1}} \text{im } \pi^{*i+1} \rightarrow 0$$

para cada $i \in \mathbb{Z}$. Como en una sucesión exacta de espacios vectoriales, las dimensiones de los espacios en lugares impares suman lo mismo que las de los lugares pares, tenemos la igualdad:

$$(1+t)P_\pi + t^2P_{(B,F)} = tP_M + P_B, \quad (4.10)$$

que expresa las relaciones entre las dimensiones de los espacios que aparecen en la sucesión de Gysin. Procediendo de igual manera con la sucesión (4.9), obtenemos la relación:

$$(1+t)P_{\rho_B} + P_{(B,F)} = tP_F + P_B. \quad (4.11)$$

Restando estas dos expresiones, deducimos:

$$(1+t)(P_{\rho_B} - P_\pi) + (1-t^2)P_{(B,F)} = t(P_F - P_M), \quad (4.12)$$

y dividimos a ambos lados por $(1-t^2)$:

$$\frac{1}{1-t}(P_{\rho_B} - P_\pi) + P_{(B,F)} = \frac{t}{1-t^2}(P_F - P_M). \quad (4.13)$$

Podemos ver esta fórmula como una igualdad de series formales, o bien interpretar los polinomios de Poincaré como funciones de variable t . En ese caso, la identidad (4.13) es válida si $t \neq 1$. Haciendo los desarrollos en serie de Laurent para $t > 1$, obtenemos:

$$\frac{t}{t^2-1} = -\sum_{i \geq 0} t^{-2i-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{t-1} = \sum_{i \geq 0} t^{-i-1} \quad \text{para } t > 1,$$

y sustituyendo en (4.13), se sigue que:

$$\sum_{i \geq 0} (b_{\rho_B}^{p+i} - b_\pi^{p+i}) + b_{(B,F)}^{p-1} = \sum_{i \geq 0} b_F^{p+2i} - \sum_{i \geq 0} b_M^{p+2i}.$$

Recordamos (ver apartado 4.1.1) que se tiene la relación $\rho_M \circ \pi^* = \rho_B$. Por lo tanto, $\ker \pi^* \leq \ker \rho_B$, y esto implica que $P_\pi \geq P_{\rho_B}$ (es decir, para todo $i \geq 0$, se tiene $b_\pi^i \geq b_{\rho_B}^i$), con lo que

$$\sum_{i \geq 0} b_M^{p+2i} - \sum_{i \geq 0} b_F^{p+2i} \geq b_{(B,F)}^{p-1} \geq 0,$$

lo cual completa la demostración de la proposición 4.5.

4.3 Acciones sobre el espacio proyectivo complejo

En este apartado vamos a calcular la cohomología del espacio de órbitas de ciertas acciones semilibres sobre el espacio proyectivo complejo. Sea (k_1, \dots, k_l) una tupla de números naturales ordenados de manera no decreciente, y tales que $n + 1 = k_1 + \dots + k_l$. Llamaremos *acción modelo de tipo* (k_1, \dots, k_l) a la acción de \mathbb{S}^1 sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z, [z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]) &\longmapsto [z^{a_1} z_1, \dots, z^{a_1} z_{k_1}, \\ &\quad z^{a_2} z_{k_1+1}, \dots, z^{a_2} z_{k_1+k_2}, \\ &\quad \dots, \\ &\quad z^{a_l} z_{n-k_l+1}, \dots, z^{a_l} z_{n+1}] \end{aligned}$$

donde a_1, a_2, \dots, a_l son números enteros distintos entre sí. Un sencillo cálculo directo nos revela que esta acción es semilibre, y que la variedad de los puntos fijos es difeomorfa a la unión disjunta:

$$F \approx \mathbb{C}\mathbb{P}^{k_1-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{C}\mathbb{P}^{k_l-1}$$

Ejemplo 4.6 La acción del ejemplo 3.2, es una acción modelo de tipo $(1, n)$.

