MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA
2010eko irailak 7

***1 ARIKETA***

1) Bedi *f(t) T* periodoko funtzio bat. Froga ezazu bere Laplace transformatua honako formula honen bidez kalkulatzen dela:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-s\cdot T}}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

**(1.5 puntu)**

2) Izan bedi f(t) azpiko g(t) funtzioaren 2a periododko luzapen periodikoa. Kalkula ezazu f(t)-ren Laplace transformatua

$$g(t)=\begin{cases}1 & 0<t\le a\\ -1 & a<t\le 2a\end{cases}$$

**(1.5 puntu)**

3)

i) Kalkula ezazu honako funtzio honen Laplace transformatua definizioa erabiliz:

$$r(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

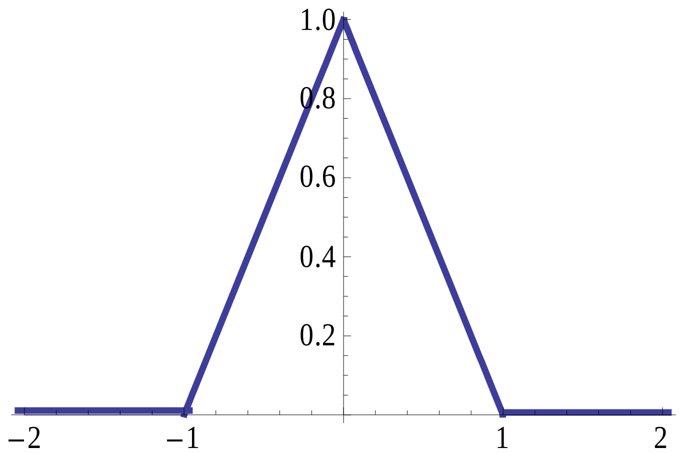
ii) Orain, berridatz ezazu *r(t)* funtzioa *H(t)* maila unitatezko funtzioa erabiliz, eta kalkula ezazu *r(t)*-ren Laplace transformatua $\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$ dela erabiliz. Aipa itzazu era esplizituan erabiltzen dituzun transformatuaren propietate eta teoremak.

iii) Ebatz ezazu, Laplace transformatua erabiliz, honako hastapen balioko problema, eta irudika ezazu lorturiko ebazpena:

$$y'+y=r(t)$$

**(3 puntu)**

4) Bedi *f(t)* azpiko irudiko funtzioa:




Eskatzen da:

i) Lor ezazu *f(t)*-ren 4 periodoko luzapen periodokoaren Fourier garapena.

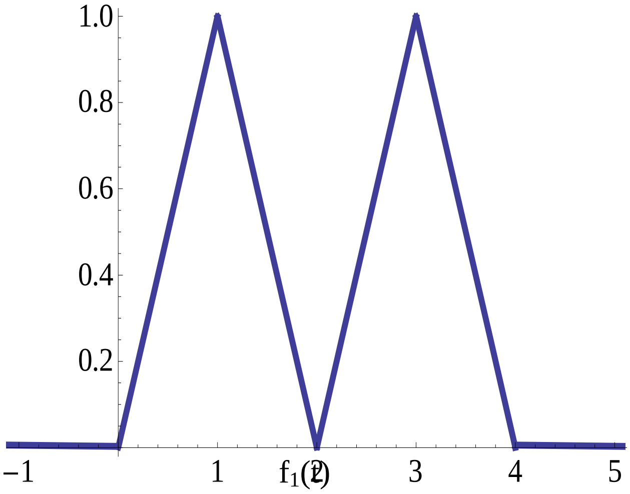
ii) Zer balio eman behar diogu *t*-ri lorturiko seriean honako zenbakizko serie hau lortzeko?

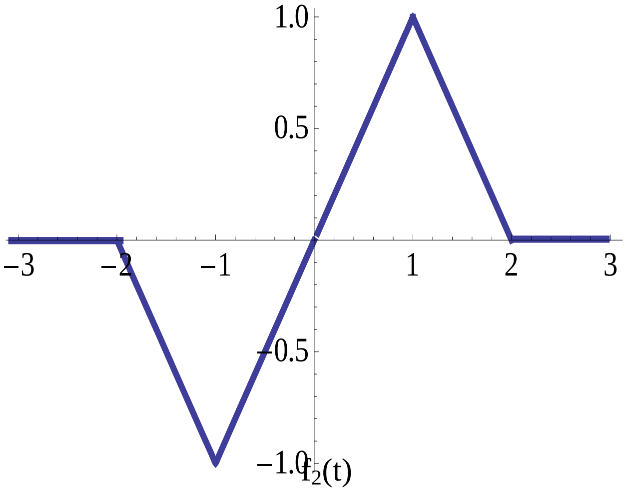
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2}$$

Kalkula ezazu zenbakizko serie horren balioa.

iii) Kalkula ezazu $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$.

iv) Bitez $f_1(t)$ eta $f_2(t)$ azpiko grafikoetan erakusten diren funtzioak. Aurreko ataleko transformatutik abiaturik, kalkula itzazu $f_1(t)$ eta $f_2(t)$ funtzioen transformatuak.




Zer funtzio mota da $f_2(t)$-ren transformatua? ( funtzio bakoiti, bikoiti, erreal, konplexu…) Egiazta ezazu hori lorturiko emaitzean.

v) Enuntzia itzazu erabili dituzun Fourier transformatuaren propietateak.

