MATEMATIKA GEHIPENA – LEHEN AZTERKETA PARTZIAL
2010ko urtarrilak 18

- ***EJERCICIO 1***

A) Hartu aintzakotzat $f(t) = \left[H(t) - H(t-2\pi)\right] \cdot \cos(t/2)$, non H(t) Heaviside funtzioa den. Eskatzen da:

1) (0,2π) tartean f(t)-rekin bat datorren luzapen bakoiti eta periodo txikienekoaren adierazpen grafikoa marraztu ezazu.
2) Aipa ezazu zein den aurreko luzapenaren periodo funtsezkoa.
3) Plantea itzazu aurreko Fourier garapenari dagozkion Euler integralak.

(3 puntu)

B) Bedi y(x) = x+1 funtzioa, [0, 1] tartean definitua. Bedi $\varphi_1(x)$, (0,1) tartean y(x)-rekin bat datorren eta periodo txikienekoa den Fourier serie garapena. Eskatzen da:

1) Beharrezkoa al da Euler koefiziente guztiak kalkulatzea $\varphi_1(x)$ lortzeko? Beharrezkoa ez bada, kalkula itzazu bakarrik beharrezkoak direnak, erantzuna arrazoituz.
2) Lor ezazu $\varphi_1(x)$ -ren adierazpena.

Oharra:

$$\int t \cdot \cos(at)dt = \frac{\cos(at)}{a^2} + \frac{t \cdot \sin(at)}{a}$$

$$\int t \cdot \sin(at)dt = \frac{\sin(at)}{a^2} - \frac{t \cdot \cos(at)}{a}$$

3) Zehatz itzazu aurreko garapenaren balioak honako *x*-ren balio hauetarako:

$$x = \frac{-125}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{125}{3}$$

4) Aurreko emaitzak erabiliz, kalkula ezazu:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$$

5) Lortu $\varphi_1(x)$ garapenaren adierazpen grafikoa [-2, 4] tartean. Lortu, ere, honako garapen hauen adierazpen grafikoak, bakoitzaren periodo funtsezkoa aipatuz:
   (a) $\varphi_2(x)$, y(x)-ren sinuzko garapena, periodo txikienekoa;
   (b) $\varphi_3(x)$, y(x)-ren kosinuzko garapena, periodo txikienekoa;
   (c) $\varphi_4(x)$, (0, 1) tartean g(x) = 2 – x funtzioarekin bat datorren eta periodo txikienekoa den Fourier garapena.

   Zehatz ezazu [-2 , 2] tarteko zeintzu puntutan datoz bat $\varphi_1(x)$ -rekin $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ eta $\varphi_4(x)$ garapenak.

(7 puntu)

Denbora : 45 minutu.

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHEN AZTERKETA PARTZIAL
2010ko urtarrilak 18

- ***2. ARIKETA***

A) Enuntzia eta froga ezazu Fourier transformatuaren propietatea zeinaren bidez $\mathcal{F}^{-1}\left[F'(\omega)\right]$ lortu daitekeen, $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right]$-ren funtziotan.

(puntu 1)

B) $\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right]=\dfrac{2}{1+\omega^2}$ dela jakinik, eta bakarrik Fourier transformatuaren propietateak erabiliz, kalkula itzazu honako transformatu hauek, erabilitako propietateak aipatuz:

1) $\mathcal{F}\left[t\cdot e^{-|t|}\right]$

2) $\mathcal{F}\left[\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\right]$

3) $\mathcal{F}\left[\dfrac{2t}{(1+t^2)}\right]$. Azken transformatu honen grafikoa irudika ezazu.

(3 puntu)

C) Kalkula ezazu honako konboluzio hau: $\varphi(t)=f(t)*g(t)$, non

$$f(t)=H(t)\cdot e^{-2t} \quad \text{eta} \quad g(t)=\sin(3t)$$

diren, H(t) Heaviside funtzioa izanik.

