AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II

EXAMEN FINAL - 4 DE FEBRERO DE 1998

PRIMER EJERCICIO

A) Hallar el desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica f_1 de la función:

$$f(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < 1)$$

B) Calcular sus desarrollos de medio rango en serie de senos (f_S) y en serie de cosenos (f_C).

C) Rellenar la siguiente tabla de valores de la suma de los tres desarrollos anteriores en los valores de x que se dan. Razonar la respuesta.

x	–1	0	1/2	1	3/2	5	1728 / 5
$f_1(x)$							
$f_S(x)$							
$f_C(x)$							

D) Justificar para qué valores de x coinciden los tres desarrollos referidos.

(3 + 3,5 + 2 + 1,5 puntos respectivamente)

Nota:

$$\int e^{-ax}\cos(kx)\,dx = \frac{e^{-ax}\left[k\sin(kx) - a\cos(kx)\right]}{a^2+k^2} + C$$

$$\int e^{-ax}\sin(kx)\,dx = \frac{e^{-ax}\left[-k\cos(kx) - a\sin(kx)\right]}{a^2+k^2} + C$$

Tiempo: 50 minutos.

SEGUNDO EJERCICIO

A) Sea $f(t) = e^{-a|t|} \;\; (a > 0)$. Se pide:

A1) Calcular la transformada de Fourier de $f(t)$. (Véase la **nota** del ejercicio anterior.)

A2) Deducir las propiedades de simetría y de transformada de la derivada.

A3) A partir de la transformada del apartado A1, y aplicando las propiedades del A2, calcular las transformadas de las siguientes funciones:

$$f_1(t) = \frac{df(t)}{dt}; \qquad f_2(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(5 puntos)

B) Enunciar la fórmula de Parseval. Aplicarla al cálculo de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

(3 puntos)

Tiempo: 40 minutos.

15 minutos de DESCANSO

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS II

EXAMEN FINAL - 4 DE FEBRERO DE 1998

TERCER EJERCICIO

A) Calcular la integral: $$\int_0^{\infty} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}\, dt$$

integrando e^{iz}/z en el plano complejo sobre un contorno en el primer cuadrante. ¿Cuál es la otra integral de variable real que se obtiene mediante esta integración en el plano complejo?

B) Hallar el desarrollo, en potencias de $z+1$ válido en $z = 3/2$, de la función:

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z\left(z^2 - 3z + 2\right)} = \frac{1}{2z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{3}{2\left(z-2\right)}$$

(4 + 4 puntos)

Tiempo: 40 minutos

CUARTO EJERCICIO

A) Sea $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + i\left(z + \bar{z}\right)^2$.

1) ¿Dónde es f analítica?
2) ¿Se podrá encontrar una función analítica cuya parte real sea igual a la de f? En caso afirmativo, hacerlo por el método de Milne-Thomson.
3) ¿Se podrá encontrar una función analítica cuya parte imaginaria sea igual a la de f? En caso afirmativo, hacerlo por el método de Milne-Thomson.

(1 + 1 + 0,5 puntos respectivamente)

B)
1) Definir logaritmo multiforme, $\log z$, y deducir su expresión.
2) Definir rama o determinación.
3) ¿Hay alguna determinación del logaritmo, $\operatorname{Log} z$, analítica en el dominio doblemente conexo $D_3 = \mathbb{C} - \{0\}$?
4) ¿Cuál es la derivada de la determinación principal del logaritmo? ¿Es la misma para cualquier otra determinación?
5) Definir primitiva $F(z)$ de la función (continua) $f(z)$.
6) Enunciar el teorema que relaciona la independencia del camino con la existencia o no de primitiva.
7) Enunciar y demostrar la relación entre la independencia del camino y el hecho de que las integrales por cualquier camino cerrado valgan cero o no.
8) Calcular, parametrizando, la integral $\oint_C dz/z$ por $C \equiv |z| = 1$ en sentido positivo.
9) Utilizando los resultados de los demás apartados, demostrar la respuesta dada al apartado 3).

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0,5 + 0,5 puntos respectivamente)

Tiempo: 60 minutos