Definición 4.7 Llamaremos *acción tipo* a una acción semilibre de \mathbb{S}^1 sobre un espacio proyectivo complejo cohomológico CP^n tal que la subvariedad de los puntos fijos F tenga la cohomología de la unión disjunta

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^{k_1-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{C}\mathbb{P}^{k_l-1},$$

donde k_1, \dots, k_l son números naturales tales que $k_1 \leq \dots \leq k_l$ y $k_1 + \dots + k_l = n + 1$. Diremos que una acción tal es *de tipo* (k_1, \dots, k_l) .

Sea Φ una acción tipo sobre el n -espacio proyectivo complejo cohomológico M . Podemos considerar la sucesión de Gysin (4.8). Notamos que como M y F tienen cohomología par, los polinomios de Poincaré P_M y P_F son pares. Como además $\text{im } \pi^{*i} \leq H^i(M)$ e $\text{im } \rho_B^i \leq H^i(F)$, deducimos que P_π y P_{ρ_B} son ambos polinomios pares. Denotamos por P^{par} a la parte par de un polinomio P . Igualando la parte par de los dos términos de la ecuación (4.12), obtenemos:

$$(P_{\rho_B} - P_\pi) + (1 - t^2)P_{(B,F)}^{par} = 0, \tag{4.14}$$

de donde $P_{\rho_B} - P_\pi$ es divisible por $(1 - t^2)$. En particular, se tiene $\sum_{i \geq 0} b_{\rho_B}^i = \sum_{i \geq 0} b_\pi^i$.

Recordamos que para todo entero i se cumple $b_{\rho_B}^i \geq b_\pi^i$, y deducimos que $P_{\rho_B} = P_\pi$. Hemos demostrado el siguiente lema:

Lema 4.8 Si Φ es una acción tipo, entonces se cumple la relación:

$$(1 - t^2)P_{(B,F)} = t(P_F - P_M).$$

Notamos que por el lema precedente, el polinomio $P_{(B,F)}$ es impar, y de hecho, podemos calcularlo en cada caso, en función del tipo. Se puede probar por inducción sobre l , que si Φ es de tipo (k_1, \dots, k_l) , entonces tenemos la siguiente expresión para $P_{(B,F)}$:

$$P_{(B,F)} = t \sum_{j=2}^l \left(\sum_{i=1}^{k_j + \dots + k_l} t^{2(i-1)} \right) \left(\sum_{i=1}^{k_{j-1}} t^{2(i-1)} \right) \quad (4.15)$$

Ejemplo 4.9 Vamos a calcular la cohomología del espacio de órbitas de una acción de tipo $(1, \dots, 1)$. Podemos hacer los cálculos con la siguiente acción modelo:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \\ (z, [z_1, z_2, \dots, z_{n+1}]) &\longmapsto [zz_1, z^2z_2, \dots, z^{n+1}z_{n+1}] \end{aligned}$$

Un cálculo directo nos proporciona:

$$\begin{aligned} P_F &= n + 1 \\ P_M &= 1 + t^2 + \dots + t^{2n} \\ P_{(B,F)} &= (n + 1)t + nt^3 + \dots + 2t^{2n-3} + t^{2n-1} \end{aligned}$$

Por un argumento de conectividad, es claro que $H^0(B) \cong \mathbb{R}$. Tenemos entonces el homomorfismo:

$$\rho_B^0: H^0(B) \cong \mathbb{R} \longrightarrow \bigoplus_{n+1} \mathbb{R} = H^0(F),$$

que está dado por $\rho_B^0(x) = (x, \dots, x)$, y por lo tanto, $b_{\rho_B}^0 = 1$. Como además $P_\pi = P_{\rho_B} \leq P_F$, tenemos que $P_\pi = 1$, y sustituyendo en la fórmula (4.10), podemos despejar P_B , obteniendo:

$$P_B = t^{2n-1} + 2t^{2n-3} + \dots + (n-1)t^3 + 1,$$

de donde

$$H^p(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0; \\ \bigoplus_{n-k} \mathbb{R} & \text{si } p = 2k + 1 \text{ (} 1 \leq k \leq n-1 \text{)}; \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Como el producto de dos formas impares es par, la estructura multiplicativa de $H^*(B)$ es trivial. En resumen, B tiene la cohomología de un ramillete de esferas impares.

