AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
7 DE SEPTIEMBRE DE 2010

EJERCICIO 1

1) Demostrar que si f(t) es una función periódica de periodo T, su transformada de Laplace se obtiene mediante:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{1}{1-e^{-s\cdot T}}\cdot\int_0^T f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt$$

(1.5 puntos)

2) Calcular la transformada de Laplace de f(t) que es la extensión periódica de periodo 2a de la siguiente función:

$$g(t)=\begin{cases}1 & 0<t\le a\\ -1 & a<t\le 2a\end{cases}$$

(1.5 puntos)

3)

i) Calcular mediante la definición la transformada de Laplace de la siguiente función:

$$r(t)=\begin{cases}t & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$$

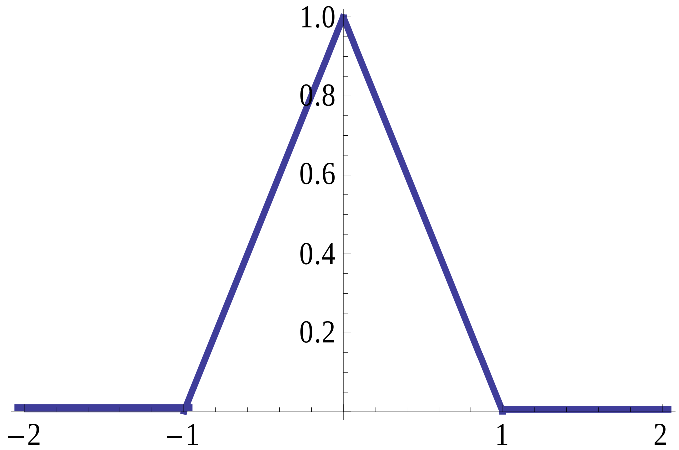
ii) Definir a continuación r(t) mediante la función escalón, H(t), y calcular su transformada a partir de $\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$ y de propiedades de la transformada. Enunciar las propiedades y teoremas utilizados.

iii) Resolver mediante la transformada de Laplace el siguiente problema de valor inicial y representar gráficamente la solución obtenida:

$$y'+y=r(t)$$

(3 puntos)

4) Sea f(t) la función representada en la siguiente gráfica:



Se pide:

i) Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica de f(t) de periodo 4.

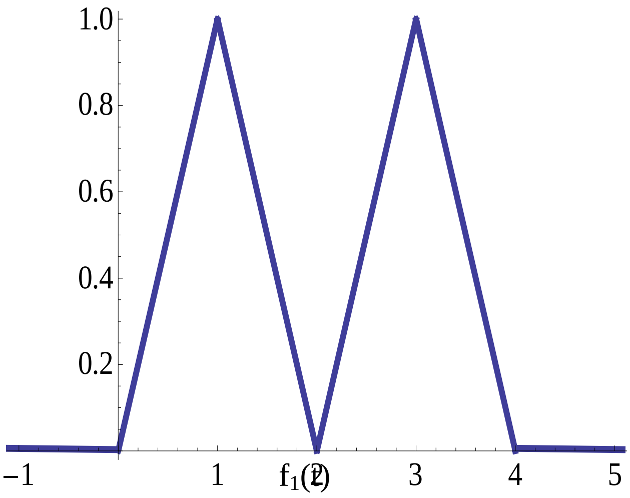
ii) ¿Qué valor hay que dar a t en la serie obtenida para que resulte la siguiente serie numérica :

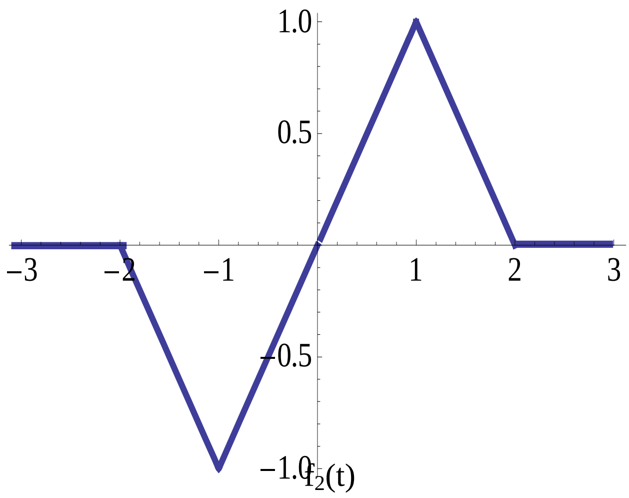
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2}$$

Calcular el valor de dicha serie numérica.

iii) Calcular $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$.

iv) A partir de la transformada anterior, calcular la transformada de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ representadas en la siguientes gráficas:





¿Qué tipo de función (función par, impar, real, compleja…) es la transformada de f2(t)? Comprobarlo en el resultado obtenido.

v) Enunciar las propiedades de la transformada de Fourier utilizadas.

