AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
EXAMEN FINAL - 4 DE FEBRERO DE 1999

PRIMER EJERCICIO

A) Siendo $$f(z) = \frac{z^3 \sin(2z)}{z^4 - 1}$$

1) Calcular todos sus residuos.

2) Calcular, en sentido positivo, $\oint_C f(z)dz$

siendo C la curva $$C \equiv \begin{cases} y = -1/2\,; \quad y = 3 \\ x = -4\,; \quad x = 4 \end{cases}$$

(4 puntos)

B) Siendo f una función entera representada por una serie de la forma:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$

1) Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de MacLaurin de la función $g(z) = f\big(f(z)\big)$.

2) Basándose en el resultado anterior, hallar el desarrollo de MacLaurin de la función $g(z) = e^{\left(e^z - 1\right)} - 1$ hasta la potencia de tercer grado.

(6 puntos)

Este ejercicio se recogerá a los 50 minutos de empezar el examen.

SEGUNDO EJERCICIO

A) 1) ¿La función $v(x,y) = x^2 + y^2$ puede ser la parte imaginaria de alguna función $f(z)$ analítica? ¿Y la función $v(x,y) = x^2 - y^2$?

2) Si es posible, calcular en cada caso la $f(z)$ analítica, explicitando su parte real $u(x,y)$.

(4 puntos)

B) 1) Enunciar y demostrar el Teorema del Valor Medio de Gauss.

2) Separando las partes real e imaginaria de la integral del teorema anterior, contestar razonadamente si es cierto que cualquier función armónica en un círculo toma en su centro el valor medio de sus valores en la frontera.

3) **Aplicación:** Calcular de la manera más sencilla posible el valor medio de la función $x^2 - y^2$ y el de z^2 sobre la circunferencia $|z-2| = 1$.

(6 puntos)

Tiempo: 50 minutos.

15 minutos de DESCANSO

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II
EXAMEN FINAL - 4 DE FEBRERO DE 1999

TERCER EJERCICIO

Se considera la función:

$$f(t) = H\left(t + \frac{1}{2}\right) - H\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

donde $H(t)$ indica la función escalón (o de Heaviside) centrada en el origen, cuya representación analítica es:

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

A) Representar gráficamente $g(t)$, la extensión periódica [-1,2) de $f(t)$.

(1 punto)

B) Calcular el desarrollo en serie de Fourier de $g(t)$. ¿Existe alguna manera de simplificar el cálculo mediante una traslación de ejes / cambio de variable, utilizando una función par o impar? Si es así, justifíquese y empléese. Si no, empléese el procedimiento normal.

(3 puntos)

C) ¿En qué puntos coincidirán la suma del desarrollo de $g(t)$ y la propia función $g(t)$? Justificar la respuesta.

(1 puntos)

D) Calcular $F(\omega)$, la transformada de Fourier de $f(t)$ de dos maneras distintas: una, directamente, y otra, empleando la propiedad de traslación en el tiempo. Comprobar que se obtiene el mismo resultado.

(5 puntos)

Tiempo: 60 minutos