En este caso, ha sido suficiente la estructura lineal de la sucesión de Gysin y del par (B, F) para calcular la cohomología de B . En cambio, para una acción tipo genérica, además de los polinomios de Poincaré, necesitaremos usar la estructura multiplicativa de ambas sucesiones, es decir, el hecho de que son sucesiones de $H^*(B)$ -módulos.

Sea Φ una acción tipo. Por la estructura de álgebra de M (ver apartado 2.6), hay una clase $a \in H^2(M)$ que genera todo $H^*(M)$; es decir, a^2 genera $H^4(M)$, a^3 genera $H^6(M)$, y así sucesivamente.

Tomando partes impares en la fórmula (4.11), y por ser la acción semilibre (lo cual significa que $b_F^0 \geq 2$), se sigue fácilmente que $b_B^1 = 0$. Como $H^{2n}(B) = 0$, deducimos de la exactitud de la sucesión de Gysin (4.8) que existe una clase no nula $z_{2n-1} \in H^{2n-1}(B, F)$, tal que

$$\oint(a^n) = z_{2n-1}.$$

Lema 4.10 *Si B es el espacio de órbitas de una acción tipo, entonces $H^2(B) = 0$.*

Demostración: Como $P_{\rho_B} \leq P_F$, por la igualdad (4.11) obtenemos que $P_B \leq P_F + P_{(B,F)}$, de donde $b_B^i = 0$ para todo $i \geq 2n$. Supongamos ahora que existe una clase no nula $y_2 \in H^2(B)$. Como $H^0(B, F) = 0$, forzosamente $\pi^*(y_2) = a \in H^2(M)$. Entonces, como $H^{2n}(B) = 0$, y π^* es un $H^*(B)$ -homomorfismo, tenemos que

$$a^n = (\pi^*(y_2))^n = \pi^*(y_2^n) = 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

Del lema precedente deducimos que existe una clase no nula $z_1 \in H^1(B, F)$ tal que

$$\oint(a) = z_1.$$

El siguiente lema nos da la clave para poder calcular P_B .

Lema 4.11 *Para una acción tipo cualquiera, se tiene que $P_\pi = 1$.*

Demostración: Veamos que para todo $j = 1, \dots, n$ se tiene que $\oint(a^j) \neq 0$. Lo probaremos por inducción sobre j , en sentido descendente. Hemos visto que es cierto para $j = n$. Supongamos que $\oint(a^k) \neq 0$, y que $\oint(a^{k-1}) = 0$. En ese caso, por la exactitud de la sucesión de Gysin se tiene que $\oint(a^k) = z_{2k-1}$ y que existe una clase no nula $y_{2k-2} \in H^{2k-1}(B)$, tal que $\pi^*(y_{2k-2}) = a^{k-1}$. Entonces, $z_{2k-3} \notin \text{im } \oint = \ker \varepsilon$, y eso significa que hay un elemento no nulo $y_{2k-1} \in H^{2k-1}(B)$, tal que $\varepsilon(z_{2k-3}) = y_{2k-1}$. Como la cohomología de F es par, tenemos que $y_{2k-1} \in \ker \rho_B = \text{im } \iota_B$. Por lo tanto,

deducimos que $\iota_B(z_{2k-1}) = y_{2k-1}$. Plasmamos toda esta información en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(B) & \xrightarrow{\pi} & H^*(M) & \xrightarrow{\mathcal{f}} & H^{*-1}(B, F) & \xrightarrow{\varepsilon} & H^{*+1}(B) \\
1_B & \mapsto & 1_M & & & & \\
& & a & \mapsto & z_1 & & \\
y_{2k-2} & \mapsto & a^{k-1} & \mapsto & z_{2k-3} & \mapsto & y_{2k-1} \\
& & a^k & \mapsto & z_{2k-1} & & \\
& & a^n & \mapsto & z_{2n-1} & & \\
\\
H^*(B) & \xrightarrow{\rho_B} & H^*(F) & \xrightarrow{\delta_B} & H^{*+1}(B, F) & \xrightarrow{\iota_B} & H^*(B) \\
1_B & \mapsto & 1_F & & & & \\
& & 1'_F & \mapsto & z_1 & & \\
& & & & z_{2k-1} & \mapsto & y_{2k-1}
\end{array}$$