Oharra: $\int t\cdot\cos(a\cdot t)dt=\dfrac{\cos(a\cdot t)}{a^2}+\dfrac{t\cdot\sin(a\cdot t)}{a}+C$ $\int t\cdot\sin(a\cdot t)dt=\dfrac{\sin(a\cdot t)}{a^2}-\dfrac{t\cdot\cos(a\cdot t)}{a}+C$

**(6 puntu)**

5) Hartu aintzakotzat honako funtzio hau: $f(t)=\dfrac{1}{i\cdot t}$. Zer esan dezakegu, inolako kalkulurik egin gabe, bere Fourier transformatuari buruz? ( funtzio bakoiti, bikoiti, erreal, konplexu…)
Kalkula ezazu bere Fourier transformatua $\omega\neq 0$ balioetarako hondarren teorema aplikatuz.

**(1.5 puntu)**

6) Bedi $G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(t)\right]$. Aurki ezazu, $G(\omega)$-ren funtziotan, $g(t)\cdot\cos(2\pi at)$ funtzioaren Fourier transformatua. Enuntzia itzazu erabilitako Fourier transformatuaren propietateak.

**(1.5 puntu)**

**DENBORA: ordu 1 eta 30 minutu**

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI EZOHIKOA
2010eko irailak 7

**2. ARIKETA**

1)

i) Aurki itzazu $z_1$ , $z_2$ eta $z_3$, $(1+i)\cdot z^3 - 8\sqrt{2}\,i = 0$ ekuazioaren soluzioak, $z_1$ lehen koadrantean dagoela jakinik.

ii) $z_1$ , $z_2$ y $z_3$ puntuetatik igarotzen duen zirkunferentziari zirkunskribatzen zaion karratua irudika ezazu, karratu hori eta esandako zirkunferentziaren arteko ukitze-puntu bat $z_1$ dela jakinik.

iii) Aurki ezazu, era binomikoan, aurreko karratuaren zati irudikari handieneko erpinaren afixuaren era binomikoa.

**(2 puntu)**

2) Milne-Thompson métodoa erabiliz, aurki ezazu f funtzio polinomiko bat, honako hau betetzen dueña: $\begin{cases} \mathrm{Re}\left[f(z) - f'(z)\right] = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

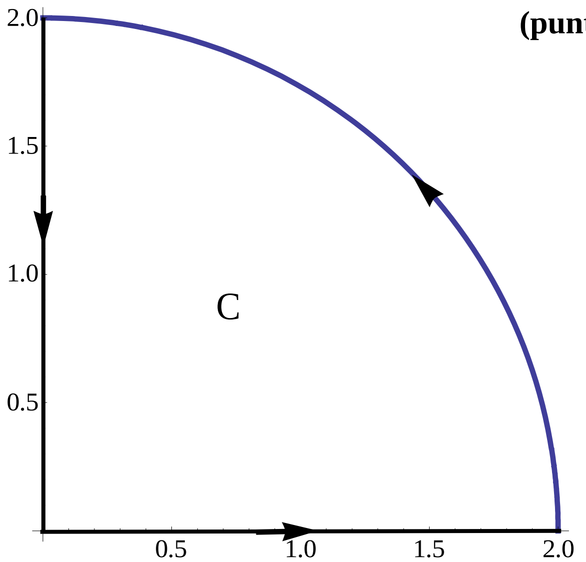
**(2 puntu)**

3) Ondoriozta ezazu Cos(z)-ren adierazpen binomikoa, adierazpen esponentzialetik abiaturik. Froga ezazu $\left|\cos(z)\right|$ bornaturik ez dagoela.

**(puntu 1)**

4) Kalkula ezazu $I = \oint_C \left( \dfrac{e^z}{(z-1-i)^{n+1}} + \bar{z} \right) dz$ ,

non C irudiko mugalde itxia baita.




**(3 puntu)**

5) Kontsidera ezazu $f(z) = \dfrac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{z^2 + z - 2}$ funtzioa. Eskatzen da:

i) Zenbat serie garapen desberdin onartzen ditu $f$-k (z+i)-zko berreduratan? Aipa itzazu garapen mota eta konbergentzia eremua kasu bakoitzean.

ii) Idem, vaina orain (z-1)-ezko berreduratan.

iii) Lor ezazu, aurreko ataleko kasuan, z = i puntuan baliozkoa den garapena.

iv) Aurreko garapenetik abiaturik, kalkula itzazu honako integral hauen balioak:

$$I_1 = \oint_{|z-1|=2} \frac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{(z+2)\cdot(z-1)^8}\,dz \qquad I_2 = \oint_{|z-1|=2} \frac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{(z+2)\cdot(z-1)^2}\,dz$$

**(3.5 puntu)**

6) Badakigu $f(z)$-k $m$. ordenako zero bat daukala $z_0$-n, eta $g(z)$-k $n$. ordenako zero bat $z_0$-n. Eskatzen da:

i) Zer singulartasun mota dauka $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ funtzioak $z_0$-n?

ii) *m*=1 eta *n*=3 direlako kasuan, lor ezazu Laurent seriezko garapenaren zati nagusiaren adierazpen esplizitua ($z-z_0$)-zko berreduratan, zenbait *D* eremutan baliozkoa dena, eta $\text{Res}\left[h(z), z_0\right] = \frac{3}{2}$ eta $\oint_C h(z)\cdot(z-z_0)dz = 6\pi i$ direla jakinik, non $C \in D$.

iii) $\text{Res}\left[h'(z), z_0\right]$.

iv) Zer singulartasun mota dauka $\frac{h''(z)}{h(z)}$ funtzioak $z_0$-n?

**(3.5 puntu)**

**DENBORA: ordu 1 eta 30 minutu**