AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
18 DE ENERO DE 2010

- ***EJERCICIO 3***

A) Dada la función $g(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ e^2\cdot e^{-t}\cdot\left[\dfrac{1}{2}-\sin^2(t-2)\right] & t\geq 2 \end{cases}$, se pide:

1) Definir g(t) mediante la función escalón.
2) Hallar su transformada de Laplace.
3) Hallar la respuesta y(t) de un sistema físico a la perturbación g(t), sabiendo que está regido por la siguiente ecuación diferencial:

$$y''(t)-y(t)=g(t) \quad con \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

(5.5 puntos)

B) Una raíz de la ecuación $z^4-z_0=0$ es $z_1=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$. Se pide:

1) Módulo y argumento de z_1. Dato : $tg\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$
2) Hallar z_0 en forma binómica.
3) Hallar las demás raíces de dicha ecuación.
4) Si los afijos de las raíces situadas en el tercer y cuarto cuadrante son los vértices A y B del lado desigual de un triángulo isósceles, hallar el otro vértice C (el de menor componente imaginaria del triángulo) sabiendo que la longitud de la altura correspondiente al vértice C es igual a la longitud del lado AB.

(4.5 puntos)

Tiempo : 45 minutos.

- ***EJERCICIO 4***

A) Deducir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, a partir de dichas ecuaciones en coordenadas cartesianas. Utíliza las ecuaciones obtenidas para deducir el dominio de analiticidad de $Log(z)$.

(3 puntos)

B) Calcular y representar gráficamente las singularidades de la siguiente función:

$$f(z)=\frac{1}{\cosh(1)\cdot e^{(z^2)}+\cos(i)}+\frac{1}{2\cdot \mathrm{Log}(3iz+1)-i\pi}$$

(3.5 puntos)

C) Sea $f(x+iy)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ una función analítica en una cierta región $D\subseteq\mathbb{C}$. Se pide:

1) Demostrar que $V(x,y)=u(x,y)\cdot v(x,y)$ es la parte imaginaria de una función analítica.
2) Hallar todas las funciones analíticas $F(z)$ que cumplan $\mathrm{Im}[F(x+iy)]=V(x,y)$.

(3.5 puntos)

Tiempo : 45 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
18 DE ENERO DE 2010

- ***EJERCICIO 1***

A) Se considera la función $f(t)=\left[H(t)-H(t-2\pi)\right]\cdot\cos(t/2)$, siendo H(t) la función escalón. Se pide:

1) Representar gráficamente la extensión periódica impar de menor periodo que coincide con f(t) en el intervalo (0,2π).
2) Indicar cuál es su periodo fundamental.
3) Plantear las integrales de Euler correspondientes a este desarrollo de Fourier.

(3 puntos)

B) Dada la función y(x) = x+1, definida en [0, 1], se define $\varphi_1(x)$ como el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica de menor periodo posible que coincide con y(x) en el intervalo (0,1). Se pide:

1) ¿Es necesario calcular todos los coeficientes de Euler para obtener $\varphi_1(x)$? Si no lo es, calcular sólo los necesarios razonando la respuesta.
2) Dar la expresión de $\varphi_1(x)$.

Dato:

$$\int t\cdot\cos(at)dt=\frac{\cos(at)}{a^2}+\frac{t\cdot\sin(at)}{a}$$

$$\int t\cdot\sin(at)dt=\frac{\sin(at)}{a^2}-\frac{t\cdot\cos(at)}{a}$$

3) Determinar los valores que tomará dicho desarrollo para los siguientes valores de x:

$$x=\frac{-125}{3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{125}{3}$$

4) Basándose en los resultados obtenidos calcular:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$$

5) Representar gráficamente el desarrollo $\varphi_1(x)$ en el intervalo [-2, 4]. Representar asimismo los siguientes desarrollos indicando en cada caso su periodo fundamental:
   (a) $\varphi_2(x)$ correspondiente al desarrollo de menor periodo de y(x) en serie de senos.
   (b) $\varphi_3(x)$ correspondiente al desarrollo de menor periodo de y(x) en serie de cosenos.
   (c) $\varphi_4(x)$ correspondiente al desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica de menor periodo de la función g(x) = 2 – x en el intervalo (0, 1).

¿En qué puntos del intervalo [-2 , 2] coinciden con $\varphi_1(x)$ los desarrollos $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ y $\varphi_4(x)$.

(7 puntos)

Tiempo : 45 minutos.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – PRIMER EXAMEN PARCIAL
18 DE ENERO DE 2010

- ***EJERCICIO 2***

A) Enunciar y demostrar la propiedad de la transformada de Fourier que permite obtener

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F'(\omega)\right] \text{ en función de } f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right].$$

(1 punto)

B) Sabiendo que $\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right]=\dfrac{2}{1+\omega^2}$ y, utilizando en los cálculos únicamente las propiedades de la transformada de Fourier, calcular las siguientes transformadas, indicando las propiedades utilizadas.

1) $\mathcal{F}\left[t\cdot e^{-|t|}\right]$

2) $\mathcal{F}\left[\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\right]$

3) $\mathcal{F}\left[\dfrac{2t}{(1+t^2)}\right]$, representando gráficamente en este último caso, la transformada.

(3 puntos)

C) Calcular la siguiente convolución: $\varphi(t)=f(t)*g(t)$ siendo

$$f(t)=H(t)\cdot e^{-2t} \quad y \quad g(t)=\sin(3t),$$

donde H(t) es la función escalón.

Dato:

$$\int \sin(at)\cdot e^{bt}dt=\frac{e^{bt}}{a^2+b^2}\left(-a\cos(at)+b\sin(at)\right)+C$$

(1.5 puntos)

D) Calcular la transformada inversa de Fourier de la siguiente función generalizada

$$X(\omega)=2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-4)$$

(1.5 puntos)

E) Enunciar y demostrar la propiedad de la transformada de Fourier que permite obtener $\mathcal{F}\left[f'(t)\right]$ en función de $F(\omega)=\mathcal{F}\left[f(t)\right]$

(1 punto)

F) Sea $f(t)=(1+t)\cdot\left[H(-t)-H(-t-1)\right]+(1-t)\cdot\left[H(t)-H(t-1)\right]$. Se pide:

1) Representar gráficamente f(t).
2) Calcular $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$ **a partir de la transformada de** $f'(t)$ y representarla gráficamente.

(2 puntos)

Tiempo : 45 minutos.