MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA
2010eko ekainak 7

- ***1 ARIKETA***

1) Kalkula ezazu honako integral honen balioa:

$$I_n = \oint_{|z|=n} \frac{e^z}{(z-1)^{n-4}\cdot(z-3)^{n-5}\cdot(z-5)^{n-6}}\,dz$$

$n = 2, 4, 6$ balioetarako.

(2.5 puntu)

2) Honako funtzio hauek aintzat hartuz,

$$f(z) = 8\pi^2 z\left(z-\frac{1}{2}\right)^2, \qquad g(z) = 1-\cos(4\pi z), \qquad h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

eskatzen da:

a) gara ezazu $g(z)$ z-ko berreduratan, baita $\left(z+\frac{1}{2}\right)$-ko berreduratan, kasu bakoitzean konbergentzia eremua aipatuz;

b) sailka itzazu $h(z)$-ren singulartasunak;

c) kalkula ezazu $\oint_C h(z)\,dz,$ non C mugaldea $|z| = 3/4$ formulak definituta baitago;

d) esan ezazu zer singulartasun mota daukan $h'(z)$ funtzioak $z = -1/2$ puntuan;

e) kalkula ezazu $\text{Res}[h'(z), -1/2]$ hondarra;

f) aipa ezazu zer singulartasun mota daukan $\dfrac{h(z)}{h''(z)}$ funtzioak $z = -1/2$ puntuan.

(5 puntu)

3.- Kalkula ezazu honako integral inpropio honen Cauchy Balio Nagusia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x(x-i)}\,dx.$$

(2.5 puntu)

TIEMPO: 1 hora

- ***2. ARIKETA***

1.- 1.1) Enuntzia ezazu konboluzioaren teorema denborazko eremuan, Fourier transformaturako.

1.2) Bedi $f(t) = e^{-t}\cdot H(t)$ funtzioa. Eskatzen da:

1.2.1) Kalkula ezazu $f * f$ eta bere Fourier transformatua.

1.2.2) Kalkula ezazu $f * f * f$ eta bere Fourier transformatua.

(3.5 puntu)

2.- Ebatz ezazu honako ekuazio diferentzial hau Laplace transformatua erabiliz:

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} \text{ non } y(1) = \frac{3}{2e}, \quad y'(1) = \frac{1}{2e} \text{ dugun.}$$

(3.5 puntu)

DENBORA: 40 minutu

OHARRA: 2. ariketa egin ondoren, 10 minutuko atsedena izango da.

MATEMATIKA GEHIPENA – DEIALDI OHIKOA
2010eko ekainak 7

3. ARIKETA

1.- Froga ezazu honako emaitza teoriko hau: $f = u + i \cdot v$ deribagarria bada $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ puntuan, orduan $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0, y_0)$ egiaztatzen da.

Oharra: *Ezin dira erabili ariketa honetan Cauchy-Riemann formulak, ariketan eskatzen ari dena formula horiek frogatzeko erabiltzen direlako, hain zuzen ere.*

(2 puntu)

2.- Irudika itzazu, grafikoki, planu konplexuko honako azpimultzo horiek:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi \right\}$$

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z + 3 - i) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z^2) \leq \pi \right\}$$

(2 puntu)

3.- Aurki eta irudika itzazu grafikoki honako funtzio honen singulartasunak:

$$f(z) = \sqrt{iz^2 - 2} + \frac{1}{\tan(z^2)}$$

(3 puntu)

DENBORA: 40 minutu

- ## *4. ARIKETA*

Kontsidera ezazu $f(x) = e^{-x}$ funtzioa. Eskatzen da:

a) Adieraz ezazu grafikoki [-8, 8] tartean $\varphi_1(x)$, hau da, (0,2) tartean $f(x)$-rekin bat datorren eta periodo txikienekoa den sinu eta kosinuzko garapena. Kalkuluak gauzatu gabe, idatz itzazu garapenaren koefizienteak lortzeko behar diren formula finalak.

b) Errepika ezazu a) atala $\varphi_2(x)$ kasurako: sinu seriezko garapena.

c) Idem $\varphi_3(x)$ kasurako: kosinu seriezko garapena.

d) Idem $\varphi_4(x)$ kasurako: kosinu bakoitizko garapena.

e) Idem $\varphi_5(x)$ kasurako: sinu bakoitizko garapena.

f) Kalkula ezazu $\varphi_1(x)$.

g) Aurreko ataletik abiaturik, kalkula ezazu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2\pi^2}$.

h) Bete ezazu honako taula hau:

	0	3	38
$\varphi_1(x)$			
$\varphi_3(x)$			
$\varphi_5(x)$			

Oharra:

$$\int e^{-x} \cdot \cos(ax)dx = \frac{e^{-x}}{1 + a^2}\left(a \cdot \sin(ax) - \cos(ax)\right)$$

$$\int e^{-x} \cdot \sin(ax)dx = -\frac{e^{-x}}{1 + a^2}\left(a \cdot \cos(ax) + \sin(ax)\right)$$

6 puntu

DENBORA: 40 minutu