AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 7/SEPT/99

PRIMER EJERCICIO

A) Calcular una serie de Fourier constituida únicamente por cosenos y cuya suma valga $0\ \forall t \in (0,1)$ y $t\ \forall t \in (1,2)$. Representar la suma de dicha serie $\forall t \in [-6,6]$. ¿Habrá otras series de Fourier distintas de la calculada y que cumplan todas las condiciones enunciadas? En caso afirmativo, representar la suma de alguna de ellas en [-6,6]. (Nota: $\int t\cos(at)\,dt = [\,t\sin(at) + \cos(at)/a\,]/a + C$).

B) Sean $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones ortogonales en $[a,b]$, y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n(t)$ la serie de Fourier generalizada (uniformemente convergente) de $f(t)$ respecto a ella. Se pide: demostrar el valor que deben tomar los coeficientes a_n.

C) 1) Demostrar que la sucesión $\left\{\cos(n\,t\,2\pi/T), \sin(n\,t\,2\pi/T)\right\}_{n=0}^{\infty} =$

$$= \cos 0, \sin 0, \cos(t\,2\pi/T), \sin(t\,2\pi/T), \cos(2\,t\,2\pi/T), \sin(2\,t\,2\pi/T), \cos(3t\,2\pi/T), \cdots$$

es ortogonal en $[-T/2, T/2]$ con la función de peso $w(t) = 1$. ¿Es ortonormal?

2) Mediante el resultado de los apartados B) y C1), calcular la forma general de la serie de Fourier de una función $f(t)$ de período T.

(5+3+4 puntos respectivamente)

Tiempo: 80 minutos.

SEGUNDO EJERCICIO

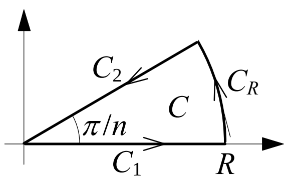
A) 1) Obtener el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = 1/[z(z+1)]$ en potencias de z y válido en $1 < |z| < \infty$.

2) Indicar razonadamente cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función $f(z) = e^z/[(z-1)(z+1)(z-2)(z-3)]$ en un entorno del punto $z_0 = i$.

(1.5+1.5 puntos)

B) Calcular $I = \int_0^{2\pi} d\theta/(1 + a^2 - 2a\cos\theta)$ con $1 \neq a > 0$. (3.5 puntos)

C) Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx/(1 + x^{2n})$ con $1 \leq n \in \mathrm{N}$ usando el contorno C de la figura:



(3.5 puntos)

Tiempo: 60 minutos.

15 minutos de DESCANSO (y queda 1 ejercicio más)

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II – EXAMEN 7/SEPT/99

TERCER EJERCICIO

A) 1) Deducir la expresión general de $\arccos(z)$.

2) ¿Cabe esperar que $\arccos(2)$ tome algunos valores reales? Calcular $\arccos(2)$ mediante la expresión del apartado anterior.

3) Representar los valores de $\arccos(2)$ en el plano complejo.

(1+1+1 puntos)

B) Hallar una función analítica de parte imaginaria $2xy\left[1-1/(x^2+y^2)^2\right]$ y tal que $f(1) = 4$.

(3 puntos)

C) 1) Calcular $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right]$ mediante la definición. ¿En qué valores de s es válida?

2) Ídem $\mathcal{L}[\sin(ax)]$.

3) Calcular ahora $\mathcal{L}[\sin(ax)]$ escribiendo $\sin(ax)$ en su forma exponencial y usando el resultado del apartado 1). ¿Coincide el resultado con el del apartado 2)? En caso negativo, explicar por qué.

4) Calcular las transformadas $\mathcal{L}[\cos(ax)]$, $\mathcal{L}[\sinh(ax)]$ y $\mathcal{L}[\cosh(ax)]$ por el procedimiento más rápido. Indicar los valores de s en que es válida cada una.

5) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[s^2/(s^4-a^4)\right]$ por descomposición en fracciones simples.

6) Aplicando el teorema de convolución a la expresión del apartado anterior, y sin calcular ninguna primitiva, obtener el valor de la integral:

$$\int_0^x \cosh(a\tau)\cos[a(x-\tau)]d\tau$$

(1+1+1+1+1+1 puntos)

Tiempo: 75 minutos.