

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. maila
2009ko ekainak 4 - Deialdi Ohikoa.

LEHEN ARIKETA

1. $\frac{f(z)}{g(z)}$ funtzioak polo bakuna du z_0 puntuan. Puntu horretako hondarra kalkulatzeko limite erako formulatik abiatutik, **froga ezazu** beste formula partikular bat esandako hondar hori kalkulatzeko, zeinek erabiltzen duen $f'(z_0)$ edo $g'(z_0)$, f eta g funtzioek bete behar dituzten baldintzak **enuntziatuz**.

puntu 1

2. **Cauchy-ren teorema bakarrik erabiliz**, eztabaida eta kalkula ezazu I_n integralaren balioa, $n \in \mathbb{Z}$ balioen arabera.

$$I_n = \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{(z-5)^2 \cdot (z-2)^n}$$

3 puntu

3. Bedi h funtzio oso bat zeinerako $h(-1) = 3$ eta $h'(-1) = -6$ dugun, eta bedi honako funtzio hau:

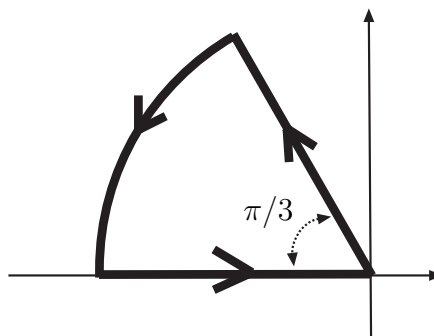
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-2) \cdot (z+1)^2}$$

Jatorritik gertuen dagoen singularitasunean zentratutako f -ren berredurazko serie garapenen guztien konbergentzia eremuen adierazpen analitiko eta grafikoa eman itzazu, garapen mota aipatuz. Esandako singularitasunean zentratutako eta eremu bornaturiko garapenaren **zati nagusia** kalkula ezazu.

3 puntu

4. Kalkula ezazu honako integral inpropio honen balioa, alboko irudiko mugaldea erabiliz:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^6} dx$$



3 puntu

DENBORA: ORDU 1

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. kurtsoa
2009ko ekainak 4 - Deialdi Ohikoa.

BIGARREN ARIKETA

1. $z^2 - iz - 1 - i = 0$ ekuazioaren erroen artean, zati irudikari txikieneko z_1 da, eta bestea, z_2 . Bedi C zirkunferentzia, z_1 puntuan zentrua duena eta z_2 puntutik igarotzen dena. Bedi T triangelu aldeakidea, C zirkunferentziari zirkunskribatzen zaiona, C eta T -ren arteko ukitze-puntua z_2 izanik. Aurki ezazu T -ren zati irudikari handieneko erpina.

3 puntu

2. Aurki itzazu honako funtzio honen puntu singularrak. Irudikatu puntu horiek, eta eman haien adierazpen analitikoak.

$$f(x + iy) = f(z) = \frac{1}{(z^2 - ix + y - 1 - i)^4} + \frac{\sqrt{\frac{z}{z-1}}}{\text{Cosh } z - \text{Sinh } z + e^z}$$

3.5 puntu

3. Bedi $f(x, y) = y^2 + \phi(x)$ funtzioa, non $\phi(0) = 0$ den. Aurki itzazu $h(z)$ funtzio analitiko guztiak zeintzuen zati erreala f funtzioa den, $h(0) = i$ izanik.

3.5 puntu

DENBORA: ORDU 1.

Matematika Gehipena. Ingeniaritza Industrial, 2. kurtsoa
2009ko ekainak 4 - Deialdi Ohikoa.

HIRUGARREN ARIKETA

1. Bedi $f(t) = \frac{t+1}{2}$ funtzioa. Eskatzen da:

- (a) Bedi φ_1 kosinu bakoitzko serie garapena, periodo txikieneko dena eta $(-1, 0)$ tartean f -rekin bat datorrena. Irudika ezazu φ_1 $[-3, 3]$ tartean, periodoa aipatuz. **0.75 puntu**
- (b) Bedi φ_2 Fourier serie garapena, periodo txikieneko dena eta $(-1, 0)$ tartean f -rekin bat datorrena. Irudika ezazu φ_2 $[-3, 3]$ tartean, periodoa aipatuz. **0.75 puntu**
- (c) Kalkulurik egin gabe, planteatu ezazu $\varphi_2(t)$ kalkulatzeko erarik sinpleena, anulatzen diren gaiak eta kalkulatu behar izango lirartekeen integralak esplizituki adieraziz. **1.25 puntu**
- (d) Honako garapen hau erabiliz,

$$\varphi_1(t) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

kalkula ezazu $g(t) = t$ funtzioaren garapen trigonometrikoa, $(0, 1)$ tartean baliozkoa dena. **puntu 1**

2. Bedi $a > 0$, bedi honako funtzio hau

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

eta bedi $F = \mathcal{F}[f]$ bere Fourier transformatua. Eskatzen da:

- (a) Kalkula ezazu $|F(\omega)|^2$ -ren balioa $\omega \in \mathbb{R}$ guztietarako. Esan kalkuluko zein pausutan erabiltzen duzun a positiboa dela. **1.25 puntu**
- (b) Aurreko emaitzetik abiatuz, kalkula ezazu: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. **2 puntu**

3. **Laplace transformatua erabiliz**, ebatz ezazu ekuazio diferentziagarrien honako sistema hau, hastapen balioak $x(0) = 0$ eta $x'(0) = y(0) = 1$ direlarik.

$$\begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t). \end{cases}$$

3 puntu

DENBORA: ORDU 1.