Oharra:

$$\int \sin(at)\cdot e^{bt}dt=\frac{e^{bt}}{a^2+b^2}\left(-a\cos(at)+b\sin(at)\right)+C$$

(1.5 puntu)

D) Kalkula ezazu honako funtzio orokortu honen Fourier alderantzizko transformatua:

$$X(\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4)$$

(1.5 puntu)

E) Enuntzia eta froga ezazu Fourier transformatuaren propietatea zeinen bidez $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$ lor daitekeen $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$-ren funtziotan.

(puntu 1)

F) Bedi $f(t)=(1+t)\cdot\left[H(-t)-H(-t-1)\right]+(1-t)\cdot\left[H(t)-H(t-1)\right]$. Eskatzen da:

1) Irudika ezazu *f(t)*.

2) Kalkula eta irudika ezazu $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ transformatua $f'(t)$ **-ren transformatutik abiaturik**.

(2 puntu)

Denbora : 45 minutu.

MATEMATIKA GEHIPENA – LEHEN AZTERKETA PARTZIAL
2010ko urtarrilak 18

- ***3. ARIKETA***

A) Hartu aintzakotzat honako funtzio hau: $g(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ e^2\cdot e^{-t}\cdot\left[\dfrac{1}{2}-\sin^2(t-2)\right] & t\geq 2\end{cases}$

Eskatzen da:

1) Berridatz ezazu *g(t)* funtzioa Heaviside funtzioa erabiliz.
2) Kalkula ezazu *g(t)*-ren Laplace transformatua.
3) Kalkula ezazu *y(t)* sistema fisiko baten irteera funtzioa, sistema horren sarrera funtzioa *g(t)* dela jakinik, eta honako ekuazio diferentzial hau betetzen duela jakinik:

$$y''(t)-y(t)=g(t), \quad \text{non} \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0\end{cases}.$$

(5.5 puntu)

B) $z^4-z_0=0$ ekuazioaren soluzio bat $z_1=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$ da. Eskatzen da:

1) Aurkitu z_1 zenbakiaren modulu eta argumentua, $tg\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ dela jakinik.
2) Aurki eta adieraz ezazu z_0 era binomikoan.
3) Aurki itzazu ekuazioaren beste soluzio guztiak.
4) Bitez A eta B hirugarren eta laugarren koadrantean dauden soluzioen afixuak. Bedi C triangelu isoszeles baten zati irudikari txikieneko erpina, A eta B triangelu horren beste erpinak izanik, alde desberdina definitzen dutenak. Kalkula ezazu C erpina, berari dagokion triangelu-altueraren luzera eta AB aldearen luzera berdinak direla jakinik.

(4.5 puntu)

Denbora : 45 minutu.

- ***4. ARIKETA***

A) Ondoriozta itzazu Cauchy-Riemann ekuazioak koordenatu polarretan, ekuazio horien adierazpen kartesiarretik abiaturik. Aplika itzazu lorturiko ekuazioak $Log(z)$ -ren analitikotasun eremua ondorioztatzeko.

(3 puntu)

B) Kalkula eta adieraz ezazu analitiko eta grafikoki honako funtzio honen singulartasunak:

$$f(z)=\frac{1}{\cosh(1)\cdot e^{(z^2)}+\cos(i)}+\frac{1}{2\cdot \mathrm{Log}(3iz+1)-i\pi}$$

(3.5 puntu)

C) Bedi $f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ funtzio analitiko bat $D\subseteq\mathbb{C}$ eremuan. Eskatzen da:

1) Froga ezazu $V(x,y)=u(x,y)\cdot v(x,y)$ funtzio analitiko baten zati irudikaria dela.
2) $\mathrm{Im}[F(x+iy)]=V(x,y)$ betetzen duten $F(z)$ analitiko guztiak aurki itzazu.

(3.5 puntu)

Denbora : 45 minutu.