Nota : $\int t\cdot\cos(a\cdot t)dt=\frac{\cos(a\cdot t)}{a^2}+\frac{t\cdot\sin(a\cdot t)}{a}+C \quad \int t\cdot\sin(a\cdot t)dt=\frac{\sin(a\cdot t)}{a^2}-\frac{t\cdot\cos(a\cdot t)}{a}+C$

(6 puntos)

5) Se considera la siguiente función: $f(t)=\frac{1}{i\cdot t}$. ¿Qué se puede decir, sin realizar ningún cálculo, sobre su transformada de Fourier (función par, impar, real, compleja, …)?.
Calcular su transformada de Fourier para $\omega\neq 0$ aplicando el teorema de los residuos.

(1.5 puntos)

6) Sea $G(\omega)=\mathcal{F}\left[g(t)\right]$. Hallar en función de $G(\omega)$ la transformada de Fourier de $g(t)\cdot\cos(2\pi at)$. Enunciar las propiedades de la transformada de Fourier utilizadas.

(1.5 puntos)

TIEMPO: 1 hora 30 minutos

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA ORDINARIA
7 DE SEPTIEMBRE DE 2010

EJERCICIO 2

1)

i) Hallar las raíces z_1 , z_2 y z_3 de la ecuación $(1+i)\cdot z^3 - 8\sqrt{2}\, i = 0$ siendo z_1 la raíz situada en el primer cuadrante.

ii) Dibujar el cuadrado circunscrito a la circunferencia que pasa por z_1 , z_2 y z_3, y es tangente en z_1 a dicha circunferencia.

iii) Hallar en forma binómica el afijo del vértice de mayor componente imaginaria del cuadrado anterior.

(2 puntos)

2) Hallar la función polinómica tal que $\begin{cases} \operatorname{Re}\left[f(z) - f'(z) \right] = x^3 - 3xy^2 - 3x^2 + 3y^2 + x - 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$,

utilizando el método de Milne-Thomson.

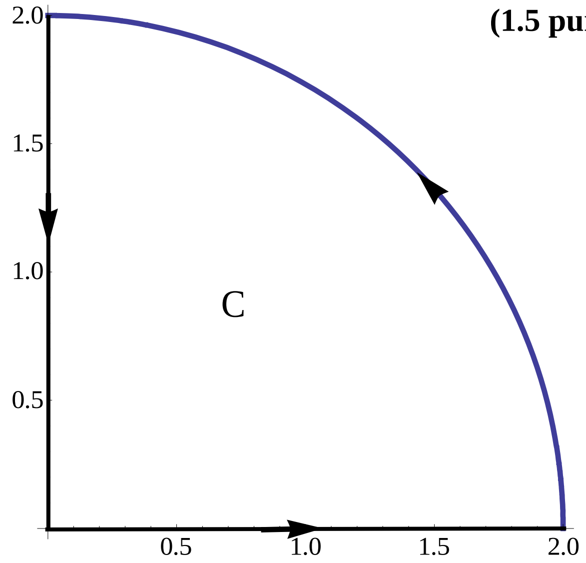
(2 puntos)

3) Calcular la expresión de la forma binómica del Cos(z) a partir de la exponencial.
Demostrar que $\left|\cos(z)\right|$ no está acotado.

(1.5 puntos)

4) Calcular $I = \oint_C \left(\dfrac{e^z}{(z-1-i)^{n+1}} + \bar{z} \right) dz$,

siendo C el contorno cerrado de la figura.



(3 puntos)

5) Dada la función $f(z) = \dfrac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{z^2 + z - 2}$, se pide:

i) ¿Cuántos desarrollos diferentes en potencias de (z+i) se pueden obtener?. Indicar tipo y campo de convergencia.

ii) Idem. En potencias de (z-1).

iii) Obtener, en caso del apartado anterior, el desarrollo válido en z = i.

iv) A partir del resultado del apdo. anterior, hallar las siguientes integrales:

$$I_1 = \oint_{|z-1|=2} \frac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{(z+2)\cdot(z-1)^8}\, dz \qquad I_2 = \oint_{|z-1|=2} \frac{z^3 + z^2 - 2z + 1}{(z+2)\cdot(z-1)^2}\, dz$$

(3.5 puntos)

6) Sabiendo que f(z) tiene un cero de orden m en z_0 y g(z) un cero de orden n en z_0. Se pide:

i) Tipo de singularidad de $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ en z_0.

ii) En el caso particular de m=1 y n=3, obtener la expresión de la parte principal del desarrollo en serie de Laurent en potencias de (z-z_0) válido en un cierto dominio D sabiendo que $\mathrm{Res}\left[h(z),z_0\right]=\dfrac{3}{2}$ y $\oint_C h(z)\cdot(z-z_0)dz=6\pi i$ siendo $C\in D$. .

iii) $\mathrm{Res}\left[h'(z),z_0\right]$.

iv) Tipo de singularidad de $\dfrac{h''(z)}{h(z)}$ en z_0.

(3 puntos)

TIEMPO: 1 hora 30 minutos