Ahora, utilizando que π^*, ι_B y \mathcal{f} son $H^*(B)$ -homomorfismos, obtenemos:

$$y_{2k-2} \cdot a = a^{k-1} \cdot a = a^k \in H^{2k}(M);$$

$$z_{2k-1} = \oint(a^{2k}) = \oint(y_{2k-2} \cdot a) = y_{2k-2} \cdot \oint(a) = y_{2k-2} \cdot z_1;$$

$$y_{2k-1} = \iota_B(z_{2k-1}) = \iota_B(z_1 \cdot y_{2k-2}) = y_{2k-2} \cdot \iota_B(z_1) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\text{im } \pi^* = \ker \mathcal{f} = 1$. ■

De este lema, se deduce que $P_{\rho_B} = 1$, y por lo tanto, la fórmula:

$$P_B = 1 + t + P_{(B,F)} - tP_F \tag{4.16}$$

nos permite calcular la cohomología de B en cada caso. De la fórmula (4.15), obtenemos que

$$b_{(B,F)}^{2k-1} \geq 1 \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Si se cumple

$$P_{(B,F)} = t + t^3 + \dots + t^{2n+1},$$

que es el caso de la acción de tipo $(1, n)$, entonces, por la exactitud de la sucesión de Gysin, se tiene $P_B = 1$, es decir, B es acíclico. En otro caso, la sucesión de Gysin revela que aparecen formas impares no nulas en $H^*(B)$. Hemos probado el siguiente:

Teorema 4.12 (Masuda) *Sea B el espacio de órbitas de una acción tipo. Entonces, B o tiene la cohomología de un ramillete de esferas impares, o es acíclico.*

Observación 4.13 Combinando (4.15) y (4.16), podemos calcular explícitamente los números de Betti del espacio de órbitas de una acción tipo cualquiera. En [Mas], se proporciona una fórmula equivalente en un contexto más general, usando métodos de topología algebraica distintos a nuestro enfoque geométrico, más elemental.

Ejemplos 4.14 Aplicando la fórmula (4.16), obtenemos los siguientes ejemplos:

- Tipo (2, 3) $\implies B$ tiene la cohomología de $\mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^7$;
- Tipo (2, 2) $\implies B$ es una 5-esfera cohomológica;
- Tipo (1, 1, 2) $\implies B$ tiene la cohomología de $\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^5$;
- Tipo (2, 2, 3, 4) $\implies P_B = 1 + 2t^3 + 5t^5 + 6t^7 + 6t^9 + 5t^{11} + 4t^{13} + 3t^{15} + 2t^{17} + t^{19}$

Bibliografía

- [BoTu] R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1982.
- [BrCl] F. Brickell, R.S. Clark, *Differentiable Manifolds: an introduction*, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [Bre1] G.E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.
- [Bre2] G.E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer Verlag, 1993.
- [Dav] M. Davis, *Smooth G -Manifolds as Collections of Fiber Bundles*, Pacific Journal of Math. **77** (1978), 315-363.
- [Die] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, De Gruyter Studies in Mathematics, 1987.
- [GHV] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, 1972.
- [HeSa] G. Hector, M. Saralegi, *Intersection cohomology of S^1 -actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 263-288.
- [Hir] M. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Verlag, 1976.
- [Jan] K. Jänich, *On the Classification of $O(n)$ -Manifolds*, Math. Annalen **176** (1968), 56-76 .
- [KaLe] M. Karoubi, C. Leruste, *Algebraic Topology via Differential Geometry*, Cambridge University Press, 1987.
- [Mas] M. Masuda *Cohomology of S^1 -orbit spaces of cohomology spheres and cohomology complex projective spaces*, Math. Z. **176** (1981) 405-427.

