AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS – SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
15 DE MAYO DE 2009

- ***EJERCICIO 1***

A) Considerar las funciones

$$f(z) = z \cdot \operatorname{Log} z \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{\sin(i\pi z)}{(2z-i)(z^2+1)^2}.$$

Se pide:

A1) Clasificar las singularidades aisladas de $h(z) = f(z) + g(z)$.

A2) ¿Cuántos desarrollos en serie de potencias de $(z-i)$ admite $h(z)$?¿Y en serie de potencias de $(z-2)$? Indicar el tipo de desarrollo en cada caso.

A3) Desarrollar $f'(z)$ en serie de potencias de $(z-2)$.

A4) Desarrollar $f(z)$ en serie de potencias de $(z-2)$.

(5 puntos)

B) B1) Calcular los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin de la función $F(z) = \left(\dfrac{1}{\cos(2z)}\right)^2$ **(1.5 puntos)**

B2) Calcular el valor de los siguientes residuos:

(i) $\operatorname{Res}\left[F(z)\cdot\dfrac{e^z-1}{z^4}, 0\right]$ (ii) $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{F(z)-1}, 0\right]$ (iii) $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{F(z)-1}, 0\right]$

(3.5 puntos)

Tiempo 45m.

- ***EJERCICIO 2***

1. Calcular el Valor Principal de Cauchy de la siguiente integral impropia, justificando los pasos realizados en el cálculo: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)}{x+x^3}\,dx$

(3.5 puntos)

2. Sea C_a el contorno definido por $|z-\pi| = a$. Comprobar, **de dos formas distintas**, que la integral $\displaystyle\int_{C_a} \frac{\sin(z)}{(z-2\pi)^2\cdot(z+\pi)}\,dz$ toma el mismo valor para todos los posibles valores del parámetro $a \in (\pi, \infty)$.

(4 puntos)

3.

3.1 Enunciar el principio del módulo máximo y del módulo mínimo.

3.2 Proporcionar dos ejemplos de funciones enteras cuyos módulos no alcancen el mínimo en ningún punto de la frontera del triángulo de vértices -1, $1+i$, $1-i$.

(2.5 puntos)

Tiempo 45m.