MATEMATIKA GEHIPENA II

AZTERKETA FINALA 1998ko OTSAILAREN 4a

LEHENENGO ARIKETA

A) $$f(x) = e^{-x} \quad (0 \le x < 1)$$

funtzioaren f_1 luzapen periodikoaren Fourier seriezko garapena lor.

B) Bere erdi heineko sinu (f_s) eta kosinuzko (f_c) garapenak lor.

C) Bete ezazu ondorengo taula hau adierazitako x-ren balioetarako aurreko hiru garapenen baturek hartzen dituzten balioez, erantzunak arrazoituz:

x	–1	0	1/2	1	3/2	5	1728 / 5
$f_1(x)$							
$f_s(x)$							
$f_c(x)$							

D) Zuri ezazu aipatutako hiru garapenak x-ren zeintzuk baliotarako bat datozen.

(3 + 3,5 + 2 + 1,5 puntu hurrenez hurren)

Oharra:

$$\int e^{-ax}\cos(kx)\,dx = \frac{e^{-ax}\left[k\sin(kx) - a\cos(kx)\right]}{a^2+k^2} + K$$

$$\int e^{-ax}\sin(kx)\,dx = \frac{e^{-ax}\left[-k\cos(kx) - a\sin(kx)\right]}{a^2+k^2} + K$$

Astia: 50 minutu.

BIGARREN ARIKETA

A) Bedi $f(t) = e^{-a|t|}\ (a > 0)$. Honako hauek eskatzen dira:

A1) $f(t)$-ren Fourier transformatua kalkulatzea (ikus aurreko ariketako oharra).

A2) Simetria eta deribatuaren transformatuaren propietateak ondorioztatzea.

A3) A1 ataleko transformatutik abiaturik, eta A2ko propietateak aplikatuz, honako funtzio hauen transformatuak kalkulatzea:

$$f_1(t) = \frac{df(t)}{dt}; \qquad f_2(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(5 puntu)

B) Parsevalen formula enuntziatzea eta

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

integralaren kalkulurako erabiltzea

(3 puntu)

Astia: 40 minutu.

15 minutuko ATSEDENALDIA

MATEMATIKA GEHIPENA II

AZTERKETA FINALA 1998ko OTSAILAREN 4a

HIRUGARREN ARIKETA

A)
$$\int_0^\infty \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\, dt$$

integrala kalkula, e^{iz}/z plano konplexuko lehenengo koadranteko mugalde batean zehar integratuz. Zein da plano konplexuko integrazio honen bitartez lortzen den beste aldagai errealeko integrala?

B)
$$f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z\left(z^2 - 3z + 2\right)} = \frac{1}{2z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{3}{2\left(z-2\right)}$$

funtzioaren $z = 3/2$ puntuan baliozkoa den $z+1$ berredurazko garapena aurki.

(4 + 4 puntu)

Astia: 40 minutu

LAUGARREN ARIKETA

A) Bedi $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + i\left(z + \bar{z}\right)^2$.

1) Non da f analitikoa?
2) Aurkitu ahal izango ote da funtzio analitikoren bat zeinaren zati erreala f-renaren berdina den? Baiezkoan, Milne-Thomson metodoaren bidez egin.
3) Aurkitu ahal izango ote da funtzio analitikoren bat zeinaren zati irudikaria f-renaren berdina den? Baiezkoan, Milne-Thomson metodoaren bidez egin.

(1 + 1 + 0,5 puntu hurrenez hurren)

B)
1) $\log z$, logaritmo multiformea defini eta bere adierazpena ondoriozta ezazu.
2) Adar edo determinazio defini.
3) Ba al da $D_3 = \mathbb{C} - \{0\}$ eremu bikoizki konexuan analitikoa den logaritmoaren determinaziorik ($\operatorname{Log} z$)?
4) Zein da logaritmoaren determinazio nagusiaren deribatua? Berdina al da beste edozein determinaziotarako?
5) $f(z)$ funtzio jarraiaren $F(z)$ jatorriko funtzio defini.
6) Enuntzia ibilbidearekiko independentzia eta jatorrikoaren izatea/ez izatea lotzen dituen teorema.
7) Enuntzia eta froga ibilbidearekiko independentzia eta edozein ibilbide itxitan zeharreko integrala zero (edo zeroren desberdina) izatearen arteko harremana.
8) Kalkula $\oint_C dz/z$ integrala parametrizatuz, $C \equiv |z| = 1$ bada (norantza positiboan).
9) Gainerako ataletako emaitzak erabiliz, 3) atalari emandako erantzuna froga.

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0,5 + 0,5 puntu hurrenez hurren)

Astia: 60 minutu