- [MaTo] I. Mardsen, J. Tornehave *From Calculus to Cohomology: deRham cohomology and characteristic classes*, Cambridge University Press, 1998.
- [Rot] J.J. Rotman, *An introduction to Algebraic Topology*, Springer Verlag, 1988.
- [Sar] M. Saralegi, *Homological properties of stratified spaces*, Illinois Jour. of Math. **38** (1994), 47-70.
- [Ver] A. Verona, *Le théorème de deRham pour les préstratifications abstraites*, C.R.A.S. Paris **273** (1980), 886-889,.

Índice Terminológico

Símbolos

C_+E , 37
 $G(m)$, 11
 G_m , 11
 $H^p(M; \mathbb{R})$, 6
 $H^p(M)$, 2
 $H_v^p(B, F)$, 58
 $IH^p(M)$, 18
 $IH_v^p(M)$, 53
 $IH_v^p(M, F)$, 63
 $I\Omega_v^*(M, F)$, 63
 $I\Omega_v^*(M)$, 53
 $I\Omega^*(M)$, 17
 $N(A)$, 14
 P_M , 69
 $P_{(B,F)}$, 69
 P_π , 69
 S , 29
 X , 26
 $[\epsilon]$, 30
 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, 31
 $\Delta_*^L(B)$, 52
 $\Delta_1 * \Delta_2$, 51
 Δ_p , 5
 $\Delta_p(M)$, 5
 \mathcal{L}_M , 39
 $\Omega_v^*(B, F)$, 58
 $\Omega_v^*(X)$, 44
 $\Omega^*(M)$, 2
 ΣE , 37
 α_F , 43
 χ_M , 68

χ , 27
 $\int_G f dg$, 12
 ϵ , 28
 \widetilde{M} , 38
 $\widetilde{\alpha}$, 43
 b_M^p , 68
 $b_{(B,F)}^p$, 68

A

acción
 de Hopf, 31
 diferenciable, 10
 efectiva, 11
 libre, 11
 semilibre, 11, 33
 tipo, 71
 acciones riemannianas, iii
 aplicación
 de Hopf, 31
 equivariante, 19
 levantable, 45
 axioma de homotopía, 4
 de Verona, 49
 invariante, 20

B

Bredon, método de, 8

C

campo fundamental, 26, 55
 característica de Euler-Poincaré, 68
 cilindro no negativo, 37
 clase

de Euler, 30
 cohomología
 de de Rham, 1
 de Verona, 43
 invariante, 52
 relativa, 58
 singular, 1
 cuasiisomorfismo, 21

D

diagrama trenzado, 66

E

entorno
 distinguido, 41, 42
 tubular equivariante, 14
 esfera cohomológica, 32
 espacio
 de adjunción, 51
 proyectivo complejo, 31, 71
 cohomológico, 32
 explosión
 de Jänich, 36
 de un símplice, 51
 de una pseudovariedad, 43

F

fibrado
 normal, 14
 vectorial diferenciable, 14
 forma
 básica, 24
 controlada, 43
 de Euler, 28, 56
 fundamental, 27
 invariante, 17
 levantable, 43

G

grupo de Lie, 10

H

Haar, integral de, 12

I

integral
 a lo largo de la fibra, 29
 de Haar, 12

L

lema
 de Poincaré
 de Verona, 49
 lema de Poincaré, 3
 invariante, 20

M

métrica invariante, 12, 55

N

números de Betti, 68

O

operador homotopía, 3
 órbita, 11
 órbitas, espacio de, 11, 51

P

parte
 regular, 36
 singular, 36
 polinomios de Poincaré, 69
 pseudovariedad, 36
 punto
 fijo, 11, 35
 libre, 11

R

restricción, 2

S

símplice singular
 diferenciable, 5
 levantable, 51

subgrupo de isotropía, 11

sucesión

de Gysin, 15

 caso libre, 29

 caso semilibre, 60

 relativa, 67

de Mayer-Vietoris, 4

 de Verona, 50

 invariante, 20

de Smith-Gysin, 68

T

teorema

de de Rham, 6

 de Verona, 50

 de Verona invariante, 54

 invariante, 22

de la loncha diferenciable, 16

de Masuda, 74

del entorno tubular, 14