**AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA**

**17 DE SEPTIEMBRE DE 2009**

***EJERCICIO 1***

1. Sea $f(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t)$, siendo $f_1(t)$ una función real y par, y $f_2(t)$ una función real e impar. Sea $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ , $F_1(\omega) = \mathcal{F}[f_1(t)]$ y $F_2(\omega) = \mathcal{F}[f_2(t)]$. Se pide, razonando brevemente la respuesta, decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

| | |
|---|---|
| a) | f(t) es una función real y par |
| b) | f(t) es una función imaginaria pura e impar |
| c) | f(t) es una función compleja |

| | |
|---|---|
| a) | $F_1(\omega)$ es una función real e impar |
| b) | $F_1(\omega)$ es una función real y par |
| c) | $F_1(\omega)$ es una función compleja, ni par ni impar |

| | |
|---|---|
| a) | $F_2(\omega)$ es una función imaginaria pura y par |
| b) | $F_2(\omega)$ es una función imaginaria pura e impar |
| c) | $F_2(\omega)$ es una función real |

| | |
|---|---|
| a) | $F(\omega)$ es una función real |
| b) | $F(\omega)$ es una función compleja |
| c) | $F(\omega)$ es una función real e impar |

(2 puntos)

2. Sean la funciones:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t \le 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \qquad y \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Obtener la expresión analítica de $h(t) = f(t) * g(t)$, así como su representación gráfica.
Enunciar el teorema de convolución y aplicarlo al cálculo de: $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$.
¿Son absolutamente integrables las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$?. Justificar la respuesta.
Hallar el módulo, la parte real y la parte imaginaria de $H(\omega)$.

(4 puntos)

**AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA**

**17 DE SEPTIEMBRE DE 2009**

3. Resolver el siguiente problema de valor inicial mediante la transformada de Laplace:

$$y'' + y = \delta(t) + \delta(t-\pi)\ ,\ \ y(0) = 1\ y\ \ y'(0) = 0$$

Enunciar las propiedades y teoremas de la transformada de Laplace utilizados.

(2 puntos)

4. Se considera φ(t), la extensión periódica de f(t) = t en el intervalo (0,2). Obtener el desarrollo en serie de Fourier de φ(t).

A partir del desarrollo anterior obtener la serie numérica:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

Enunciar el teorema que justifica el cálculo anterior.

Nota: Se valorará en cálculo del desarrollo la utilización de posibles simplificaciones.

$$\int_a^b t\cdot\sin(\omega t)dt = \frac{a\omega\cdot\cos(a\omega)-b\omega\cdot\cos(b\omega)-\sin(a\omega)+\sin(b\omega)}{\omega^2}$$

$$\int_a^b t\cdot\cos(\omega t)dt = \frac{b\omega\cdot\sin(b\omega)-a\omega\cdot\sin(a\omega)-\cos(a\omega)+\cos(b\omega)}{\omega^2}$$

(3 puntos)

5.

(a) Sea $z_0$ un cero de orden N de f(z).¿Qué tipo de punto singular es $z_0$ para $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$?. Hallar $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right]$.

(b) Idem. en el caso de que $z_0$ sea un polo de orden N de f(z).

(c) Aplicar los resultados anteriores al cálculo de $\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ siendo $f(z)=\dfrac{(z-2)^2\cdot(z+3)^3}{z^4}$, en los siguientes contornos:

1) $C:|z|=1$ 2) $C:|z-1|=\dfrac{3}{2}$ 3) $C:|z+3|+|z-3|=7$.

(4 puntos)

Tiempo : 1 h. 30 m.

**AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA**

**17 DE SEPTIEMBRE DE 2009**

***EJERCICIO 2***

1. Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos tales que su cociente está situado en el eje imaginario positivo, su suma es igual a 10+10i, y el módulo de uno de ellos es el triple que el del otro. Se pide:

   (a) Hallar $z_1$ y $z_2$.

   (b) Si $z_1$ y $z_2$ son los vértices opuestos de un cuadrado, hallar los otros dos vértices, $z_3$ y $z_4$.

(3 puntos)

2. Hallar la parte real e imaginaria de una función analítica con $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1-i \end{cases}$

   sabiendo que $\operatorname{Im}\left[f'(z)\right]=\phi(x)$ con $\begin{cases} \phi(0)=0 \\ \phi(1)=-2 \end{cases}$.

(3 puntos)

3.
   (a) Desarrollar en serie de Laurent en potencias de (z-1), $f(z)=\sin\left(\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}\right)$.

   (b) Hallar $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}(z-1)^5\sin\left(\frac{z^2-2z}{(z-1)^2}\right)dz$.

(3 puntos)

4. Siendo $a>0$, se pide:

   (a) Hallar el módulo de $f(z)=e^{iaz}$ cuando z recorre la circunferencia $|z|=1$.

   (b) Hallar $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-a\sin\theta}\cdot\cos(a\cos\theta)d\theta$

(3 puntos)

5. Calcular la transformada inversa de Fourier de $F(\omega)=\dfrac{1}{i\,\omega}$, aplicando el Teorema de los Residuos.

(3 puntos)

Tiempo : 1 h. 30 m.